# Истечение с критической скоростью потока газа и твердой частицы из сосуда

Б.Ч. Чечейбаев
*Кыргызская Республика, г. Бишкек, КНУ им. Ж. Баласагына*

**Аннотация**

Рассматривается двухфазное течение в виде смеси газа и твердых частиц. Математическая модель динамики двухфазной смеси исследуется при помощи метода малого параметра. Найдены аналитические решения нестационарного трансзвукового истечения смеси газа и твердых частиц из сосуда.

Рассмотрим систему уравнений в частных производных, состоящую из уравнений неразрывности, движения и энергии, которые соответствуют динамике двухфазной среды, состоящей из газа и твердых частиц:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla w = 0,\ \rho\frac{dw}{dt} + \nabla P + \rho_S f = 0,$$

$$\rho\frac{d}{dt}\left(h + \frac{1}{2}w^2\right) + \rho_S\frac{d}{dt}\left(e_S + \frac{1}{2}w_S^2\right) - \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d\rho_S}{dt} + \rho_S\nabla w_S = 0$$

$$\frac{dw_S}{dt} = f, \frac{de_S}{dt} = q, \tag{1}$$

где $f$ - сила межфазного взаимодействия, отнесённая к единице массы соответствующей фазы, $q$ - тепловой поток между фазами, $w$ - вектор скорости, $P$ - давление, $\rho$ - плотность. Здесь параметрам частиц придан нижний индекс $s$ . Система (1) замыкается уравнениями состояния для газа и частиц, которые имеют вид:

$$h = h\left(t, P\right), p = \rho RT/\mu,\ e_S = e_S\left(T\right) \tag{2}$$

где $e_s$ - удельная внутренняя энергия частиц, $h$ - удельное теплосодержание совершенного газа. Система уравнений в частных производных для двухфазного течения смеси газа и твердых частиц без фазовых превращений приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho_S}{\rho}\varphi^f\left(u - u_S\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\rho_S}{\rho}\varphi^f\left(\vartheta - \vartheta_S\right) = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\vartheta)}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\vartheta}{y} = 0,$$

$$\tfrac{\partial h}{\partial t} + u\tfrac{\partial h}{\partial x} + \vartheta\tfrac{\partial h}{\partial y} - \tfrac{1}{\rho}\left(\tfrac{\partial P}{\partial t} + \tfrac{\partial P}{\partial x} + \tfrac{\partial P}{\partial y}\right) -$$

$$-\tfrac{\rho_S}{\rho}[\varphi^f\left(u - u_S\right)^2 + \varphi^f\left(\vartheta - \vartheta_S\right)^2 + \varphi^q\left(T - T_S\right)] = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_S u_S)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_S \vartheta_S)}{\partial y} + \lambda \frac{\rho_S \vartheta_S}{y} = 0$$

$$\frac{\partial u_S}{\partial t} + u_S \frac{\partial u_S}{\partial x} + \vartheta_S \frac{\partial u_S}{\partial y} = \varphi^f (u - u_S),$$

$$\frac{\partial \vartheta_S}{\partial t} + u_S \frac{\partial \vartheta_S}{\partial x} + \vartheta_S \frac{\partial \vartheta_S}{\partial y} = \varphi^f (\vartheta - \vartheta_S) \tag{3}$$

$$\frac{\partial e_S}{\partial t} + u_S \frac{\partial e_S}{\partial x} + \vartheta_S \frac{\partial e_S}{\partial y} = \varphi^q (T - T_S), \quad P = \rho R T$$

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - \lambda} T \qquad e_S = \delta T_S.$$

Здесь коэффициенты $\varphi^f$ и $\varphi^q$ соответствуют стоксовскому режиму динамического и теплового взаимодействия газа с частицами. При система (3) моделирует плоскопараллельные нестационарные течения двухфазной среды, а при $\lambda = 1$ - осесимметричные течения. Тепловой поток $q$ определяется формулой

$$q = \frac{NuC_P (T - T_S)}{3P_r St} = \varphi^q (T - T_S) \tag{4}$$

где $\varphi^q = \frac{NuC_P}{3P_r St}$ $N_u$ - число Нуссельта, $P_r$ - число Прандтля, $C_p$ - удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении, T и $T_s$ - температуры газа и частицы соответственно. Уместно здесь напомнить определения чисел Нуссельта и Прандтля:

$$Nu = \frac{2r\alpha}{\lambda_T}, P_r = \frac{C_p \eta}{\lambda_T} \tag{5}$$

где $\alpha$ - коэффициент теплоотдачи от частиц к газу, $\lambda_T$ - коэффициент теплопроводности газа. Отметим, что при постоянных значениях $\varphi_1, \varphi_2, w$ и T имеет место соотношение

$$\Delta = \Delta_0 \exp\left(-\frac{t}{t_1}\right) \tag{6}$$

где под $\Delta$ понимается скоростное $(w - w_s)$ или температурное $(T_s - T)$ отставание, под $t_1$ - соответственно $\varphi_1^{-1}$ или $\varphi_2^{-1}$ соответствует $\Delta$ при $t - 0$ . Отсюда становится ясным физический смысл параметров $\varphi_1$ и $\varphi_2$ : величины $\frac{1}{\varphi_1}$ и $\frac{1}{\varphi_2}$ численно равны времени, в течение которого отставание $\Delta$ уменьшается в е раз. Иногда параметры и называются временем релаксации. Проекции силы $\overline{f}$, действующей на частицы, определяются из соотношений:

$$f_x = St^{-1} \overline{C_x} (u - u_S) = \varphi^f (u - u_S)$$

,

$$f_y = St^{-1} \overline{C_x} (\vartheta - \vartheta_S) = \varphi^f (\vartheta - \vartheta_S) \tag{7}$$

Здесь $St = \frac{2\rho_S r_S^2 a_*}{9\eta r_*}$ - число Стокса. Для расчета движения двухфазной среды, описываемой системой (3), ставятся следующие начальные и граничные условия:

$$u(x,0,t) = f_o(x,t), \ u_S(x,0,t) = f_1(x,t)$$
$$\vartheta(x,0,t) = 0, \ \vartheta_S(x,0,t) = 0$$

$$\begin{aligned} &u\left(x,y,0\right)=f_2\left(x,y\right),\ u_S\left(x,y,0\right)=f_3\left(x,y\right),\\ &\vartheta\left(x,y,0\right)=f_4\left(x,y\right),\ \vartheta_S\left(x,y,0\right)=f_5\left(x,y\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Вверх по течению, т.е. при $x\to-\infty$ выполняются условия $u_e=u_{eS},\vartheta_e=\vartheta_{eS},T_e=T_{eS}$. Здесь $u_e,\vartheta_e,T_e$ - составляющие вектора скорости и температура двухфазной среды, соответствующие равновесному течению. Кроме условий (8), должны быть заданы также параметры торможения, а также отношения плотности частиц и газа ${\rho_S}/{\rho}$ при $x\to-\infty$ :

$$\frac{\kappa_e P}{\left(\kappa_e-1\right)\rho_\Sigma}+\frac{q_e^2}{2}=\frac{\kappa_e+1}{2\left(\kappa_e-1\right)},\ \frac{P}{\left(\rho_\Sigma\right)^{\kappa_e}}=\frac{1}{\kappa_e},\ \frac{\rho_S}{\rho}=\frac{1-m}{m}$$

$$\rho_\Sigma=\rho_S+\rho \tag{9}$$

Здесь $\rho_{\sum}$ - суммарная плотность смеси, m - относительная массовая концентрация или расход газа, $k_e$ - показатель адиабаты равновесной двухфазной смеси ($\kappa_e=\frac{\alpha}{\alpha-1}$, $\alpha=\frac{\kappa}{\kappa-1}+\frac{1-m}{m}\delta$, $\delta$ - константа, равная удельной теплоёмкости частиц, k - показатель адиабаты газа). Для случая равномерного поступательного потока смеси вверх по течению задача расчета течения сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (3). Далее, разлагая в ряд все основные физические величины рассматриваемой системы по малому параметру $\varepsilon=\frac{1}{\varphi^f}=\frac{1}{\varphi^q}$, получаем:

$$\begin{aligned} &u=q_o+\varepsilon u_e+\varepsilon^3u_1+...,\ u_S=q_o+\varepsilon u_{eS}+\varepsilon^3u_{1S}+...,\\ &\vartheta=\varepsilon^{3/2}\vartheta_e+\varepsilon^{5/2}\vartheta_1+...,\ \vartheta_S=\varepsilon^{3/2}\vartheta_{eS}+\varepsilon^{5/2}\vartheta_{1S}+...,\\ &\rho=\rho_e\left(1+\varepsilon^3\rho_1+...\right),\ \rho_S=\rho_{eS}\left(1+\varepsilon^3\rho_{1S}+...\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &T=T_e+\varepsilon^3T_1+...,T_S=T_{eS}+\varepsilon^3T_{1S}+...,\\ &P=P_e+\varepsilon^3P_1+..., \end{aligned} \tag{10}$$

