ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ НАХОЖДЕНИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Д.С. Джумабаев, С.М. Темешева
Институт математики МОН РК, Алматы, Казахстан
e-mail: anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Аннотация

На основе разбиения интервала и введения дополнительных параметров предлагается алгоритм нахождения решений нелинейной двухточечной краевой задачи. По исходным данным задачи построена система уравнений для нахождения начального приближения параметра и получены достаточные условия сходимости алгоритма. Для изолированных решений рассматриваемой задачи установлено существование такого шага разбиения интервала, при котором построенная система имеет решение и алгоритм сходится.

Нелинейные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений служат математической моделью различных процессов естествознания и возникают во многих разделах прикладной математики.

Вопросы разрешимости краевых задач и разработка алгоритмов, позволяющих найти решение исследуемой задачи или его приближения рассмотрены многими авторами. Библиографию и анализ работ по основным группам методов исследования краевых задач можно найти в [1].

В настоящей работе рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \in [0,T], \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

$$g(x(0),\, x(T)) = 0, \tag{2}$$

где $f:[0,T]\times R^n \to R^n$, $g: R^n \times R^n \to R^n$ непрерывны.

Часто применяемым методом решения краевых задач является метод стрельбы и его модификации [2-7]. В методе стрельбы предполагается, что задача Коши для уравнения (1) с начальным условием $x(0)=s$ имеет решение $x(t,s)$ на всем интервале $[0,T]$ при $s \in R^n$. Подставляя значения $x(t,s)$ в точках $t=0$ и $t=T$ в краевые условия (2) получим систему уравнений $\Psi(s) \equiv g(s,\, x(T,s)) = 0$ относительно начального значения. Построение функции $x(t,s)$ эквивалентно нахождению общего решения уравнения (1), что возможно в исключительных случаях. Для каждого $s \in R^n$ можно указать алгоритм вычисления значения $\Psi(s)$ [5, с. 585]. При этом мы имеем апостериорную информацию о свойствах функции $\Psi(s)$, которой недостаточно для применения известных теорем существования решения уравнения $\Psi(s)=0$.

Аналогичная ситуация имеет место в модификациях метода стрельбы: в методе параллельной пристрелки, в методе интервальной пристрелки и др.

В связи с этим в работах, где применяется метод стрельбы или его модификации, либо не приводятся условия существования решения и сходимости к нему предлагаемого алгоритма, либо они даются в терминах общего решения рассматриваемого дифференциального уравнения.

Известные условия сходимости алгоритмов метода стрельбы в терминах исходных данных очень жесткие и не выполняются для большинства краевых задач.

Поэтому в [8] задача (1), (2) была исследована методом параметризации, который ранее в [9] был применен к линейной двухточечной краевой задачи.

Было предложено двухпараметрическое семейство алгоритмов нахождения решения задачи (1), (2) и в терминах исходных данных установлены достаточные условия их сходимости.

Каждый шаг алгоритма состоит из двух пунктов: а) решения систем уравнений относительно вектора параметров λ, составленной по разбиению отрезка $[0,T]$ и функциям f, g при известных решениях задач Коши на соответствующих интервалах; б) решения задач Коши на интервалах длины $h>0$ при найденных значениях компонент параметра λ.

В настоящей работе предлагаются алгоритмы нахождения решения задачи (1), (2), где нет необходимости в решении задачи Коши.

Возьмем число $N \in \mathbf{N}$ и разобьем промежуток $[0,T)$ с шагом $h = T/N$:

$$[0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh).$$

Через $C([0,T],h,R^{nN})$ обозначим пространство систем функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))'$ с нормой $\|x[\cdot]\|_2 = \max\limits_{r=1:N} \sup\limits_{t\in[(r-1)h,rh)} \|x_r(t)\|$, где функция $x_r : [(r-1)h, rh) \to R^n$ непрерывна на $[(r-1)h, rh)$ и имеет конечный предел при $t \to rh-0$, $r=1:N$.

