ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ СИСТЕМЫ ЛИЗОРКИНА В ТЕОРИИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Н.Т. Тлеуханова[1], К Шаукенова[2].
[1]*Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева*
[2]*Карагандинский государственный университет имени Е.А.Букетова*
e-mai: tleukhanova@rambler.ru

Аннотация

В настоящей работе с помощью применения системы П.И.Лизоркина даны оценки погрешности квадратурных формул с равноотстоящими узлами для элементов класса Коробова и Бесова.

Лизоркиным П.И. в работе [1] была введена ортогональная система функций, построенная на базе тригонометрический системы $\{e^{2\pi ikx}\}_{k=0}^{\infty}$. Основным достоинством данной системы функций является то, что она образует безусловный базис в пространстве Бесова B_{pq}^{α}, состоит из непрерывных функций и в то же время, имеет свойства системы Хаара.

В данной работе мы хотим показать пример применения системы Лизоркина для оценки погрешности квадратурных формул с равностоящими узлами для классов Бесова ([2]) и классов типа Коробова ([3]) по блочной системе.

Пусть $\{e^{2\pi ikx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ тригонометрическая система. Определим систему Лизоркина, $E=\{E_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Пусть

$$n=2^{m-1}+s, s=0,\dots,2^{m-1}-1,$$

$$E_0(x)=1, E_1(x)=e^{2\pi ix},\quad E_n(x)=E^{(s)_+}_{2^{m-1}-1}(x),\quad E_{-n}(x)=E^{(s)_-}_{2^{m-1}-1}(x),$$

где $E^{(s)_+}_{2^{m-1}-1}(x)=E^{+}_{2^{m-1}-1}(x-t^{(s)}_{2^{m-1}-1}), t_n^s=\frac{2s+1}{n+1}2\pi$

$$E^{\pm}_{2^{m-1}-1}(x)=\frac{1}{2^{m-2}}\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1}e^{\pm 2\pi iku}, u=(x-\frac{2s+1}{2^{m-1}2\pi}).$$

Лемма 1. Пусть $k\in N$ и имеет вид $k=2^{\nu+1}+s,$ где $0\le s<2^{\nu-1}, m\in N.$ Тогда

$$|d_k|=\left|\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{2^m-1}E^{(s)\pm}_{2^{\nu-1}-1}(\frac{r}{2^m})\right|\le\begin{cases}0 & при \quad k<2^m;\\ \frac{1}{2^m} & при \quad k\ge 2^m.\end{cases}$$

Доказательство

$$|d_k|=\left|\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{2^m-1}\frac{1}{2^{\nu-1}}\sum_{l=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1}e^{\pm 2\pi il(\frac{r}{2^m}-\frac{2s+1}{2^{\nu}})}\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2^{m+\nu-1}}\sum_{l=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} e^{\mp 2\pi i l\frac{2s+1}{2^{\nu}}}\sum_{r=0}^{2^m-1} e^{\pm 2\pi i l\frac{r}{2^m}}\right|.$$

Известно, что

$$\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{2^m-1} e^{\pm 2\pi i l\frac{r}{2^m}}=\begin{cases} 0 & \text{при } l\neq 2^m q, q\in \mathrm{Z};\\ \frac{1}{2^m} & \text{при } l=2^m q.\end{cases}$$

Пусть теперь $\nu<m$, тогда $l<2^{m-1}$ и число l не кратно 2^m. Тогда $d_k=0$ при $k<2^m$.

Пусть $\nu\geq m+1$. Тогда $2^{\nu-1}\leq l<2^{\nu}$. В этом промежутке чисел l, кратных 2^m равно $2^{\nu-1-m}$.

Тогда при $k\geq 2^m$ имеем

$$|d_k|\leq \frac{1}{2^{m+\nu-1}}\sum_{l=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1}\left|\sum_{r=0}^{2^m-1} e^{\pm 2\pi i l\frac{r}{2^m}}\right|\leq \frac{1}{2^{m+\nu-1}}\cdot 2^{\nu-m-1}\cdot 2^m=\frac{1}{2^m}.$$

Лемма доказана.

