ОДНОСОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЯНГА-МИЛЛСА-ХИГГСА

Ж.Х. Жунусова
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: zhzhkh@mail.ru

Аннотация

Рассмотрено интегрируемое нелинейное дифференциальное уравнение Янга-Миллса-Хиггса в (2+1)-измерений. Для данного уравнения методом преобразования Дарбу получено односолитонное решение в (2+1)-мерном пространстве-времени анти де Ситтера.

Солитонные решения являются важнейшими аспектами многочисленных теории полей как в классической, так и в квантовой физике [1-3].

Понятие интегрируемости позволяет провести полезную классификацию солитонных систем. Солитонные решения этих систем имеют простое поведение при соударении и являются устойчивыми. Используя такие методы, как метод обратной задачи рассеяния, можно в явном виде построить многосолитонные решения нелинейных уравнений [4-5].

Существуют ограниченные примеры нелинейных уравнений интегрируемых систем в (2+1)-измерении, большинство из них являются нерелятивистскими.

В последнее время было показано, что многие хорошо известные интегрируемые уравнения в (1+1)-измерении являются редукциями самодуального уравнения Янга-Миллса. Аналогично, интегрируемые системы в (2+1)-измерении также можно получить из самодуального уравнения Янга-Миллса как его редукции.

Интересно отметить, что в неинтегрируемых системах существуют примеры многомерных солитонов, таких как скирмионы, монополии, вихры и лампы. Такие теории являются релятивистскими и солитоны имеют топологическую природу.

Важнейшим примером многомерной интегрируемой системы является самодуальное уравнение Янга-Миллса. Изучение такой интегрируемой модели в (2+1)-измерении продемонстрировало, что динамика солитона может быть очень нетривиальной в интегрируемых моделях.

В данной работе мы строим солитонное решение интегрируемого релятивистского уравнения Янга-Миллса-Хиггса. Это уравнение обладает монопольными решениями. Хотя уравнение интегрируемое, динамика монополии является очень нетривиальной.

Солитонные решения являются важнейшими аспектами в нелинейной математической физике. Следует отметить, что существует два типа искривленного пространства-времени: пространство де Ситтера с положительной скалярной кривизной и пространство анти де Ситтера с отрицательной скалярной кривизной.

Рассмотрим уравнение Янга-Миллса-Хиггса в (2+1)-мерном пространстве-времени анти де Ситтера. Это уравнение является редукцией уравнения Гаусса-Кодацци-Майнарди в пространстве-времени анти де Ситтера [6-7]. Уравнение Янга-Миллса-Хиггса широко исследовано и известно как интегрируемое. Представление Лакса этого уравнения получено Уордом.

Уравнение Янга-Миллса-Хиггса (УЯМХ) широко исследовано и известно как интегрируемое. Пара Лакса для этого уравнения было найдено Уордом. В настоящей статье мы рассмотрим УЯМХ в (2+1)–мерном пространстве-времени анти де Ситтера.

В тоже время, это уравнение является редукцией уравнения Гаусса-Майнарди-Кодацци в (2+1)-мерном пространстве-времени анти де Ситтера. Здесь мы находим солитонное решение УЯМХ в (2+1)-мерном пространстве-времени анти де Ситтера для простейшей неабелевой группы *SU(2).*

Напомним, что унитарные матрицы образуют группу, которая обозначается через *U(n)* и называется унитарной группой. В группе *U(n)* есть подгруппа *SU(2)* с определителем единица. В случае *2x2* матриц, группа *SU(2)* состоит из матриц вида [6]

