КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Д. Аманов, Э.Р. Скоробогатова
Институт матем. и информ. технологий АНРУз. г. Ташкент, Узбекистан.
e-mail: damanov@yandex.ru

1 Введение

Краевые задачи для уравнения четвертого порядка изучены в работах[1-6]. В монографии [2] приведена наиболее полная библиография по уравнениям четвертого порядка.

В настоящей работе для уравнения четвертого порядка

$$Lu \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) u = f(x,t) \qquad (1)$$

в области $\Omega = \{(x,t):\ 0 < x < P,\ 0 < t < T\}$ ставятся и исследуются три краевые задачи.

Отметим, что краевые задачи для уравнения (1) исследуются впервые нами.

2 Постановка задач

Задача 1. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1) удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=0} = u|_{x=P} = 0,\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=P} = 0,\ 0 \le t \le T, \qquad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = u_t|_{t=T} = 0,\ 0 \le x \le P. \qquad (3)$$

Задача 2. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1) удовлетворяющее условиям (3) и

$$u|_{x=0} = u|_{x=P} = 0,\ u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=P} = 0,\ 0 \le t \le T. \qquad (4)$$

Задача 3. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1) удовлетворяющее условиям (3) и

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=P} = 0,\ u_{xxx}|_{x=0} = u_{xxx}|_{x=P} = 0,\ 0 \le t \le T. \qquad (5)$$

Определение. Функцию $u(x,t) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^{4,3}_{x,t}(\Omega)$ назовем регулярным решением задачи 1, если она в Ω удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3).

3 Априорная оценка

Справедлива следующая

Лемма. *Пусть $u(x,t)$ регулярное решение уравнения (1) и $u \in C^4(\overline{\Omega})$. Тогда существует постоянное число $C > 0$ зависящее от области Ω и независящее от функции $u(x,t)$ такое, что любое регулярное решение задачи 1, принадлежащее классу $C^4(\overline{\Omega})$ удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \le C \|Lu\|_{L_2(\Omega)}. \qquad (6)$$

Доказательство. Умножая обе части равенства

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = Lu \qquad (7)$$

на функцию $u_t(x,t)$, учитывая условия (2), (3) и интегрируя по области Ω, получаем

$$\|u_{tt}\|^2_{L_2(\Omega)} \le \iint_\Omega u_t \cdot Lu dxdt\,. \qquad (8)$$

Далее, используя неравенство

$$u_t^2(x,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau} u_\tau^2(x,\tau) d\tau \le 2\int_0^T |u_t \cdot u_{tt}| dt$$

и (8) находим

$$\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} \le 4T^2 \iint_\Omega u_t \cdot Lu dxdt\,.$$

Складывая это неравенство с (8) и применяя к правой части полученного неравенства известное неравенство

$$|ab| \le \frac{1}{2}\left(\varepsilon|a|^2 + \frac{1}{\varepsilon}|b|^2\right),\ \varepsilon > 0 \qquad (9)$$

и выбирая $\varepsilon = \dfrac{1}{4T^2+1}$, находим

$$\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_{tt}\|^2_{L_2(\Omega)} \le \left(4T^2+1\right)^2 \|Lu\|^2_{L_2(\Omega)} \qquad (10)$$

Умножая обе части (7) на $u(x,t)$, интегрируя это равенство по области $\{0 \le \tau \le t,\ 0 \le x \le P\}$ после несложных преобразований, получаем

$$T\|u_{xx}\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} \le T\iint_\Omega |u \cdot Lu| dxdt\,. \qquad (11)$$

Используя неравенство

$$u^2(x,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}\left[u^2(x,\tau)\right] d\tau \le 2\int_0^T |u \cdot u_t| dt$$

легко получаем

$$\|u\|^2_{L_2[\Omega]} \le 4T^3 \int_0^T\int_0^P |u \cdot Lu| dxdt\,. \qquad (12)$$

Складывая (11) и (12), используя (9) и (10), выбирая $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{T\left(4T^2+1\right)}$ имеем

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_{tt}\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_{xx}\|^2_{L_2(\Omega)} \le C_1^2 \|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}. \qquad (13)$$

Нормы $\|u_x\|_{L_2(\Omega)}$, $\|u_{xt}\|_{L_2(\Omega)}$ легко оцениваются через $\|u\|_{L_2(\Omega)}$, $\|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)}$, $\|u_{tt}\|_{L_2(\Omega)}$, которые в свою очередь оцениваются через $\|Lu\|_{L_2(\Omega)}$. Учитывая эти значения и (13) устанавливаем (6).

