ЗАДАЧА ТИПА РОБИНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Г.К. Рзаева[1], А.Б. Тунгатаров[2]
[1] *КазНУ им. аль-Фараби* [2] *ЕНУ им. Л. И. Гумилева*

Аннотация

В работе решена задача типа Робина в бесконечной угловой области свободного раствора для одного класса эллиптических систем второго порядка на плоскости с сингулярной точкой.

Пусть $0 < \varphi_1 \le 2\pi$, $G = \left\{z = re^{i\varphi} \ : 0 \le r < \infty, 0 \le \varphi \le \varphi_1\right\}$. В области G рассмотрим уравнение

$$\lambda \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z} \partial z} - \frac{1}{2\bar{z}} \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} + \frac{в(\varphi)}{4r^2} \bar{V} = 0 , \tag{1}$$

где $в(\varphi) \in C[0, \varphi]$, $\lambda > 0$ –действительный параметр,

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \ \partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Уравнение (1) при $\lambda = 0$ описывает бесконечно малое изгибание поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения с общей структурой в точке уплощения [1, 2] исследовано в [3].

Решение уравнения (1) ищем в классе

$$C(G) \cap W_p^2(G), 1 < p < 2 \tag{2}$$

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (1).

Задача С. Требуется найти решение уравнения (1) из класса (2), удовлетворяющее краевым условиям

$$V(r,0) = \beta_1 r^{\alpha}, \ \frac{\partial V}{\partial \varphi}(r,0) = \beta_2 r^{\alpha} , \tag{3}$$

где α, β_1, β_2 –заданные действительные числа.

В работе [4] нами получено многообразие решений уравнения (1) из класса (2) в виде

$$V(r,\varphi) = r^{\alpha}\left(\bar{c}_1 P_{\nu,1}(\varphi) + c_1 P_{\nu,2}(\varphi) + \bar{c}_2 Q_{\nu,1}(\varphi) + c_2 Q_{\nu,2}(\varphi)\right), \tag{4}$$

где c_1, c_2 – произвольные комплексные числа, $\alpha = \frac{1}{2\lambda} + \nu,\ \nu = \frac{\sqrt{1+4\lambda\mu}}{2\lambda}$, $\mu > 0$ – произвольный параметр,

$$P_{\nu,1}(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} J_{\nu,2k-1}(\varphi), \ P_{\nu,2}(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} J_{\nu,2k}(\varphi), \ Q_{\nu,1}(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\nu,2k-1}(\varphi), \ Q_{\nu,2}(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{\nu,2k}(\varphi),$$

$$J_{\nu,k}(\varphi) = \int_0^{\varphi} b(\varphi,\gamma)\overline{J_{0,k-1}(\gamma)}d\gamma, \ I_{\nu,k}(\varphi) = \int_0^{\varphi} b(\varphi,\gamma)\overline{I_{0,k-1}(\gamma)}d\gamma, \ J_{\nu,0}(\varphi) = e^{\frac{i\varphi}{2\lambda}} \cos\nu\varphi,$$

$$I_{\nu,0}(\varphi)=e^{\frac{i\varphi}{2\lambda}}\sin\nu\varphi,\ \ b(\varphi,\gamma)=-\frac{1}{2\lambda}b(\gamma)e^{\frac{i}{2\lambda}(\varphi-\gamma)}\sin\nu(\varphi-\gamma)$$

Из определения функции $P_{\nu,1}(\varphi), P_{\nu,2}(\varphi), Q_{\nu,1}(\varphi), Q_{\nu,2}(\varphi)$ вытекают следующие соотношения

$$P_{\nu,1}(\varphi)=\int_0^{\varphi}b(\varphi,\gamma)\overline{P_{\nu,2}(\gamma)}d\gamma,\ \ P_{\nu,2}(\varphi)=J_{\nu,0}(\varphi)+\int_0^{\varphi}b(\varphi,\gamma)\overline{P_{\nu,2}(\gamma)}d\gamma,$$