Определение 1. Пусть $f\in L_1[0,1]$ с рядом Фурье по системе $E=\{E_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $f\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Gamma(k)E_k(x), \alpha>0.$

Будем говорить, что f *принадлежит классу Коробова по системе Лизоркина* E*, если* $\sup_{r\in \mathrm{Z}}\bar{r}^{\alpha}|\Gamma(r)|<\infty,$ *где* $\bar{r}=\max(|r|,1).$

Класс таких функций обозначим через $\tilde{E}^{\alpha}[0,1].$

Норму в этих пространствах введем следующим образом

$$\|f\|_{\tilde{E}^{\alpha}[0,1]}=\sup_{r\in Z_+}\bar{r}^{\alpha}|\Gamma(r)|$$

здесь $\{\Gamma(r)\}$ последовательность коэффициентов Фурье по системе Лизоркина. Связь этой последовательности с последовательностью тригонометрических коэффициентов Фурье определяется через формулу:

$$\Gamma_{2^{m-1}+s}=\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} C_k e^{2\pi i k\frac{2s+1}{2^{m-1}}}$$

Лемма 2. Если $\alpha>1$ и $f\in\tilde{E}^{\alpha}[0,1]$, то ряд Фурье функции f по системе $\{E_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ сходится абсолютно.

Доказательство.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\Gamma(k)|\le \sup_{k\in Z}|\Gamma(k)|\,\bar{k}^{\alpha}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\bar{k}^{\alpha}}=c\|f\|_{\tilde{E}^{\alpha}}$$

Оценим погрешность квадратурной формулы с равностоящими узлами для класса Коробова.

Теорема 1. Пусть $\alpha>1$ и $f\in\tilde{E}^{\alpha}[0,1]$. Тогда

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{2^m-1}f\left(\frac{r}{2^m}\right)\right|\le\frac{c}{2^{m\alpha}}\inf_{P\in G_{2^m}}\|f-P\|_{\tilde{E}^{\alpha}},$$

где G_{2^m} - множество полиномов по системе E порядка не выше 2^m.

Доказательство. и . Не уменьшая общности можно считать . Так как ряд Фурье функции сходится абсолютно (см. лемму 2), следующие операции имеют смысл.

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{2^m-1}f\left(\frac{r}{2^m}\right)\right|=\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{2^m-1}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma(k)E_k\left(\frac{r}{2^m}\right)\right|=$$

$$=\left|\int_0^1 f(x)dx-\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma(k)\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{2^m-1}E_k\left(\frac{r}{2^m}\right)\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma(k)d_k\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2^m}\sum_{k=2^m}^{\infty}|\Gamma(k)|\le\frac{1}{2^m}\|f\|_{\tilde{E}^{\alpha}}\sum_{k=2^m}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}\le$$

$$\le\frac{c}{2^m}2^{m(1-\alpha)}\|f\|_{\tilde{E}^{\alpha}}=\frac{c}{2^m\alpha}\|f\|_{\tilde{E}^{\alpha}}. \qquad (1)$$

Пусть P_i - произвольный полином из системы G_{2^m}. Из леммы 1 нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{2^m-1}P_{2^m}\left(\frac{r}{2^m}\right)=C_0=\int_0^1 P_{2^m}(x)dx.$$

Тогда

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{2^m-1}f\left(\frac{r}{2^m}\right)-\int_0^1 P_{2^m}(x)dx+\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{2^m-1}P_{2^m}\left(\frac{r}{2^m}\right)\right|=$$

$$=\left|\int_0^1(f(x)-P_{2^m}(x))dx-\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{2^m-1}\left(f\left(\frac{r}{2^m}\right)-P_{2^m}\left(\frac{r}{2^m}\right)\right)\right|=$$

$$=\left|\int_0^1(f-P_{2^m})(x)dx-\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{2^m-1}(f-P_{2^m})\left(\frac{r}{2^m}\right)\right|\le\frac{c}{2^m\alpha}\|f-P_{2^m}\|_{\tilde{E}^{\alpha}}.$$

В последнем неравенстве применили соотношение (1).

