НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.К. Кыдыралиев[1], А.Б. Урдалетова[2]
[1] *Американский Университет в Центральной Азии, Бишкек, Кыргызская Республика*
e-mail: syrgak@mail.auca.kg
[2] *Кыргызско-Турецкий Университет «Манас», Бишкек, Кыргызская Республика*
e-mail: aurdaletova@rambler.ru

Жили, были два великих ученых Леонард Эйлер (1707 - 1783) и Жан Лерон Даламбер (1717 - 1783). Оба отличались великим умом и наблюдательностью, сделали множество открытий, и написали большое количество научных трудов, над которыми нынче корпят студенты всех стран мира.

Однажды, один из них придумал метод решения систем линейных дифференциальных уравнений. Услышав об этом, другой сказал: «Подумаешь. Я могу придумать не хуже». И придумал.

Возможно, дело обстояло несколько иначе, и дело в том, что почта тогда была не ахти, а *e-mail* тогда еще не изобрели. Но как бы там не было, но с тех пор бедным студентам приходится изучать 2 метода: метод Эйлера, основанный на использовании собственных чисел матрицы коэффициентов системы и метод интегрируемых комбинаций Даламбера.

Но жизнь не стоит на месте. Неумолимый научно-технический прогресс все увеличивает и увеличивает объем информации, который должен быть усвоен. И как результат, все чаще и чаще приходится сталкиваться с катастрофической нехваткой времени и необходимостью выбора только одного метода. Можно по-разному решать возникшую дилемму, но на наш взгляд, лучший выход из этой ситуации – объединить методы. К счастью, потенциал заложенный в исходных составляющих настолько велик, что возникает эффект синергии: объединенный метод проще, чем исходные.

Описанию этого метода посвящено наше дальнейшее изложение.

Будут рассмотрены только линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, но следует отметить, что распространение результатов на более высокие порядки не представляет особых сложностей.

Линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, это система вида

$$\begin{cases} y' = ay + bz + f(x), \\ z' = cy + dz + g(x), \end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты a, b, c, d – постоянные числа, а f и g – функции.

Характеристическое уравнение системы (1) это уравнение

$$\Delta(\lambda) = 0, \tag{2}$$

где функция $\Delta(\lambda)$ определяется коэффициентами системы (1) следующим образом:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - c\cdot b.$$

Корни уравнения (2) называются характеристическими числами системы (1).

Пусть p и q характеристические числа системы. Тогда, для того чтобы решить систему вычтем функцию py от левой и правой частей 1-го уравнения системы (1) и pz от обеих частей 2-го уравнения:

$$\begin{cases} y' - py = (a-p)y + bz + f(x), \\ z' - py = cy + (d-p)z + g(x). \end{cases} \tag{3}$$

Так как число p является характеристическим, определитель $\begin{vmatrix} a-p & b \\ c & d-p \end{vmatrix}$ равен нулю, а это значит, что строчки определителя пропорциональны. Пусть коэффициент пропорциональности равен k.

Свернем левые части уравнений, умножим 2-ое уравнение на k

$$\begin{cases} (ye^{-px})'e^{px} = (a-p)y + bz + f(x), \\ k(ze^{-px})'e^{px} = kcy + k(d-p)z + kg(x), \end{cases}$$

и вычтем второе уравнение из первого.

Тогда

$$[(y-kz)e^{-px}]'e^{px} = f(x) - kg(x). \tag{4}$$

Проинтегрировав уравнение (4), получим

$$y - kz = \{\int [f(x) - kg(x)]e^{-px}dx + C_1\}e^{px}. \tag{5}$$

Повторим процедуру, взяв q вместо p, и получим

$$y - mz = \{\int [f(x) - mg(x))]e^{-qx}dx + C_2\}e^{qx}. \tag{6}$$

Рассмотрим равенства (5) и (6) как систему относительно неизвестных y и z, и решив ее получим решение системы (1).