где $u_e,\vartheta_e,T_e,\rho_e,P_e,u_{eS},\vartheta_{eS},T_{eS},\rho_{Se},P_{eS}$ - параметры равновесного течения смеси газа и твердых частиц, $\epsilon$ - параметр, характеризующий отставание. В разложении (10) величина $q_0$ является скоростью звука при торможении потока, т.е. критической скоростью звука, здесь будем считать, что $q_0=1$ , это возможно при подборе соответствующих масштабов измерения. Переменные здесь подвергаются растяжению по следующим формулам:

$$\tilde t=2t\varepsilon,\quad \tilde y=\varepsilon^{1/2}y,\quad \tilde x=x,$$

Далее для удобства опустим знак тильды над переменными. Подставим теперь разложение (10) и все производные от составляющих скорости, плотности, давления, удельной внутренней энергии, удельного теплосодержания в систему (3). Группируя далее члены уравнения (3) по степеням малого параметра $\epsilon^2$, относительно составляющих скорости двухфазного равновесного течения в трансзвуковом приближении получаем первое уравнение системы Линя-Рейснера-Цзяня:

$$\begin{cases} u_eu_{ex}-\vartheta_{ey}+2u_{et}=0,\\ u_{ey}-\vartheta_{ex}=0 \end{cases} \tag{11}$$

Второе уравнение системы (11) есть условие безвихренности двухфазного потока. Для определения последующих членов ряда (10) получаем систему линейных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{1-m}{m}\left(u_1-u_{1S}\right)+\frac{1}{m\rho_e}\frac{\partial P_1}{\partial x}+\vartheta_e\frac{\partial u_e}{\partial y}=0,(a)$$

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} + 2\frac{\partial \vartheta_e}{\partial t} + u_e\frac{\partial \vartheta_e}{\partial x} + \frac{1-m}{m}\left(\vartheta_1 - \vartheta_{1S}\right) = 0, (b)$$

$$\frac{\partial \vartheta_{1S}}{\partial x} + \vartheta_{eS}\frac{\partial u_{eS}}{\partial y} - \left(u_1 - u_{1S}\right) = 0\,(c) \tag{12}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 2\vartheta_e\frac{\partial \vartheta_e}{\partial x} + \kappa_e u_e^2\frac{\partial u_e}{\partial x}, (d)$$

$$\frac{\partial u_{1S}}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_{1S}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_{1S}}{\partial x} = 2\vartheta_e\frac{\partial \vartheta_e}{\partial x} + \kappa_e u_e^2\frac{\partial u_e}{\partial x}, (e)$$

$$B_o\frac{\partial T_1}{\partial x} + \left(T_1 - T_{1S}\right) = \frac{1}{m\rho_e}\frac{\partial P_1}{\partial x}, \ \ (f)$$

$$\frac{\partial u_{1S}}{\partial x} - \left(u_1 - u_{1S}\right) + \frac{\delta}{A_o}\frac{\partial T_{1S}}{\partial x} - \frac{1}{A_o}\left(T_1 - T_{1S}\right) = \frac{\partial \vartheta_e}{\partial x}, (g)$$

$$\frac{\partial \vartheta_{1S}}{\partial x} + 2\frac{\partial \vartheta_e}{\partial t} + u_e\frac{\partial \vartheta_e}{\partial x} - \left(\vartheta_1 - \vartheta_{1S}\right) = 0, (h)$$

$$\frac{m\kappa_e - 1}{m\kappa_e}\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{m\kappa_e}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} + \frac{1-m}{m}\frac{\partial u_{1S}}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\frac{\kappa_e + 1}{2m\kappa_e}u_e^2\frac{\partial u_e}{\partial x} -$$

$$-\frac{(m-1)\,\kappa_e + 2}{m\kappa_e}\vartheta_e\frac{\partial \vartheta_e}{\partial x} - \frac{m\kappa_e - 1}{m\kappa_e}\vartheta_e\frac{\partial \vartheta_e}{\partial y}, (i)$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\rho_e T_1 + \frac{1}{2}\rho_e T_e \rho_1, \quad A_o = \frac{\delta\left(\kappa_e - 1\right)}{(1-m)\kappa_e},$$