Сужение функции $x(t)$ на r-ый интервал $[(r-1)h, rh)$ обозначим через $x_r(t)$ и задачу (1), (2) сведем к многоточечной краевой задаче

$$\frac{dx_r}{dt} = f(t, x_r), \qquad t \in [(r-1)h, rh), \qquad r = 1:N, \tag{3}$$

$$g\left(x_1(0), \lim_{t\to Nh-0} x_N(t)\right) = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), \qquad s = 1:(N-1), \tag{5}$$

где (5) – условия склеивания решения во внутренних точках разбиения интервала.

Решением задачи (3) – (5) является система функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))' \in C([0,T],h,R^{nN})$, где непрерывно дифференцируемая на $[(r-1)h, rh)$ функция $x_r(t)$, $r=1:N$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (3) при всех $t \in [(r-1)h, rh)$, $r=1:N$ и имеют место равенства (4), (5).

Если $x^*(t)$ – решение задачи (1), (2), то система его сужений $x^*[t] = (x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_N^*(t))'$ принадлежит пространству $C([0,T],h,R^{nN})$ и будет решением задачи (3) – (5). Наоборот, если система функций $\tilde{x}[t] = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_N(t))'$ – решение задачи (3) – (5), то функция $\tilde{x}(t)$, определенная равенствами: $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_r(t)$ при $t \in [(r-1)h, rh)$, $r=1:N$, $\tilde{x}(T) = \lim\limits_{t\to Nh-0} \tilde{x}_N(t)$, является решением задачи (1), (2). Отметим, что условия склеивания решения (5) и дифференциальные уравнения (3) обеспечивают так же и непрерывность производных в точках разбиения интервала $[0,T]$.

Обозначим через λ_r значения функции $x_r(t)$ на левых концах интервалов их определения: $\lambda_r := x_r((r-1)h)$, $r=1:N$. Произведем замену $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=1:N$, и от задачи (3) – (5) перейдем к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt}=f(t,\lambda_r+u_r), \qquad t\in[(r-1)h,rh), \qquad r=1:N, \tag{6}$$

$$u_r((r-1)h)=0, \qquad r=1:N, \tag{7}$$

$$g\Big(\lambda_1,\lambda_N+\lim_{t\to Nh-0}u_N(t)\Big)=0, \tag{8}$$

$$\lambda_s+\lim_{t\to sh-0}u_s(t)-\lambda_{s+1}=0, \qquad s=1:(N-1), \tag{9}$$

Если $x(t)$ – решение задачи (1), (2), то система пар $\big(\lambda_r=x_r((r-1)h);\ u_r(t)=x_r(t)-$ $-x_r((r-1)h)\big)$, $r=1:N$, где $x_r(t)$ – сужение функции $x(t)$ на $[(r-1)h,rh)$, $r=1:N$, является решением многоточечной краевой задачи (6) – (9). И, обратно, если система пар $\big(\tilde\lambda_r,\tilde u_r(t)\big)$, $r=1:N$, является решением задачи (6) – (9), то функция $\tilde x(t)$, определенная равенствами:

$$\tilde x(t)=\tilde\lambda_r+\tilde u_r(t) \text{ при } t\in[(r-1)h,rh),\ r=1:N, \qquad \tilde x(T)=\tilde\lambda_N+\lim_{t\to Nh-0}\tilde u_N(t),$$

будет решением нелинейной двухточечной краевой задачи (1), (2). Однако, задача с параметрами преимущественно отличается от задачи (3) – (5) наличием начальных условий (7).

При фиксированном значении λ_r задача Коши (3), (4) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_r(t)=\int_{(r-1)h}^{t} f(\tau,\lambda_r+u_r(\tau))d\tau, \qquad t\in[(r-1)h,rh), \qquad r=1:N. \tag{10}$$

Из (10) определив $\lim_{t\to rh-0}u_r(t)$, $r=1:N$, подставив их (8), (9), предварительно умножая (8) на $h=T/N>0$, получим систему нелинейных уравнений относительно $\lambda_r\in R^n$:

$$h\cdot g\left(\lambda_1,\lambda_N+\int_{(N-1)h}^{Nh} f(t,\lambda_N+u_N(t))dt\right)=0, \tag{11}$$

$$\lambda_s+\int_{(s-1)h}^{sh} f(t,\lambda_s+u_s(t))d\tau-\lambda_{s+1}=0, \quad s=1:(N-1), \tag{12}$$