Пример 1

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} y' = z + 9e^{-x}, \\ z' = 2y + z. \end{cases} \tag{7}$$

Характеристические числа системы $(-1;\ 2)$ получим из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

1) Воспользовавшись первым из них, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} y' - (\ -1)y = -(\ -1)y + z + 9e^{-x}, \\ z' - (\ -1)z = 2y + z - (\ -1)z, \end{cases}$$

свернем левые части

$$\begin{cases} (ye^{x})'e^{-x} = y + z + 9e^{-x}, \\ (ze^{x})'e^{-x} = 2y + 2z, \end{cases}$$

и отняв от удвоенного 1-го уравнения 2-ое, получим

$$[(2y - z)e^{x}]'e^{-x} = 18e^{-x}\ .$$

Проинтегрируем и получим $2y - z = (18x + C_1)e^{-x}$.

2) Повторим процедуру, взяв второе характеристическое число:

$$\begin{cases} y' - 2y = -2y + z + 9e^{-x}, \\ z' - 2z = 2y + z - 2z, \end{cases}$$

затем

$$\begin{cases} (ye^{-2x})'e^{2x} = -2y + z + 9e^{-x}, \\ (ze^{-2x})'e^{2x} = 2y - z. \end{cases}$$

Прибавим к 1-му уравнению 2-ое

$$[(y + z)e^{-2x}]'e^{2x} = 9e^{-x},$$

и проинтегрировав, получим

$$y + z = (-3e^{-3x} + C_2)e^{2x}.$$

Для того чтобы найти y и z решим систему

$$\begin{cases} 2y - z = (18x + C_1)e^{-x}, \\ y + z = -3e^{-x} + C_2e^{2x}, \end{cases}$$

и получим, что решение системы (7) есть пара функций

$$\begin{cases} y = (6x - 1 + A_1)e^{-x} + A_2 e^{2x}, \\ z = (-2 - 6x - A_1)e^{-x} + 2A_2 e^{2x}. \end{cases}$$

Нам удалось получить 2 интегрируемые комбинации $2y - z$ и $y + z$ потому что имелись два различных характеристических числа.

А что делать в том случае, когда характеристическое уравнение имеет только один кратный корень?

Наш метод позволяет получить решение системы (1) и в этой ситуации. Покажем это.

Характеристическое уравнение системы (1) $\Delta(\lambda) = 0$ имеет только один корень, если $\Delta(\lambda) = (a - \lambda)(d - \lambda) - c \cdot b = (r - \lambda)^2$, где r есть значение характеристического числа. Раскрыв скобки и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим, что $r = (a + d)/2$.

Следовательно, мы можем переписать систему (1) в виде:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{a+d}{2} y = (a - \dfrac{a+d}{2}) y + bz + f(x), \\ z' - \dfrac{a+d}{2} z = cy + (d - \dfrac{a+d}{2}) z + g(x), \end{cases}$$

и затем

$$\begin{cases} y' - \dfrac{a+d}{2} y = \dfrac{a-d}{2} y + bz + f(x), \\ z' - \dfrac{a+d}{2} z = cy - \dfrac{a-d}{2} z + g(x). \end{cases}$$

Функция $\Delta(\lambda)$ при $\lambda = (a + d)/2$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a-d}{2} & b \\ c & -\dfrac{a-d}{2} \end{vmatrix}.$$

Так как $\Delta(r) = 0$, строки определителя пропорциональны, и поэтому $c = -\dfrac{(a-d)^2}{4b}$.

Тогда систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{cases} y' - \dfrac{a+d}{2} y = \dfrac{a-d}{2} y + bz + f(x), \\ z' - \dfrac{a+d}{2} z = -\dfrac{(a-d)^2}{4b} y - \dfrac{a-d}{2} z + g(x). \end{cases} \quad (8)$$

Умножив 1-ое уравнение системы (8) на $\frac{a-b}{2}$, и добавив к нему 2-ое, умноженное на b, получим

$$\left(\frac{a-d}{2}y+bz\right)'-\frac{a+d}{2}\left(\frac{a-d}{2}y+bz\right)=\frac{a-d}{2}f(x)+bg(x). \tag{9}$$

Решением уравнения (9) является некоторая функция

$$\frac{a-d}{2}y + bz = F(x).$$

Выражение $\frac{a-d}{2}y + bz$ имеет место в правой части 1-го уравнения системы (8), и в правой части 2-го уравнения системы (8) с коэффициентом $\left(-\frac{a-d}{2b}\right)$.

