Численное решение смешанной задачи для квазиоднофазных анизотропных грунтов

Яхияев Ф.К.
Институт математики и механики КазНУ им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: farkhad@list.ru

Аннотация

В статье численное решение смешанной задачи рассматривается применительно к случаю плоской деформации грунтовых массивов с учётом их прочностной и деформационной анизотропии. В работе разработан новый алгоритм с процедурой переменных шагов по нагрузке с определением их величины из условия перевода конечного элемента в пластическое состояние. Применительно к шагу S приведены основные элементы структуры численного решения смешанной задачи, которая реализована в программе расчёта.

Модель упругопластической грунтовой среды, используемая при решении смешанной задачи теорий упругости и пластического течения, предполагает выбор законов деформирования для скелета грунта в "упругом" (допредельном) и пластическом (предельном) состоянии, а также условий пластичности (текучести, прочности) конкретного вида.

Решение смешанной упругопластической задачи для квазиоднофазных анизотропных грунтов связано с определением напряжений и деформаций в грунтовой среде при одновременном существовании в ней областей допредельного и предельного напряжённого состояния.

Для численного решения смешанной задачи следует привлекать метод последовательного нагружения. Поскольку этот метод предполагает линейные соотношения между приращениями напряжений и полных деформаций на каждом этапе нагружения, то решение нелинейной (смешанной) задачи, по существу, сводится к последовательности решений линейных вариационных задач. Для каждого шага по нагрузке определяются приращения перемещений, деформаций и напряжений, которые суммируются с соответствующими значениями всех предыдущих приращений и тем самым дают полные значения расчётных величин на данном шаге.

Численное решение линейных вариационных задач осуществлялось методом конечных элементов (МКЭ). Изложение теоретических основ метода и его практического использования в задачах геомеханики дано в работах Л. А. Розина [1971], С. Б. Ухова [1973], Б. З. Амусина, А. Б. Фадеева [1975], А. Б. Фадеева [1987], О. Зенкевича [Zienkiewicz O.C., 1975 г.] и других. Авторы этих и многих других публикаций по МКЭ отмечают эффективность этого численного метода, позволяющего рассчитывать грунтовые массивы произвольных очертаний с учётом неоднородности, нелинейности, анизотропности, вязкопластичных свойств и других особенностей грунтов. Применение МКЭ даёт возможность не только определить напряжённо-деформированное состояние в грунтовой среде, но и проследить за развитием пластической области [1,3,7], очертания которой определяются совокупностью элементов, перешедших в пластическое (предельное напряжённое) состояние. Не останавливаясь в данной статье на подробном изложении основ метода, отметим только те положения, которые непосредственно связаны с решением поставленной задачи.

Для решения использован распространённый вариант МКЭ – метод перемещений [3]. Разрешающая система уравнений этого варианта МКЭ представляет собой систему алгебраических уравнений относительно неизвестных перемещений в узлах расчётной схемы. Эта система сводится к следующему матричному уравнению:

$$[K]\{u\} = \{F\}, \tag{1}$$

где $\{F\}$ – вектор обобщённых узловых сил; $\{u\}$ – вектор обобщённых узловых перемещений; $[K]$ – обобщённая матрица жёсткости системы.

Матрица жёсткости системы $[K]$ формируется из матриц жёсткости конечных элементов $[k]$ и закон её формирования не зависит от формы и деформационных свойств этих элементов. Поэтому достаточно определить общий вид матрицы для отдельного элемента, чтобы, воспользовавшись общим правилом построения обобщённой матрицы, получить последнюю. Система элементов расчётной области назначается так, чтобы в пределах элемента среда была однородной, а оси анизотропии не меняли своей ориентации.

Для решения плоской задачи использовались треугольные конечные элементы [1,7] (ТКЭ). Такая форма позволяет наиболее точно учитывать особенности строения (неоднородность) и конфигурации грунтовых массивов при аппроксимации расчётной области системой (сетью) конечных элементов.

Задание линейной функции перемещений точек треугольного конечного элемента от их координат приводит к постоянству напряжений и деформаций в его пределах, т.е. к однородному напряжённому состоянию, что обеспечивает переход в пластическое состояние всего элемента.