которую запишем в виде

$$Q_{1,h}(\lambda,u)=0, \qquad \lambda\in R^{nN}. \tag{13}$$

Условие А. *При заданном* $N\in\mathbf{N}$ $(h=T/N)$ *уравнение*

$$Q_{1,h}(\lambda,0)=0, \qquad \lambda\in R^{nN}, \tag{14}$$

имеет решение $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_N^{(0)}\right)' \in R^{nN}$ *и система функций* $u^{(0)}[t] = \left(u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \ldots, u_N^{(0)}(t)\right)'$ *с координатами* $u_r^{(0)}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(\tau, \lambda_r^{(0)}\right) d\tau,\ t \in [(r-1)h, rh)$, $r = 1:N$, *принадлежит пространству* $C\left([0,T], h, R^{nN}\right)$.

Выберем числа $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$ и определим множества

$$S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right) = \left\{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)' \in R^{nN} : \left\|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\right\| < \rho_\lambda\right\},$$

$$S\left(u^{(0)}[t], \rho_u\right) = \left\{u[t] \in C\left([0,T], h, R^{nN}\right) : \left\|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\right\|_2 < \rho_u\right\},$$

$$G_1\left(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t], \rho_x\right) = \left\{(t,x) : t \in [0,T],\ \left\|x - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t)\right\| < \rho_x,\ t \in [(r-1)h, rh),\ r = 1:N;\right.$$
$$\left.\left\|x - \lambda_N^{(0)} - \lim_{t \to Nh-0} u_N^{(0)}(t)\right\| < \rho_x,\ t = T\right\},$$

$$G_2\left(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t], \rho_\lambda, \rho_x\right) = \left\{(\mathrm{v}, \mathrm{w}) : \left\|\mathrm{v} - \lambda_1^{(0)}\right\| < \rho_\lambda,\ \left\|\mathrm{w} - \lambda_N^{(0)} - \lim_{t \to Nh-0} u_N^{(0)}(t)\right\| < \rho_x\right\}.$$

Условие В. *Функции* f, g *соответственно в* $G_1\left(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t], \rho_x\right)$, $G_2\left(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t], \rho_\lambda, \rho_x\right)$ *имеют равномерно непрерывные частные производные* f'_x, g'_{v}, g'_{w} *и выполняются неравенства*

$$\left\|f'_x(t,x)\right\| \le L(t), \qquad \left\|g'_{\mathrm{v}}(\mathrm{v}, \mathrm{w})\right\| \le L_1, \qquad \left\|g'_{\mathrm{w}}(\mathrm{v}, \mathrm{w})\right\| \le L_2,$$

где $L(t)$ *- непрерывная на* $[0,T]$ *функция,* L_1, L_2 *– постоянные.*

При выполнении условия В существует равномерно непрерывная в $S\left(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda\right) \times S\left(u^{(0)}[t], \rho_u\right)$ матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{1,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$. Ввиду специальной структуры системы (11), (12), матрица Якоби имеет блочно-ленточный вид:

$$\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} c_{11}(\lambda_1, \lambda_N, u_N) & 0 & \ldots & 0 & c_{1N}(\lambda_1, \lambda_N, u_N) \\ c_{21}(\lambda_1, u_1) & -I & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{N,N-1}(\lambda_{N-1}, u_{N-1}) & -I \end{pmatrix},$$

где $c_{11}(\lambda_1, \lambda_N, u_N) = hg'_{\mathrm{v}}\left(\lambda_1, \lambda_N + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f(t, \lambda_N + u_N(t))dt\right)$,

$$c_{1N}(\lambda_1, \lambda_N, u_N) = hg'_{\mathrm{w}}\left(\lambda_1, \lambda_N + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f(t, \lambda_N + u_N(t))dt\right) \times \left(I + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f'_x(t, \lambda_N + u_N(t))dt\right),$$

$$c_{r+1,r}(\lambda_r, u_r) = I + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} f'_x(t, \lambda_r + u_r(t))dt, \qquad r = 1:(N-1),$$

0 – нулевая $(n \times n)$-матрица, I – единичная матрица размерности n.