Следствие. Из (6) следует единственность и непрерывная зависимость решения от $f(x,t)$.

4. Регулярная разрешимость задачи 1.

Теорема. *Если* $f(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $f_x(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $f_{xx}(x,t) \in L_2(\Omega)$ *и* $f(0,t) = f(P,t) = 0$, $f_x(0,t) = f_x(P,t) = 0$, *то регулярное решение задачи 1 существует.*

Доказательство. Применяя метод разделения переменных получаем формальное решение задачи 1 в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)X_n(x), \tag{14}$$

где

$$X_n(x)=\frac{1}{a_n}\left[(sh\lambda_n P-\sin\lambda_n P)(ch\lambda_n x-\cos\lambda_n x)-(ch\lambda_n P-\cos\lambda_n P)(sh\lambda_n x-\sin\lambda_n x)\right],$$

$$a_n=\left(\int_0^P\left[(sh\lambda_n P-\sin\lambda_n P)(ch\lambda_n x-\cos\lambda_n x)-(ch\lambda_n P-\cos\lambda_n P)(sh\lambda_n x-\sin\lambda_n x)\right]^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

λ_n – корни уравнения $ch\lambda_n P\cdot\cos\lambda_n P=1$,

$$u_n(t)=-2\cdot\frac{\exp\left(\lambda_n^{4/3}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n^{4/3}T-\frac{2\pi}{3}\right)+\exp\left[\frac{1}{2}\lambda_n^{4/3}(3T-t)\right]\cdot\cos\left(\sqrt{3}\frac{\lambda_n^{4/3}}{2}t-\frac{\pi}{3}\right)}{3\lambda_n^{8/3}\cdot\exp\left(\frac{3}{2}\lambda_n^{4/3}T\right)P_n(t)}\times$$

$$\times\int_0^T f_n(\tau)\exp\left(-\lambda_n^{4/3}\tau\right)d\tau+$$

$$+\frac{\exp\left[\frac{1}{2}\lambda_n^{4/3}(T+2t)\right]-2\exp\left[\frac{1}{2}\lambda_n^{4/3}(T-t)\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n^{4/3}t-\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{3}{2}\lambda_n^{8/3}\exp\left(\frac{3}{2}\lambda_n^{4/3}T\right)P_n(t)}\times$$

$$\times\int_0^T f_n(\tau)\exp\left[-\frac{1}{2}\lambda_n^{4/3}(T-\tau)\right]\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n^{4/3}(T-\tau)-\frac{2\pi}{3}\right)d\tau+\frac{1}{3\lambda_n^{8/3}}\cdot\int_t^T f_n(\tau)\exp\left[-\lambda_n^{4/3}(\tau-t)\right]d\tau+$$

$$+\frac{1}{\frac{3}{2}\lambda_n^{8/3}}\cdot\int_0^t f_n(\tau)\exp\left[-\frac{1}{2}\lambda_n^{4/3}(t-\tau)\right]\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n^{4/3}(t-\tau)-\frac{\pi}{3}\right)d\tau,$$

$$P_n(t)=1+2\exp\left[-\frac{3}{2}\lambda_n^{4/3}T\right]\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n^{4/3}T-\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$f_n(\tau)=\int_0^P f(\xi,\tau)X_n(\xi)d\xi.$$

Нам необходимо доказать сходимость рядов (14) и

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4u_n(t)X_n(x), \tag{15}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'''(t)X_n(x), \tag{16}$$

Если мы покажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (15), то из уравнения (1) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (16), а также абсолютная и равномерная сходимость ряда (14).