$$B_o = \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1},$$

где $u_1, u_{1S}, \vartheta_1, \vartheta_{1S}, \rho_1, \rho_{1S}, T_1, T_{1S}, P_1$ - первые приближения физических параметров двухфазного потока в асимптотическом ряду (10). Здесь индекс $S$ у газодинамических величин соответствует твердой фазе. Уравнение (11) описывает нестационарные трансзвуковые, потенциальные течения двухфазной среды. Отметим, что при этом равновесное течение наступает в области трансзвуковых скоростей. Определив решения $u_e, \vartheta_e$ из уравнения Линя-Рейснера-Цзяня (11), можно найти параметры двухфазного равновесного течения, которые выражаются через $u_e, \vartheta_e$ так:

$$\left(\frac{\kappa_e + 1}{2} - \frac{\kappa_e - 1}{2}q_e^2\right)^{\frac{1}{\kappa_e - 1}}, \ q_e^2 = \left(q_o + u_e\right)^2 + \vartheta_e^2, \ \rho_e = m\rho_{\Sigma e}, \ \rho_{eS} = \left(1 - m\right)\rho_{\Sigma e}$$

$$q_e^2 = \left(q_o + u_e\right)^2 + \vartheta_e^2, \ \rho_e = m\rho_{\Sigma e}, \ \rho_{eS} = \left(1 - m\right)\rho_{\Sigma e}$$

$$P_e = \frac{\left(\rho_{\Sigma e}\right)^{\kappa_e}}{\kappa_e}, \ T_e = \frac{P_e}{\rho_e}, \ h_e = \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1}T, \ e_{eS} = \delta T \tag{13}$$

где $k_e$ - показатель адиабаты двухфазного равновесного потока, когда составляющие скорости и температуры обеих фаз равны и определяются следующей формулой:

$$\kappa_e = \frac{\kappa + (\kappa - 1)\,\frac{1-m}{m}}{1 + (\kappa - 1)\,\frac{1-m}{m}\delta}.$$

Здесь $m$ - заданная не превышающая единицу величина, характеризующая относительную массовую концентрацию смеси. Определив точное решение уравнения Линя-Рейснера-Цзяня, находим составляющие скорости равновесного трансзвукового течения смеси газа и твердых частиц $u_e, \vartheta_e$ . Подставляя далее выражение для $u_e, \vartheta_e$ в (13), получаем возможность для вычисления плотности, давления, температуры и внутренней энергии среды в состоянии равновесия фаз. Система линейных уравнений в частных производных первого порядка (12) позволяет определить поправки к газодинамическим величинам, соответствующим смешанному потоку газа и твердых частиц. Рассмотрим двумерное нестационарное трансзвуковое истечение смеси газа и твердых частиц из сосуда. Уравнение Линя-Рейснера-Цзяня, записанное относительно составляющих скорости $u_e, \vartheta_e$ , равносильно следующему уравнению в частных производных второго порядка:

$$\varphi_{0x}\varphi_{0xx} - \varphi_{0yy} + 2\varphi_{0xt} = 0. \tag{14}$$

Здесь $\varphi_0(x, y, t)$ - потенциал скорости возмущения. Решение уравнения (14) будем искать в аддитивной форме:

$$\varphi_0(x, y, t) = f_1(\xi) + f_2(y) \tag{15}$$

где $\xi = ax + by$, $a, b - const$. Подставляя предполагаемый вид решения (15) в уравнение Линя-Рейснера-Цзяня (14), относительно неизвестных функций $f_1(\xi), f_2(y)$ получаем следующие два уравнения:

$$a\ddot{f}(\xi)[a^2\dot{f}_1(\xi) - 2b] = \lambda \tag{16}$$

$$f_2^{''}(y) = \lambda. \tag{17}$$

В результате интегрирования уравнений (16), (17) при учете формы (15) определяем вид потенциала скорости возмущения:

$$\varphi_0(x, y, t) = \frac{2b}{a^2}(ax + bt) \pm \left\{ \left( \frac{4b^2}{a} + a\bar{C}_3 \right) + 2\lambda(ax + bt) \right\}^{3/2} + \frac{\lambda}{2}y^2 + C_1 y + C_2 \tag{18}$$

Составляющие вектора скорости равновесного течения двухфазной среды определяются из (18) при $a = 1$ и имеют следующий вид:

$$u_\ell = 2b \pm \left\{ \left( 4b^2 + \bar{C}_3 \right) + 2\lambda(ax + bt) \right\}^{1/2}, \ \vartheta_\ell = \lambda y + C_1. \tag{19}$$