Поэтому, заменив его на $F(x)$, получим линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка для функций y и z, соответственно.

Пример 2

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} y'=4y-z+4e^{x}, \\ z'=y+2z-9. \end{cases} \tag{10}$$

Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

имеет только один корень равный 3.

Используем его, и получим

$$\begin{cases} y'-3y=y-z+4e^{x}, \\ z'-3z=y-z-9. \end{cases}$$

Свернем левые части уравнений

$$\begin{cases} \left(ye^{-3x}\right)'e^{3x}=y-z+4e^{x}, \\ \left(ze^{-3x}\right)'e^{3x}=y-z-9. \end{cases} \tag{11}$$

и вычтем из 1-го уравнения 2-ое:

$$[(y-z)e^{-3x}]'e^{3x} = 4e^{x} + 9.$$

Проинтегрируем, и получим

$$y - z = -2e^{x} - 3 + C_1e^{3x}.$$

Для того чтобы завершить процесс решения системы, подставим значение функции $y - z$ в правую часть любого из уравнений системы (10) (пусть это будет 1-ое) и проинтегрируем полученное уравнение.

$$(ye^{-3x})'e^{3x} = -2e^{x} - 3 + C_1e^{3x} + 4e^{x},$$
$$(ye^{-3x})' = 2e^{-2x} - 3e^{-3x} + C_1,$$
$$ye^{-3x} = -e^{-2x} + e^{-3x} + C_1 x + C_2,$$
$$y = -e^{x} + 1 + C_1 x\, e^{3x} + C_2\, e^{3x}.$$

Для того чтобы определить значение z достаточно проделать элементарную алгебраическую операцию:

$$z = y - (y - z) = -e^{x} + 1 + C_1 x\, e^{3x} + C_2\, e^{3x} - (-2e^{x} - 3 + C_1e^{3x}) =$$
$$e^{x} + 4 + (C_1 x - C_1 + C_2)e^{3x}.$$

Вышеизложенный метод может быть использован и для решения систем с переменными коэффициентами. Довольно простой пример подобного рода изложен далее.

Пример 3

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} xy' = y - 4z + 27x^{1/2}, \\ xz' = -2y + 3z. \end{cases} \qquad (12)$$

Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

имеет корни -1 и 5.

1) Для того чтобы использовать первый из них (-1), перепишем систему в виде

$$\begin{cases} xy' - (-1)y = y - (-1)y - 4z + 27x^{1/2}, \\ xz' - (-1)z = -2y + 3z - (-1)z, \end{cases}$$

свернем левые части уравнений

$$\begin{cases} (xy)' = 2y - 4z + 27x^{1/2}, \\ (xz)' = -2y + 4z, \end{cases}$$

и сложим уравнения системы:

$$[x(y+z)]' = 27x^{1/2} \ .$$

Проинтегрируем и получим

$$x(y + z) = 18x^{3/2} + C_1 \ .$$

2) Повторим процедуру, взяв второе характеристическое число:

$$\begin{cases} xy' - 5y = -4y + 4z + 27x^{1/2}, \\ xz' - 5z = -2y - 2z, \end{cases}$$

затем

$$\begin{cases} (yx^{-5})'x^6 = -4y + 4z + 27x^{1/2}, \\ (zx^{-5})'x^6 = -2y - 2z. \end{cases}$$

Отнимем от 1-го уравнения удвоенное 2-ое:

$$[(y-2z)x^{-5}]'x^6 = 27x^{1/2} \ ,$$

и проинтегрировав, получим

$$(y - 2z)x^{-5} = -6x^{-9/2} + C_2.$$

Для того чтобы найти y и z решим систему

$$\begin{cases} y + z = 18x^{1/2} + C_1/x, \\ y - 2z = -6x^{1/2} + C_2x^5, \end{cases}$$

и получим, что решение системы (12) есть пара функций

$$\begin{cases} y = 10x^{1/2} + 2\dfrac{A_1}{x} + A_2x^5, \\ z = 8x^{1/2} + \dfrac{A_1}{x} - A_2x^5. \end{cases}$$

Вышеизложенный метод работает и при решении систем линейных разностных уравнений. Следующий пример призван проиллюстрировать это утверждение.