Как следует из [9], матрица Якоби $\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda,u)}{\partial \lambda}$ обратима тогда и только тогда, когда обратима $(n\times n)$-матрица

$$M = hg'_{\mathrm{v}}\left(\lambda_1,\lambda_N + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f(t,\lambda_N + u_N(t))dt\right) +$$

$$+ hg'_{\mathrm{w}}\left(\lambda_1,\lambda_N + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f(t,\lambda_N + u_N(t))dt\right)\prod_{r=N}^{1}\left(I + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} f'_x(t,\lambda_r + u_r(t))dt\right).$$

При этом обратная к $\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda,u)}{\partial \lambda}$ матрица имеет вид

$$\left(\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda,u)}{\partial \lambda}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2N} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \dots & d_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{N1} & d_{N2} & d_{N3} & \dots & d_{N4} \end{pmatrix},$$

где блочные $(n\times n)$-матрицы d_{ij}, $i,j = 1:n$, определяются рекуррентными формулами:

$$d_{11} = M^{-1},$$

$$d_{1j} = hM^{-1}g'_{\mathrm{w}}\left(\lambda_1,\lambda_N + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f(t,\lambda_N + u_N(t))dt\right)\prod_{r=N}^{j}\left(I + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} f'_x(t,\lambda_r + u_r(t))dt\right), \quad j = 2:N,$$

$$d_{r+1,j} = \left(I + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} f'_x(t,\lambda_r + u_r(t))dt\right)d_{rj}, \quad r = 1:(N-1), \quad j = 1:N, \quad j \neq r+1,$$

$$d_{r+1,r+1} = \left(I + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} f'_x(t,\lambda_r + u_r(t))dt\right)d_{r,r+1} - I, \quad r = 1:(N-1).$$

За начальное приближение решения задачи (6) – (9) возьмем пару $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t])$ и найдем последовательность $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 1,2,\dots$, по следующему алгоритму:

Шаг 1. а) Из уравнения $Q_{1,h}(\lambda, u^{(0)}) = 0$ найдем $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_N^{(1)})' \in R^{nN}$;
б) компоненты системы функций $u^{(1)}[t] = (u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t), \dots, u_N^{(1)}(t))'$ найдем по формулам

$$u_r^{(1)}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(\tau, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(0)}(\tau)\right)d\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1:N.$$

Шаг 2. а) Из уравнения $Q_{1,h}(\lambda, u^{(1)}) = 0$ найдем $\lambda^{(2)} = (\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_N^{(2)})' \in R^{nN}$;
б) компоненты системы функций $u^{(2)}[t] = (u_1^{(2)}(t), u_2^{(2)}(t), \dots, u_N^{(2)}(t))'$ найдем по формулам

$$u_r^{(2)}(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(\tau,\lambda_r^{(2)}+u_r^{(1)}(\tau)\right)d\tau,\quad t\in[(r-1)h,rh),\quad r=1:N.$$

И т.д.

Шаг k. а) Решая уравнение $Q_{1,h}\left(\lambda,u^{(k-1)}\right)=0$, найдем $\lambda^{(k)}=\left(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)},\ldots,\lambda_N^{(k)}\right)\in R^{nN}$; б) компоненты системы функций $u^{(k)}[t]=\left(u_1^{(k)}(t),u_2^{(k)}(t),\ldots,u_N^{(k)}(t)\right)$ найдем по формулам

$$u_r^{(k)}(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(\tau,\lambda_r^{(k)}+u_r^{(k-1)}(\tau)\right)d\tau,\quad t\in[(r-1)h,rh),\quad r=1:N.$$

И т.д.

Таким образом, получили последовательность пар $\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)$, $k=0,1,2,\ldots$. Достаточные условия осуществимости, сходимости предложенного алгоритма, одновременно обеспечивающие существование изолированного решения многоточечной задачи с параметрами (6) – (9) устанавливает

Теорема 1. *Пусть при некоторых* $N\in\mathbf{N}$ $\left(h=T/N\right)$, $\rho_\lambda>0$, $\rho_u>0$, $\rho_x>0$ *выполняются условия A, B,* $(n\times n)$*-матрица M обратима для всех* $\left(\lambda,u[t]\right)\in S\left(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)\times S\left(u^{(0)}[t],\rho_u\right)$ *и имеют место неравенства:*