Известно, что линии тока определяются интегрированием следующей системы дифференциальных уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx}{u_\ell} = \frac{dy}{\vartheta_\ell} = dt. \tag{20}$$

Подставляя (19) в (20) и интегрируя далее, имеем:

$$(\lambda y + C_1)(1 + \sqrt{\tilde{C} + 2\lambda x + t} = \bar{C}e^{\pm\sqrt{\tilde{C}+2\lambda x+t}}, \ \lambda y + C_1 = C_2 e^{\lambda t} \tag{21}$$

Здесь $C_1, \bar{C}, C_2$ - постоянные интегрирования, $\lambda$ - постоянная разделения переменных. Интегральные кривые, определяемые согласно (20), описывают стенки сосуда. Звуковая линия перехода от дозвуковых скоростей определяется из условия $u_e = 0$ и примет следующий вид:

$$x = -\frac{\bar{C}_3}{2\lambda} - bt \tag{22}$$

Составляющие вектора скорости, соответствующие равновесному течению смеси газа и твердых частиц, определяются согласно (19). Подставляя далее выражения для $u_e, \vartheta_e$ в (13), определяем вначале квадрат скорости двухфазного потока, затем - газодинамические величины $\rho_{\sum \ell}, \rho_e, \rho_{es}, P_e, T_\ell, h_e, h_{eS}$ Перейдем теперь к нахождению первых приближений вышеназванных газодинамических величин. Вычитая почленно (12, c) из (12, a), получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_{1S}) + \frac{u_1 - u_{1S}}{m} = -\frac{1}{m\rho_\ell}\frac{\partial P_1}{\partial x}, \tag{23}$$

которое позволяет определить скоростное отставание $(u_1 - u_{1S})$ горизонтальной составляющей скорости вдоль оси симметрии сосуда. Подставляя выражение для скоростного отставания $(u_1 - u_{1S})$ в уравнения (12, a) и (12, c) и интегрируя далее их, находим величины скоростей, соответствующие обеим фазам. Аналогичным образом, из уравнения (12, b) вычитая (12, h), получаем линейное уравнение в частных производных первого порядка относительно скоростного отставания $(\vartheta_1 - \vartheta_{1S})$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vartheta_1 - \vartheta_{1S}) + \frac{\vartheta_1 - \vartheta_{1S}}{m} = 0. \tag{24}$$

Интегрируя последнее уравнение, имеем:

$$\vartheta_1 - \vartheta_{1S} = Be^{-x/m}, \tag{25}$$

где B - постоянная интегрирования. Отсюда видно, что отставание вертикальной составляющей скорости твердых частиц от скорости частиц газа изменяется согласно экспоненциальному закону. Подстановка полученных выражений для $(\vartheta_1 - \vartheta_{1S})$ , а также решений уравнения Линя-Рейсснера-Цзяня, соответствующих равновесным течениям двухфазной среды $(u_e - \vartheta_e)$ в уравнение (12, b) предоставляет нам возможность определения составляющей вектора скорости газа $\vartheta_1$. Согласно (25), можно определить первое приближение скорости $\vartheta_{1S}$ твердых частиц. Рассмотрим далее температурное отставание - величину $T_1 - T_{1S}$ для двухфазной среды, смеси газа и твердых частиц. Из уравнения (12, f) почленно вычитая уравнение (12, g), для определения температурного отставания $T_1 - T_{1S}$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial(T_1 - T_{1S})}{\partial x} + \left(\frac{1}{B_0} + \frac{1}{\delta}\right)(T_1 - T_{1S}) - \frac{1}{B_0 m\rho_\ell}\frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{A_0}{\delta}\frac{\partial u_{1S}}{\partial x} +$$

$$+\frac{A_0}{\delta}(u_1 - u_{1S}) + \frac{A_0}{\delta}\vartheta_\ell\frac{\partial \vartheta_\ell}{\partial x} = 0, \tag{26}$$