Пример

Решим систему линейных разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}7x_n + 0{,}25y_n + 0{,}1 \cdot 0{,}9^n \,, \\ y_{n+1} = -0{,}04x_n + 0{,}9y_n - 2\,, \end{cases} \tag{14}$$

С начальными условиями $x_0 = 3$ и $y_0 = 2$.

Характеристическое уравнение системы (14)

$$\begin{vmatrix} 0{,}7-k & 0{,}25 \\ -0{,}04 & 0{,}9-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (0{,}7 - k)(0{,}9 - k) - (-0{,}04)\cdot(0{,}25) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad k^2 - 1{,}6k + 0{,}64 = 0$$

имеет корни $k_1 = k_2 = 0{,}8$.

Используя собственные значения, перепишем систему (14):

$$\begin{cases} x_{n+1} - 0{,}8x_n = -0{,}1x_n + 0{,}25y_n + 0{,}1 \cdot 0{,}9^n \,, \\ y_{n+1} - 0{,}8y_n = -0{,}04x_n + 0{,}1y_n - 2\,, \end{cases} \tag{15}$$

Умножим 2-ое уравнение системы (15) на 2,5 и вычтем из 1-го:

$$(x_{n+1} - 2{,}5y_{n+1}) = 0{,}8(x_n - 2{,}5y_n) + 0{,}1 \cdot 0{,}9^n + 5.$$

В результате получилось линейное разностное уравнение, решение которого есть функция

$$x_n - 2{,}5y_n = -2(0{,}8)^n + 5\frac{1-(0{,}8)^n}{1-(0{,}8)} + 0{,}1\frac{(0{,}9)^n - (0{,}8)^n}{0{,}9 - 0{,}8} \,.$$

Коэффициент (-2) мы получили из начальных условий:

$$x_0 - 2{,}5y_0 = 3 - 2{,}5 \cdot 2 = -2.$$

Собрав подобные члены, получим, что

$$x_n - 2{,}5y_n = 25 - 28 \cdot (0{,}8)^n + 0{,}9^n. \tag{16}$$

Так как характеристическое уравнение системы (14) имеет только один кратный корень, мы знаем, что выражение $x_n - 2{,}5y_n$ имеет место в правых частях уравнений системы (15). В частности, в 1-м уравнении оно содержится с множителем (-0,1).

Используя этот факт, мы можем переписать 1-ое уравнение системы в виде

$$x_{n+1} - 0{,}8x_n = -0{,}1[25 - 28 \cdot (0{,}8)^n + 0{,}9^n] + 0{,}1 \cdot 0{,}9^n \Rightarrow$$

$$x_{n+1} - 0{,}8x_n = -2{,}5 + 2{,}8 \cdot (0{,}8)^n \,. \tag{17}$$

Решением уравнения (17) является функция

$$x_n = 3(0,8)^n - 2,5\frac{1-(0,8)^n}{1-(0,8)} + 2,8n \cdot 0,8^{n-1} =$$
$$= 3(0,8)^n - 12,5 + 12,5 \cdot (0,8)^n + 3,5n(0,8)^n = [15,5 + 3,5n](0,8)^n - 12,5.$$

Для того чтобы найти y_n можно воспользоваться равенством (16):

$$x_n - 2,5y_n = 25 - 28 \cdot (0,8)^n + 0,9^n$$
$$=> 2,5y_n = x_n - [25 - 28 \cdot (0,8)^n + 0,9^n]$$
$$=> 2,5y_n = [15,5 + 3,5n](0,8)^n - 12,5 - 25 + 28 \cdot (0,8)^n - 0,9^n$$
$$=> 2,5y_n = [43,5 + 3,5n](0,8)^n - 37,5 - 0,9^n$$
$$=> y_n = [17,4 + 1,4n](0,8)^n - 15 - 0,4(0,9)^n .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа, 1974.
2. Kydyraliev S.K., Urdaletova A.B. Solving Linear Differential Equations by Operator Factorization. *The College Mathematics Journal*, USA, vol. 27, No.3, May, 1996.
3. Boyce W.E., DiPrima, R.C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 4th ed., Wiley, New York, 1986.
4. Guterman, M.M., and Nitecki, Z.H., Differential Equations. A Fist Course, Saunders College Publishing, Philadelphia, 1988.