Чтобы доказать абсолютную и равномерную сходимость ряда (15), предварительно оценим $|u_n(t)|$:

$$\left|u_n(t)\right| \le \frac{\frac{4}{3}\left|\int\limits_0^T f_n(\tau)\exp\left[-\lambda_n^{4/3}\tau\right]d\tau\right|}{\lambda_n^{8/3}\exp\left[\frac{1}{2}\lambda_n^{4/3}T\right]\delta}+$$

$$+\frac{\frac{2}{3}\left|\int\limits_0^T f_n(\tau)\exp\left[-\frac{1}{2}\lambda_n^{4/3}(T-\tau)\right]\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n^{4/3}(T-\tau)-\frac{2\pi}{3}\right)d\tau\right|\left(\exp\left[\frac{3}{2}\lambda_n^{4/3}T\right]-2\right)}{\lambda_n^{8/3}\exp\left[\frac{3}{2}\lambda_n^{4/3}T\right]\cdot\delta}+$$

$$+\frac{1}{3\lambda_n^{8/3}}\cdot\int\limits_t^T\left|f_n(\tau)\right|\cdot\exp\left[-\lambda_n^{4/3}(\tau-t)\right]d\tau+$$

$$+\frac{2}{3\lambda_n^{8/3}}\cdot\int\limits_0^t\left|f_n(\tau)\right|\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\lambda_n^{4/3}(t-\tau)\right]\cdot\left|\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n^{4/3}(t-\tau)-\frac{\pi}{3}\right)\right|d\tau$$

Используя неравенство Коши-Буняковского имеем

$$\left|u_n\right| \le \frac{C\left\|f_n\right\|}{\lambda_n^{10/3}}. \tag{17}$$

Интегрированием по частям получаем

$$f_n(t)=\frac{1}{\lambda_n^2}\overline{f_n}(t), \tag{18}$$

где

$$\overline{f_n}(t)=\frac{1}{a_n}\int\limits_0^P\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[\left(sh\lambda_n p-\sin\lambda_n p\right)\left(ch\lambda_n x+\cos\lambda_n x\right)-$$
$$-\left(ch\lambda_n p-\cos\lambda_n p\right)\left(sh\lambda_n x+\sin\lambda_n x\right)]dx$$

Теперь покажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (15). Для ряда (15) мажорирующий ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4\left|u_n(t)\right| \tag{19}$$

Используя (17), (18) ряд (19) можно представить в виде

$$C\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4\frac{\left\|\overline{f_n}\right\|_{L_2(\Omega)}}{\lambda_n^2\cdot\lambda_n^{10/3}}=C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^{4/3}}\cdot\left\|\overline{f_n}\right\|_{L_2(\Omega)}\le C_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^{4/3}}<\infty,\ \text{т. к.}\ \left\|\overline{f_n}\right\|_{L_2(\Omega)}\le C_0,\ C_1=C\cdot C_0.$$

Теорема доказана.

Исследование задач 2, 3 проводится аналогичным образом.
Решения задач 2, 3 даются формулой (14), причем в случае задачи 2

$$X_n=\sqrt{\frac{2}{P}}\sin\frac{n\pi}{P}x,\ n=1,2,...,$$

а в случае задачи 3

$$X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{P}}, \ X_0(x) = \sqrt{\frac{2}{P}} \cos \frac{n\pi}{P} x$$

и суммирование производится по $n = 0, 1, \dots$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов М. М. Модельное уравнение смешанного типа четвертого порядка.- Ленинград. : Изд-во ЛГУ, 1972.-123с.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. - Ташкент.: Фан. 2000.-144с.
3. Салахитдинов М. С. Аманов Д.Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка. // Узб.мат. журнал – Ташкент, 2005. N3 с.72-77.
4. Аманов Д. Юлдашева А. В. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка. // Узб. Мат. журнал.-Ташкент, 2007., N4, с. 3-8.
5. Отарова Ж. А. Разрешимость и спектральные свойства кравевых задач для уравнений смешанного типа четвертого порядка. // Автореф. дисс…. Канд. физ.-мат. наук. – Ташкент: Национальный университет Узбекистана, 2009. с. 18.
6. Салахитдинов М. С. Аманов Д. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженных задач для уравнений четвертого порядка. // Совр. Пробл. Мат. физ. и информ. технол. : Труды международной конф. 18-24 апреля 2005. – Ташкент, Т. 1. с. 151-155.