В силу произвольности выбора P_{2^m} теорема доказана.

Теперь покажем оценки погрешности квадратуры для классов Бесова.

Пусть $1 < p < \infty, 0 < \theta \le \infty, \alpha > 0$ Введем пространство $B^{\alpha}_{p\theta}([0,1])$, как множество тригонометрических рядов (не обязательно сходящихся)

$$f(x) = \sum_{k \in Z} a_k e^{2\pi i k x},$$

для которых конечна величина

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p\theta}([0,1])} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k \theta} \|\delta_k(f)\|^{\theta}_{L_p} \right)^{1/\theta}, \text{ при } 0 < \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p\infty}([0,1])} = \sup_{k \in N} 2^{rk} \|\delta_k(f)\|_{L_p}, \text{при} \quad \theta = \infty,$$

где

$$\delta_k(f) = \sum_{2^{k-1} \le |m| < 2^k} a_m e^{2\pi i m x},$$

$\{a_k\}$ - последовательность коэффициентов Фурье функции f по тригонометрической системе.

Теорема 2. *(Лизоркин П.И., стр.96) Для того чтобы ряд* $f = \sum_{k \in Z} \Gamma_k E_k(x)$ *принадлежал пространству* $B^r_{p\theta}(E)$, $r \in R, 1 < p < \infty, 1 \le \theta \le \infty$ *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты* Γ_k *удовлетворяли условию*

$$\beta^r_{p,\theta} = \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} 2^{2\pi i k \left(r - \frac{1}{p} \right) \theta} \left(\sum_{2^{k-1} \le |m| < 2^k} |\Gamma_m| \right)^{\frac{\theta}{p}} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

когда *и*

$$\beta^r_{p,\theta} = \sup_{k \ge 1} 2^{2\pi i k \left(r - \frac{1}{p} \right) \theta} \left(\sum_{2^{k-1} \le |m| < 2^k} |\Gamma_m| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

когда $\theta = \infty$

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p < \infty, 0 < q < \infty, \alpha \ge 1$ *и* $f \in B^{\alpha}_{pq}[0,1]$. *Тогда*

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2^m} \sum_{r=0}^{2^m - 1} f\left(\frac{r}{2^m}\right) \right| \le \frac{c}{2^{m\alpha}} E_{2^m - 1}(f)_{B^{\alpha}_{p\theta}}$$

где $E_{2^m-1}(f)_{B^{\alpha}_{p\theta}}$ *- наилучшее приближение функций тригонометрическими полиномами порядка* 2^m-1 *в пространстве* $B^{\alpha}_{p\theta}$.

Доказательство. Так как $\alpha \geq 1$ ряд Фурье функции сходится абсолютно. Как и в доказательстве теоремы 1, воспользуемся леммой 1.

$$\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{2^m-1} f\left(\frac{r}{2^m}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma(k)d_k\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^m}\sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{r=2^{k-1}}^{2^k-1}|\Gamma(r)| \leq \frac{1}{2^m}\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\sum_{r=2^{k-1}}^{2^k-1}|\Gamma(r)|^p\right)^{1/p} 2^{\frac{k}{p'}}2^{\alpha k}2^{-\alpha k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^m}\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\left[2^{k(\alpha-\frac{1}{p})}\left(\sum_{r=2^{k-1}}^{2^k-1}|\Gamma(r)|^p\right)^{1/p}\right]^{\theta}\right)^{1/\theta}\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}2^{(1-\alpha)k\theta}\right)^{1/\theta} \leq$$

$$\leq \frac{c}{2^{\alpha m}}\left\|f - S_{2^m}(f)\right\|_{B^{\alpha}_{p\theta}}.$$

В последнем соотношении воспользовались теоремой Лизоркина. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лизоркин П.И. О базисах и мультипликаторах в пространствах $B^r_{p\theta}(T)$ // Труды математического института АН СССР.-1977.-Т.143.-С.88-104.
2. Бесов О.В.,Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.-Москва: Наука.-1975.-480с.
3. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе.-Москва: Физматгиз. - 1963.-240с.