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \ |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Пусть M будет трехмерном многообразием Лоренца с метрикой g, A_μ является калибровочным потенциалом, L – скалярное поле Хиггса, последние из которых принимают значения в алгебре Ли группы G. Положим, что G является матричной группой Ли. Обозначим область Ω: {(2+1)-мерное пространство-времени анти де Ситтера, являющееся универсальным пространством вложения гиперболоида $U^2 + V^2 - X^2 - Y^2 = 1$ в $R^{2,2}$ с метрикой $ds^2 = -dU^2 - dV^2 + dX^2 + dY^2$}. Определим новые координаты с помощью формул

$$r = \frac{1}{U+X}, \quad x = \frac{Y}{U+X}, \quad t = \frac{V}{U+X}. \tag{1}$$

Тогда часть (2+1)-мерного пространства-времени анти де Ситтера с $U + X > 0$ представляется координатами Пуанкаре *(r,x,t)* с $r>0$ и метрика в этом случае есть

$$ds^2 = r^{-2}(-dt^2 + dr^2 + dx^2) = r^{-2}(dt^2 + dudv), \tag{2}$$

где $u=x+t$, $v=x-t$. Поля УЯМХ в области Ω удовлетворяют уравнению Янга-Миллса-Хиггса [1]

$$D\Phi = {*F}, \tag{3}$$

которое в терминах координат запишется в виде

$$D_\mu \Phi = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} g_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu\beta} F_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

где $D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + [A_\mu, \Phi]$, $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^{\mu\nu}}$, $\{F_{\mu\nu}\}$ является кривизной, соответствующей $\{A_\mu\}$, $F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$.

Уравнение (4) является интегрируемой системой (в смысле существования для него представления Лакса), если метрика g имеет постоянную кривизну *R=const.* В нашем случае кривизна является отрицательной *R<0.* С помощью координат Пуанкаре (1), уравнение (4) примет вид

$$D_u \Phi = rF_{ur}, \ \ D_v \Phi = -rF_{vr}, \ \ D_r \Phi = -2rF_{uv} \ . \tag{5}$$

Эта система нелинейных дифференциальных уравнений имеет представление Лакса [8]

$$(rD_r + \Phi - 2(\xi - u)D_u)\psi = 0, \qquad (2D_v + \frac{\xi - u}{r}D_r - \frac{\xi - u}{r^2}\Phi)\psi = 0, \tag{6}$$

где $D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A_\mu \psi$ и ξ является комплексным спектральным параметром. Таким образом, (6) является условием интегрируемости выше определенной системы (5).

Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. *Уравнение (6) имеет односолитонное решение в области* Ω *следующего вида*

$$A_u^{(1)} = 0, \quad A_v^{(1)} = -(\partial_v S)S^{-1} = \frac{1}{2r}(\partial_r S) - \frac{1}{2r^2}[\kappa\sigma_3, S], \tag{7a}$$

$$A_r^{(1)} = -\frac{1}{2}(\partial_r S)S^{-1} + \frac{1}{2r}(S\sigma_3 S^{-1} - \sigma_3) = -\frac{1}{2r}(\partial_u S + I), \tag{7b}$$

$$\Phi^{(1)} = -\frac{r}{2}(\partial_r S)S^{-1} + \frac{1}{2}(S\sigma_3 S^{-1} + \sigma_3) = -\partial_u S - I + \kappa\sigma_3, \tag{7c}$$

где

$$S = \frac{\xi_0 - \bar{\xi}_0}{1 + |\sigma|^2}\begin{pmatrix} 1 & \bar{\sigma} \\ \sigma & |\sigma|^2 \end{pmatrix} + \bar{\xi}_0 - u, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$\sigma = \sigma(\tau)$ *- произвольная голоморфная функция,* ξ_0 *- произвольное комплексное число,* κ *- произвольное действительное число, u – скалярная функция. При* κ *=0, решение* $\left(A_u^{(1)}, A_v^{(1)}, A_t^{(1)}, \Phi^{(1)}\right) \in SU(2)$.

Это решение является локализованным решением при $\xi_0 = i,\ \tau = \omega(\xi_0),\ \sigma(\tau) = \tau$, *а след поля Хиггса дается следующей формулой*

$$-tr\left(\Phi^{(1)}\right)^2 = \frac{8r^4 + 32\kappa(x+t)(x^2 - t^2)r^2 + 16\kappa r^2(x+t)}{((r^2 + x^2 - t^2)^2 + 2x^2 + 2t^2 + 1)^2} - 2\kappa^2 \tag{9}$$

Теорема доказывается с помощью метода преобразования Дарбу [8]. Поэтому прежде чем перейти к доказательству теоремы приведем здесь преобразование Дарбу первой степени.