1) $$\max\left\{\left\|M^{-1}\right\|\left(1+hL_2\sum_{j=2}^{N}\prod_{r=N}^{j}\left(1+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt\right)\right),\right.$$

$$\left.\max_{i=2:N}\left\{\prod_{r=N}^{i}\left(1+\int\limits_{(r-2)h}^{(r-1)h}L(t)dt\right)\left\|M^{-1}\right\|\left(1+hL_2\sum_{j=2}^{N}\prod_{r=N}^{j}\left(1+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt\right)\right)+\sum_{j=i}^{N-1}\prod_{r=N}^{j}\left(1+\int\limits_{(r-2)h}^{(r-1)h}L(t)dt\right)+1\right\}\right\}\le\gamma_1(h),$$

2) $q_1(h)=\max\limits_{r=1:N}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt+\beta_1(h)\max\limits_{r=1:N}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt<1$, *где* $\beta_1(h)=\gamma_1(h)\max\left(hL_2,1\right)\max\limits_{r=1:N}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt$,

3) $\dfrac{\beta_1(h)}{1-q_1(h)}\max\limits_{r=1:N}M_r h<\rho_\lambda$, *где* $M_r=\sup\limits_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|f\left(t,\lambda_r^{(0)}\right)\right\|$,

4) $\dfrac{q_1(h)}{1-q_1(h)}\max\limits_{r=1:N}M_r h<\rho_u$, *5)* $\rho_\lambda+\rho_u<\rho_x$.

Тогда определяемая по алгоритму последовательность пар $\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)$, $k=0,1,2,\ldots$, *принадлежит* $S\left(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)\times S\left(u^{(0)}[t],\rho_u\right)$ *сходится к решению* $\left(\lambda^*,u^*[t]\right)\in S\left(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)\times S\left(u^{(0)}[t],\rho_u\right)$ *задачи (6) – (9) и справедливы оценки:*

a) $\left\|u^*[\cdot]-u^{(k)}[\cdot]\right\|_2\le\dfrac{\left(q_1(h)\right)^{k+1}}{1-q_1(h)}\max\limits_{r=1:N}M_r h$,

b) $\left\|\lambda^*-\lambda^{(k)}\right\|\le\beta_1(h)\left\|u^*[\cdot]-u^{(k)}[\cdot]\right\|_2$.

Причем любое решение задачи (6) – (9) в $S\left(\lambda^{(0)},\rho_\lambda\right)\times S\left(u^{(0)}[t],\rho_u\right)$ *изолировано.*

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 2 из [8, с. 47] с учетом особенностей предложенного алгоритма нахождения решения задачи. При нахождении параметра на каждом шаге алгоритма мы используем усиление локального варианта теоремы Адамара из [8, с.41].

Предложенный алгоритм начинается с нахождения решения системы уравнений (14). В силу нелинейности эта система уравнений относительно $\lambda \in R^{nN}$ может иметь несколько решений. Поэтому и задача (6) – (9) так же может иметь несколько решений в окрестностях соответствующих $\lambda^{(0)} \in R^{nN}$ – решений системы уравнений (14).

Функции $x^{(k)}(t)$, $k = 0,1,\ldots$, определим равенствами: $x^{(k)}(t) = \lambda_r^{(k)} + u_r^{(k)}(t)$ при $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = 1:N$, $x^{(k)}(T) = \lambda_r^{(k)} + \lim\limits_{t \to Nh-0} u_r^{(k)}(t)$ и через $S\left(x^{(0)}(t), \rho_x\right)$ обозначим множество кусочно-непрерывно дифференцируемых функций $x:[0,T] \to R^n$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left\|x(t) - x^{(0)}(t)\right\| < \rho_x,\ t \in [(r-1)h, rh),\ r = 1:N,\ \left\|x(T) - x^{(0)}(T)\right\| < \rho_x.$$

Ввиду эквивалентности задач (1), (2) и (6) – (9) из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то последовательность функций* $x^{(k)}(t)$, $k = 0,1,\ldots$, *содержится в* $S\left(x^{(0)}(t), \rho_x\right)$, *сходится к решению* $x^*(t) \in S\left(x^{(0)}(t), \rho_x\right)$ *задачи (1), (2) и справедливы неравенства*

$$\left\|x^*(t) - x^{(k)}(t)\right\| \le \frac{\left(q_1(h)\right)^{k+1}}{1 - q_1(h)}\left(1 + \beta_1(h)\right)\max_{r=1:N} M_r h, \qquad t \in [0,T].$$

Причем любое решение задачи (1), (2) в $S\left(x^{(0)}(t), \rho_x\right)$ *изолировано*.