$$Q_{\nu,1}(\varphi)=\int_0^{\varphi}b(\varphi,\gamma)\overline{Q_{\nu,2}(\gamma)}d\gamma,\ \ Q_{\nu,2}(\varphi)=I_{\nu,0}(\varphi)+\int_0^{\varphi}b(\varphi,\gamma)\overline{Q_{\nu,1}(\gamma)}d\gamma,$$

$$P'_{\nu,1}(\varphi)=\frac{i}{2\lambda}P_{\nu,1}(\varphi)-\frac{1}{\lambda}\int_0^{\varphi}b(\gamma)e^{\frac{i}{2\lambda}(\varphi-\gamma)}\cos\nu(\varphi-\gamma)\overline{P_{\nu,2}(\gamma)}d\gamma,$$

$$P'_{\nu,2}(\varphi)=\frac{i}{2\lambda}P_{\nu,2}(\varphi)-\nu I_{\nu,0}(\varphi)-\frac{1}{\lambda}\int_0^{\varphi}b(\gamma)e^{\frac{i}{2\lambda}(\varphi-\gamma)}\cos\nu(\varphi-\gamma)\overline{P_{\nu,1}(\gamma)}d\gamma,$$

$$Q'_{\nu,1}(\varphi)=\frac{i}{2\lambda}Q_{\nu,1}(\varphi)-\frac{1}{\lambda}\int_0^{\varphi}b(\gamma)e^{\frac{i}{2\lambda}(\varphi-\gamma)}\cos\nu(\varphi-\gamma)\overline{Q_{\nu,2}(\gamma)}d\gamma,$$

$$Q'_{\nu,2}(\varphi)=\frac{i}{2\lambda}Q_{\nu,2}(\varphi)-\nu J_{\nu,0}(\varphi)-\frac{1}{\lambda}\int_0^{\varphi}b(\gamma)e^{\frac{i}{2\lambda}(\varphi-\gamma)}\cos\nu(\varphi-\gamma)\overline{Q_{\nu,1}(\gamma)}d\gamma,$$

Отсюда следует

$$P_{\nu,1}(0)=0, P_{\nu,2}(0)=1, Q_{\nu,1}(0)=0, Q_{\nu,2}(0)=0,$$

$$P'_{\nu,1}(0)=0, P'_{\nu,2}(0)=\frac{i}{2\lambda}, Q'_{\nu,1}(0)=0, Q'_{\nu,2}(0)=\nu\,. \qquad (5)$$

Подставив (4) в (3), с учетом (5) получаем

$$c_1=\beta_1,\ \ \frac{i}{2\lambda}c_1+\nu\,c_2=\beta_2\,. \qquad (6)$$

Таким образом, имеет место

$$V(r,\varphi)=r^{\alpha}\left(\beta_1P_{\nu,1}(\varphi)+\beta_1P_{\nu,2}(\varphi)+\left(\beta_2+\frac{i\beta_1}{2\lambda}\right)\frac{1}{\nu}Q_{\nu,1}(\varphi)+\left(\beta_2-\frac{i\beta_1}{2\lambda}\right)\frac{1}{\nu}Q_{\nu,2}(\varphi)\right). \qquad (7)$$

Следовательно, справедлива

Теорема. Задача С имеет единственное решение, которое определяется по формуле (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Усманов З. Д. Бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения. // Differential Geometry. Banach Center Publications.- Warsaw. 1984. V.12-6.
2. Усманов З. Д. Изометрически сопряженная параметризация поверхностей в окрестности точки уплощения. // Докл. Расширенных заседаний семинара Института прикладной математики им. И. Н. Векуа. Тбилиси. 1985., Т.1., №1.
3. Абдыманопов С. А., Тунгатаров А.Б.Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами. - Алматы: Ғылым, 2005. – 169 с.
4. Тунгатаров А.Б., Рзаева Г.К. О непрерывных решениях одного класса эллиптических систем второго порядка в угле произвольного раствора с полярной особенностью // Вестник КазНУ им Аль-Фараби, сер. мат., мех., инф. 2005., №2 (45). – С. 12-15;