Пусть

$$\psi^{(1)} = (\xi - u)R\psi - T\psi, \tag{10}$$

где $R(u,v,r)$ и $T(u,v,r)$ являются *2x2* матрицами, R – обратимая матрица. Тогда преобразование, соответствующее $\psi \to \psi^{(1)}$, является преобразованием Дарбу первой степени, если существуют $\left(A_\mu^{(1)}, \Phi_\mu^{(1)}\right)$, удовлетворяющие

$$\left(rD_\mu^{(1)} + \Phi^{(1)} - 2(\xi - u)D_u^{(1)}\right)\psi^{(1)} = 0, \qquad (2D_v^{(1)} + \frac{\xi - u}{r}D_r^{(1)} - \frac{\xi - u}{r^2}\Phi^{(1)})\psi^{(1)} = 0, \tag{11}$$

где $D_\mu^{(1)}\psi = \partial_\mu \psi + A_\mu^{(1)}\psi$. В терминах функции ψ, оба уравнения из (11) являются полиномами второй степени от ξ. Коэффициенты второго, первого и нулевого порядков ξ в двух уравнениях из (11) приводят к четырем уравнениям.

Итак,

$$A_r^{(1)} = -\partial_r R R^{-1} + R A_r R^{-1} + \frac{1}{r}\Phi^{(1)} - \frac{1}{r} R\Phi R^{-1}, \tag{12a}$$

$$\Phi^{(1)} = \frac{r}{2}(TA_r - \partial_r T)T^{-1} - \frac{r}{2}(RA_r - \partial_r R)R^{-1} + \frac{1}{2}(T\Phi T^{-1} R\Phi R^{-1}), \tag{12b}$$

$$A_u^{(1)} R = RA_u - \partial_u R, \tag{12c}$$

$$A_v^{(1)} = TA_v T^{-1} - (\partial_v T)T^{-1}. \tag{12d}$$

Пусть

$$Z = \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_0 \end{pmatrix},\ \tau = \omega(\xi_0),\ H = \begin{pmatrix} \alpha(\tau) & \bar{\beta}(\tau) \\ \beta(\tau) & \bar{\alpha}(\tau) \end{pmatrix},\ \sigma(\tau) = \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}, \tag{13}$$

ξ_0 - комплексная постоянная.

Явный вид матрицы S

$$S = \frac{\xi_0 - \bar{\xi}_0}{1 + |\sigma|^2}\begin{pmatrix} 1 & \bar{\sigma} \\ \sigma & |\sigma|^2 \end{pmatrix} + (\bar{\xi}_0 - u)I, \tag{14}$$

$$\partial_u S = \frac{\xi_0 - \bar{\xi}_0}{1 + |\sigma|^2}\begin{pmatrix} -(|\sigma|^2)_u & \bar{\sigma}_u - \bar{\sigma}^2\sigma_u \\ \sigma_u - \bar{\sigma}_u\sigma^2 & (|\sigma|^2)_u \end{pmatrix} - I. \tag{15}$$

Теперь чтобы применить преобразование Дарбу первой степени (10) для нахождения односолитонного решения мы должны взять решение (A_u, A_v, A_r, Φ) нулевым или тривиальным.

Используя (15) получим

$$\Phi^{(1)} = \frac{\xi_0 - \bar{\xi}_0}{(1 + |\sigma|^2)^2}\begin{pmatrix} (|\sigma|^2)_u & \bar{\sigma}^2\sigma_u - \bar{\sigma}_u \\ \bar{\sigma}_u\sigma^2 - \sigma_u & -(|\sigma|^2)_u \end{pmatrix} + \kappa\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Введем параметры

$$\xi_0 = i,\ \sigma(\tau) = \tau,\ \tau = \omega(\xi_0) = v - \frac{r^2}{\xi_0 - u}. \tag{17}$$

Тогда из (17) имеем

$$\tau_u = (v - r^2(\xi_0 - u)^{-1})_u = -\frac{r^2}{(\xi_0 - u)^2}, \tag{18a}$$

$$\bar{\tau}_u = (v - r^2(\bar{\xi}_0 - u)^{-1})_u = -\frac{r^2}{(\bar{\xi}_0 - u)^2}. \tag{18b}$$