В теореме 2 изолированность означает, что существует окрестность решения $x^*(t)$ задачи (1), (2), в которой нет других решений. Однако известно, что изолированное в этом смысле решение, вообще говоря, не обладает свойством непрерывной зависимости решений от изменений правой части дифференциального уравнения и граничного условия. В связи с этим рассматривается изолированное в более узком смысле решение задачи (1), (2).

Следующее определение является модификацией определения изолированного решения задачи (1), (2) из [10, с. 792].

Определение. *Решение* $x^*(t)$ *задачи (1), (2) называется "изолированным", если существует число* $\rho_0 > 0$ *при котором функции* f *и* g *соответственно в* $G^*_{1,\rho_0} = \left\{(t,x): t \in [0,T], \left\|x - x^*(t)\right\| < \rho_0\right\}$, $G^*_{2,\rho_0} = \left\{(\mathrm{v},\mathrm{w}): \left\|\mathrm{v} - x^*(t)\right\| < \rho_0, \left\|\mathrm{w} - x^*(T)\right\| < \rho_0\right\}$ *имеют равномерно непрерывные производные* f'_x, g'_{v}, g'_{w} *и линейная однородная двухточечная краевая задача*

$$\frac{dy}{dt} = f'_x\left(t, x^*(t)\right)y, \qquad t \in [0,T], \qquad y \in R^n,$$
$$g'_{\mathrm{v}}\left(x^*(0), x^*(T)\right)y(0) + g'_{\mathrm{w}}\left(x^*(0), x^*(T)\right)y(T) = 0$$

имеет только тривиальное решение $y(t) \equiv 0$.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 1 любое решение (1), (2) из* $S\left(x^{(0)}(t), \rho_x\right)$ *является "изолированным"*.

Следующее утверждение показывает, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для существования "изолированного" решения.

Теорема 4. *Краевая задача (1), (2) имеет "изолированное" решение тогда и только тогда, когда найдется* $N \in \mathbf{N}$ $\left(h = \frac{T}{N}\right)$, *при котором имеют место предположения A, B и выполняются условия 1) – 5) теоремы 1.*

Доказательства теорем проводятся с использованием схем доказательств соответствующих теорем из [8].

Основное отличие теоремы 3 от аналогичного утверждения из [8] заключается в том, что существование изолированного (в смысле определения) решения обеспечивает существование такого $N \in \mathbf{N}$ $\left(h = \frac{T}{N}\right)$, что система нелинейных уравнений (14) имеет решение.

Таким образом, если для задачи (1), (2) существует "изолированное" решение, то всегда найдется такой $N \in \mathbf{N}$ $\left(h = \frac{T}{N}\right)$, при котором система уравнений (14) имеет решение и предложенный в статье алгоритм сходится к решению задачи (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев: Наук. думка, 1986.
2. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Киев: Наук. думка, 1963. Ч.1.
3. Keller H.B. Numerical methods for two-point boundary-value problems. Blaisdell: Walthan, 1968.
4. Roberts S.M., Shipman J.S. Two-point boundary-value problems: Shooting methods. N.Y.: Elsevier, 1972.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.:Физматгиз, 1973.
6. Монастырный П.И. О сходимости метода интервальной пристрелки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 6. С. 1139-1145.
7. Монастырный П.И. О связи изолированности решений со сходимостью методов пристрел-ки // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 4. С. 732-740.
8. Джумабаев Д.С., Темешева С.М. Метод параметризации решения нелинейных двухточечных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 1. С.39–63.
9. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1989. - Т. 29, № 1. - С. 50-66.
10. Keller H.B., White A.B. Difference methods for boundary value problems in ordinary differential equations // SIAM J. Numer. Anal. 1975. Vol.12. No 5. pp. 791-802.