Матрица жёсткости треугольного элемента в глобальной системе координат X, Z (система координат расчётной области) определяется известным выражением [3]

$$[k]' = S[B]^T[D][B], \tag{2}$$

где S – площадь треугольного элемента; $[B]$ – матрица связи вектора узловых перемещений $\{u\}^r$ с вектором деформаций $\{\varepsilon\}^r$ в элементе $r - \{\varepsilon\}^r = [B]\{u\}^r$; $[D]$ – матрица связи вектора напряжений $\{\sigma\}^r$ с вектором деформаций $\{\varepsilon\}^r$ в элементе $r - \{\sigma\}^r = [D]\{\varepsilon\}^r$.

Согласно шаговому методу, интервал нагружения от 0 до $\{F\}$ разделяется на ряд ступеней (шагов) $\{\Delta F_1\}, \{\Delta F_2\}, \ldots, \{\Delta F_S\}\ldots$, величина которых определяется из условия перехода одного или группы элементов в пластическое состояние. Линейная зависимость между приращениями напряжения и полной деформации в матричной форме для шага S имеет следующий вид: $\{\Delta\sigma_S\}^r = [D]\{\Delta\varepsilon_S\}^r$.

Компоненты векторов $\{\Delta\sigma_s\}$ и $\{\Delta\varepsilon_s\}'$ определяют приращения компонент напряжений и деформаций в ТКЭ r. Матрица $[D]$, осуществляющая связь между этими величинами, в общем случае зависит от напряжённого состояния в элементе r.

В допредельном напряжённом состоянии матрица $[D]$ принимается равной матрице упругости $[D^e]$. Физические уравнения [2,4] для трансверсально-изотропного тела имеют следующий вид:

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_x\\ \sigma_z\\ \tau_{xz}\end{array}\right\} = [D^e]\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\ \varepsilon_z\\ \nu_{xz}\end{array}\right\}.$$

Эти уравнения получены в прямоугольной системе координат x, z в которой ось x направлена вдоль плоскости изотропии. Для такой локальной системы, которая в общем случае повёрнута относительно глобальной системы на угол γ, упругая матрица связи между напряжениями и деформациями $[D_1^e]$, определяется выражением

$$[D^e] = \frac{E_{xx}}{(1+\nu_{xz})\,(1-\nu_{xy}-2n_E\nu_{xz}^2)}\times$$
$$\times\left|\begin{array}{lll} 1-n_E\nu_{xz}^2 & \nu_{xz}\,(1+\nu_{xy}) & 0\\ \nu_{xz}\,(1+\nu_{xy}) & \frac{1-\nu_{xy}^2}{n_E} & 0\\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu_{xy})\left(1-\nu_{xy}-2n_E\nu_{xz}^2\right)}{E_{xx}}G_{xz}\end{array}\right|$$

при $n_E = E_{xx}/E_{zz}$.

Положительное значение угла γ принято для поворота координатной системы x, z к системе X, Z по часовой стрелке. На основании инвариантности потенциальной энергии деформации элемента относительно преобразования координат матрица [D^e] в глобальной системе X, Z определяется через матрицу $[D_1^e]$ следующим выражением [Ухов С. Б., 1975 г.; Zienkiewicz O. C., 1977 г.]:

$$[D^e] = [T]^{-1T}[D_1^e][T] \tag{3}$$

где

$$T = \begin{vmatrix} \cos^2\gamma & \sin^2\gamma & -0,5\sin 2\gamma \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 0,5\sin^2 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\sin 2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} \quad ,$$

а [T]$^{-1}$ определяется инверсией матрицы [T]:

$$[T]^{-1} = \begin{vmatrix} \cos^2\gamma & \sin^2\gamma & 0,5\sin 2\gamma \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & -0,5\sin 2\gamma \\ -\sin 2\gamma & \sin 2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} \quad .$$

При достижении в конечном элементе предельного напряжённого состояния матрица [D] является упругопластической матрицей [D^{ep}] определяемая формулой

$$[D^{ep}] = [D^e] - [D^e]\frac{\{\partial f/\partial\sigma\}\{\partial f/\partial\sigma\}^T[D^e]}{\{\partial f/\partial\sigma\}^T[D^e]\{\partial f/\partial\sigma\}} \quad ,$$

элементы которой в свою очередь зависят от напряжённого состояния, достигнутого за предыдущие шаги нагружения.