Из (16) получим

$$tr(\Phi^{(1)})^2 = \frac{2(\xi_0 - \bar{\xi}_0)^2}{(1 + |\sigma|^2)^4}\{(|\sigma|^2)_u^2 + (\bar{\sigma}^2\sigma_u - \bar{\sigma}_u)(\sigma^2\bar{\sigma}_u - \sigma_u)\} + \frac{4(\xi_0 - \bar{\xi}_0)\kappa}{(1 + |\sigma|^2)^2}(|\sigma|^2)_u + 2\kappa^2. \tag{19}$$

Заметим, что

$$\{(|\sigma|^2)_u^2 + (\bar{\sigma}^2\sigma_u - \bar{\sigma}_u)(\sigma^2\bar{\sigma}_u - \sigma_u)\} = \sigma_u\bar{\sigma}_u(1 + |\sigma|^2)^2,\ (|\sigma|^2)_u = (\sigma\bar{\sigma})_u = \sigma_u\bar{\sigma} + \sigma\bar{\sigma}_u,$$

Тогда

$$tr(\Phi^{(1)})^2 = \frac{2(\xi_0 - \bar{\xi}_0)^2}{(1 + |\sigma|^2)^4}\sigma_u\bar{\sigma}_u(1 + |\sigma|^2)^2 + \frac{4(\xi_0 - \bar{\xi}_0)\kappa}{(1 + |\sigma|^2)^2}(\sigma_u\bar{\sigma} + \sigma\bar{\sigma}_u) + 2\kappa^2.$$

Учитывая (17) и

$$|\sigma|^2=\tau\overline{\tau}=|\tau|^2=v^2+\frac{2uvr^2+r^4}{1+u^2},\ (|\tau|^2)_u=\frac{2u(2uvr^2+r^4)}{(1+u^2)^2},$$

$$\sigma_u\overline{\sigma}_u=\tau_u\overline{\tau}_u=-\frac{r^2}{(i-u)^2}(-\frac{r^2}{(i+u)^2})=\frac{r^4}{(i+u^2)^2}$$

получим

$$tr(\Phi^{(1)})^2=-\frac{8r^4}{((1+v^2)(1+u^2)+2uvr^2+r^4)^2}+\frac{16i\kappa u(2uvr^2+r^4)}{((1+v^2)(1+u^2)+2uvr^2+r^4)^2}+2\kappa^2. \quad (20)$$

Заменим κ на $i\kappa$, где $\kappa\in R$

$$tr(\Phi^{(1)})^2=-\frac{(8r^4+16\kappa u(2uvr^2+r^4))}{((1+v^2)(1+u^2)+2uvr^2+r^4)^2}-2\kappa^2. \quad (21)$$

После некоторых преобразовании имеем

$$-tr(\Phi^{(1)})^2=\frac{8r^4+32\kappa(x+t)(x^2-t^2)r^2+16\kappa r^4(x+t)}{((r^2+x^2-t^2)^2+2x^2+2t^2+1)^2}+2\kappa^2. \quad (22)$$

Отметим, что при $\kappa=0$, решение $(A_u^{(1)},A_v^{(1)},A_r^{(1)},\Phi^{(1)})\in SU(2)$ проверяется определением группы SU(2). Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. - М.: Мир. 1997. -414 с.
2. Косевич А.М. Иванов Б.А. Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. -Киев: Наукова Думка, 1983. -190 с.
3. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. -М.: Наука, 1986. -527 с.
4. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. - М.: Мир, 1987. - 450 с.
5. Мырзакулов Р. Спиновые системы и солитонная геометрия. -Алматы.: Print-S, 2001, -351 с.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. -М.: Наука, 1981. -759 с.
7. Zhunussova Zh.Kh., Myrzakulov R. et. all. On the soliton geometry in multidimensions // Proc. of the Int. Conf. on "Differential geometry and Quantum Physics". -Berlin, 2000. Sfb 288 Preprint N481. -P. 44-49.
8. Ward R S, Asian J. Math. 3, 1999. -325 p.