где $B_0 = \frac{k_\ell}{k_\ell - 1}$ , $A_0 = \frac{\delta(k_\ell - 1)}{(1-m)k_\ell}$. Если в (26) подставить скоростное отставание $u_1 - u_{1S}$, составляющую скорости $\vartheta_l$ и её $\frac{\partial \vartheta_\ell}{\partial x}$ производную , то мы аналитически можно определить решение получаемого уравнения для температурного отставания $T_1 - T_{1S}$. Далее, из (12, f) при учете найденного соотношения для $T_1 - T_{1S}$, находим температуру газа $T_1$, затем из соотношения $T_{1S} = T_1 - (T_1 - T_{1S})$ определяем температуру твердых частиц $T_{1S}$ в двухфазном потоке. Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о нахождении плотностей газа и твердых частиц $\rho_{1S}$ в потоке. Аналогично вышеизложенному, из уравнения (12, d) почленно вычитая (12, e), получаем следующее:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 - \rho_{1S}) = -\frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_{1S}) - \frac{\partial}{\partial y}(\vartheta_1 - \vartheta_{1S}) \tag{27}$$

Подставляя далее в уравнение (27) частные производные от скоростного отставания $(u_1 - u_{1S})$, $(\vartheta_1 - \vartheta_{1S})$ , получаем уравнение, интегрирование которого позволяет определить изменение разности плотностей $\rho_1$ и $\rho_{1S}$ , соответствующих обеим фазам сплошной среды. Изменение плотности газа $\rho_1$ в двухфазном потоке определяется интегрированием уравнения (12, d), куда подставляются уже найденные выражения для величин $u_1, \vartheta_1, u_\ell, \vartheta_\ell$ и их производные. Плотность твердых частиц $\rho_{1S}$ характеризуется решением уравнения (12,a) или выражением, определяемым из соотношения

$$\rho_{1S} = \rho_1 - (\rho_1 - \rho_{1S}) \tag{28}$$

Давление газа в двухфазном потоке при первом приближении может быть определено следующим образом:

$$P_1 = \frac{1}{2}\rho_\ell T_1 + \frac{1}{2}\rho_\ell T_\ell \rho_1 \tag{29}$$

Отметим что, определены соответствующими выражениями все газодинамические величины $(\rho_\ell, T_\ell, T_1, \rho_1)$, входящие в соотношение (29). Предположим, что справедливо равенство $\frac{1}{m\rho_\ell}\frac{\partial P_1}{\partial x} = Ax$ , где $A$ - постоянная. Тогда, интегрируя уравнение (23), определяем скоростное отставание $(u_1 - u_{1S})$:

$$u_1 - u_{1S} = Ce^{-\frac{x}{m}} + m^2 A - mAx \tag{30}$$

Учитывая решение уравнения Линя-Рейсснера-Цзяня в виде (19), для первых приближений параметров, характеризующих состояние двухфазной среды, имеем следующие выражения:

$$u_1 = (1-m)Ce^{-\frac{x}{m}} + \frac{mAx^2}{2} - m(1-m)Ax + D_1,$$

$$u_{1S} = -mCe^{-\frac{x}{m}} + \frac{mAx^2}{2} - m(2-m)Ax + m^2 A + D_1,$$

$$\vartheta_1 = (m-1)Be^{-\frac{x}{m}} + D_2,\ \vartheta_{1S} = (m-2)Be^{-\frac{x}{m}} + D_2,\ T_1 - T_{1S} = \bar{C}e^{-\left(\frac{1}{B_0}+\frac{1}{\delta}\right)x},$$
$$T_1 = \frac{\bar{C}\delta}{B_0+\delta}e^{-\left(\frac{1}{B_0}+\frac{1}{\delta}\right)x} - \frac{A}{2B_0}x^2 + \tilde{C},\ T_{1S} = \frac{\bar{C}B_0}{B_0+\delta}e^{-\left(\frac{1}{B_0}+\frac{1}{\delta}\right)x} - \frac{A}{2B_0}x^2 + \tilde{C},$$
$$\rho_1 - \rho_{1S} = Ce^{-\frac{x}{m}} - mAx + D_3. \tag{31}$$

В заключение отметим, что подставляя далее выражения для первых приближений газодинамических параметров двухфазного потока, определяемые формулой (31) в асимптотический ряд (10), можно получить решение задачи истечения двухфазного потока из сосуда.

## Список литературы

[1] *Ренни У.* Исследование методом возмущений одномерного течения в ракетных соплах. - В кн.: Детонация и двухфазное течение. -М.: Мир, 1966. - С. 121-154.

[2] *Стернин Л.Е.* Основы гидродинамики двухфазных течений в соплах. - М.: Машиностроение, 1974. - 212 с.

[3] *Хассан.* Точные решения для течений газа с твердыми частицами в сопле. //Ракетная техника, 1964, №2, с. 217-219.

[4] *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. - М.: Наука, 1987. - Часть I. - 464 с. Часть II. - 360 с.