Таким образом, физическая матрица [D] для каждого конечного элемента на шаге S известна и принимается постоянной в пределах этого шага; она отвечает напряжённому состоянию элемента в конце предыдущего шага. Согласно выражению (2) определяются матрицы жёсткости всех конечных элементов. Из этих матриц формируется обобщённая матрица жёсткости системы, которая и используется при решении уравнений (1) на шаге S нагружения.

Поскольку на каждом шаге S решается линейная система уравнений, то для упругих элементов приращение напряжения $\{\Delta\sigma_s\}$ пропорционально напряжению $\left\{\sigma_s^0\right\}$, полученному на шаге S от полной расчётной нагрузки $\{F\}$. Коэффициент пропорциональности, называемый ниже нагрузочным параметром, равен отношению искомой нагрузки на шаге S расчётной:

$$\eta_s = \frac{\{\Delta F_s\}}{\{F\}} = \frac{\{\Delta\sigma_s\}}{\{\sigma_s^0\}}. \tag{4}$$

Полное (суммарное) напряжение, соответствующее нагружению за S шагов, определяется суммой напряжения после S-1 шагов и приращения напряжения на шаге S:

$$\{\sigma_s\}^r = \{\sigma_{s-1}\}^r + \{\Delta\sigma_s\}^r. \tag{5}$$

Используя соотношение (4) и (5) совместно с условием текучести [2,4] Кулона-Мора в виде

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 - 4\tau_{xz}^2} + (\sigma_x + \sigma_z)\sin\varphi_\mu - 2c_\mu\cos\varphi_\mu = 0, \tag{6}$$

получаем уравнение для определения нагрузочного параметра $\{\eta_s\}$

$$\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2\eta_s + \alpha_3\eta_s^2} + \alpha_4 + \alpha_5\eta_s - 2c_\mu \cos\varphi_\mu = 0, \tag{7}$$

в котором

$$\alpha_1 = (\sigma_{x,s-1} - \sigma_{z,s-1})^2 + 4\tau_{xz,s-1}^2;$$

$$\alpha_2 = 2\left(\sigma_{x,s-1} - \sigma_{z,s-1}\right)\left(\sigma_{x,s}^0 - \sigma_{z,s}^0\right) + 8\tau_{xz,s-1}\tau_{xz,s-1}^0;$$

$$\alpha_3 = \left(\sigma_{x,s}^0 - \sigma_{z,s}^0\right)^2 + 4\left(\tau_{xz,s}^0\right)^2;$$

$$\alpha_4 = (\sigma_{x,s-1} - \sigma_{z,s-1})\sin\varphi_\mu;$$

$$\alpha_5 = \left(\sigma_{x,s}^0 - \sigma_{z,s}^0\right)\sin\varphi_\mu.$$

Следует отметить, что в расчёт принимается только положительный и наименьший корень квадратного уравнения (7).

Определяя величину η_s для каждого треугольного элемента на шаге S и находя минимальное значение $\eta_{s\min}$из полученного ряда, мы отыскиваем так называемый наиболее нагруженный элемент области, который способен перейти в предельное напряжённое состояние при наименьшем приращении расчётной нагрузки, равной $\eta_{s\min}\{F\}$. Таким образом, в алгоритме реализуется процедура переменных шагов по нагрузке с определением их величины из условия перевода конечного элемента в пластическое состояние.

Структура численного решения смешанной задачи, реализованная в программе расчёта, содержит следующие основные элементы (применительно к шагу S).

1. Для каждого треугольного конечного элемента (ТКЭ) определяется потенциальная площадка предельного равновесия и соответствующие ей характеристики прочности. Используя условие (6) для достигнутых в элементе напряжений $\{\sigma_{s-1}\}'$ после S – 1 шагов, устанавливается (с заданной погрешностью) его состояние – пластическое (предельное) или "упругое" (квазиупругое).

2. Для каждого ТКЭ определяется в глобальных координатах матрица $[D]$, вид которой зависит от напряжённого состояния элемента на момент предыдущего S – 1 шага: для упругих ТКЭ – $[D] = [D^e]$, для пластических ТКЭ – $[D] = [D^{ep}]$.

3. Для всех элементов определяются матрицы жёсткости, из которых формируется обобщённая матрица жёсткости расчётной области $[K_{s-1}]$, соответствующая упругопластическому состоянию области после S – 1 шагов по нагрузке.

4. Решением системы уравнений $[K_{s-1}]\left\{u_s^0\right\} = \{F\}$ определяются узловые смещения $\left\{u_s^0\right\}$ и далее соответствующие этим смещениям деформации $\left\{\varepsilon_s^0\right\}$ и напряжения $\left\{\sigma_s^0\right\}$ поэлементно.

5. Для упругих после S – 1 шагов конечных элементов решается уравнение (7) и определяется из ряда полученных значений η_s' наименьшее. Вводя параметр ограничения a $(1 \le a \le 1,1)$, можно выделить группу элементов, для которых $n_s{}' \le \eta_{s\min}a$.

6. На величину $[(a+1)/2]\eta_{s\min}$ умножаются $\left\{u_s^0\right\}$, $\left\{\varepsilon_s^0\right\}$, $\left\{\sigma_s^0\right\}$ и тем самым определяются значения приращений перемещений $\{\Delta u_s\}$, деформаций $\{\Delta\varepsilon_s\}$, напряжений $\{\Delta\sigma_s\}$ на шаге S. Эти приращения суммируются с соответствующими полными значениями на предыдущем S – 1 шаге и тем самым определяются значения $\sum\eta_s$, $\{u_s\}$, $\{\varepsilon_s\}$, $\{\sigma_s\}$ после S шагов.

7. При выполнении условия $\sum \eta_s = 1$ расчёт заканчивается при этом уточняется согласно п.1 окончательный список пластических элементов.

Изложенный алгоритм реализован в программах на языке фортран. Программы позволяют рассчитывать напряжённо-деформированное состояние упругопластических грунтовых сред в условиях плоской деформации под действием внешних поверхностных и объёмных нагрузок, а также для заданных смещений. При этом может учитываться начальное напряжённое состояние от собственного веса грунта и последовательность (поэтапность) приложения нагрузки. Расчёты могут проводиться для неоднородных (с произвольным очертанием границ однородных зон), трансверсально-изотропных по прочности и деформируемости грунтовых массивов при их различной конфигурации. Появление и развитие областей предельного равновесия грунта фиксируется согласно текучести Кулона – Мора для анизотропной среды. При построении сети конечных элементов, аппроксимирующей расчётную область, используются треугольные элементы.

В качестве исходных параметров анизотропной грунтовой среды для каждого однородного слоя задаются деформационные и прочностные характеристики [5], а также ориентация плоской изотропии. Деформационные характеристики включают пять независимых констант согласно модели трансверсально-изотропной среды, а прочностные характеристики задаются в двух направлениях: вдоль и поперёк плоскости изотропии. Для определения начальных (природных) напряжений от веса грунта вводятся данные о его удельном весе и коэффициенте бокового давления [5] .

Решение системы уравнений МКЭ в разработанных программах осуществляется методом Гаусса, при этом определяются узловые смещения, по которым затем находятся деформации и напряжения. На печать выводятся значения узловых смещений, напряжений, деформаций, а также список элементов, пришедших в пластическое состояние.

Разработанные алгоритмы и программы решения задачи позволяют определять стабилизированное напряжённо-деформированное состояние квазиоднофазных неоднородных, анизотропных массивов произвольной конфигурации с учётом развития в них областей предельного равновесия.

Список литературы

[1] *Амусин Б. З., Фадеев А. Б.* Метод конечных элементов при решении задач горной геомеханики. М.: Недра, 1975. – 144 с.

[2] *Зарецкий Ю. К.* Лекции по современной механике грунтов. Ростов Н/Д, Изд-во Ростов. ун-та, 1989. – 608 с.

[3] *Зенкевич О.С.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. – 538 с.

[4] *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. – 416 с.

[5] *Месчян С. Р.* Механические свойства грунтов и лабораторные методы их определения. М.: Недра, 1974. – 192 с.

[6] *Ухов С. Б., Семёнов В. В.* Расчёт перемещений и напряжений в анизотропных скальных породах методом конечных элементов. – Гидротехническое строительство, 1973, № 2, С. 33 – 38.

[7] *Фадеев А. Б.* Метод конечных элементов в геомеханике. М.: Недра, 1987. – 200 с.