ЛОГИКА ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОПРОДУКТОВЫХ РАССРЕДОТОЧЕННЫХ РЫНКОВ

А.Г. Коваленко

Аннотация

Одной из непростых задач системного аналитика является задача объединения моделей отдельных активных субъектов, взаимодействующих между собой, в единую систему. Такие объединения приводят к новым постановкам задач. В рассматриваемом случае показывается, как на основе рассредоточенного рынка совершенной конкуренции многие субъекты, описываемые задачами нелинейного программирования, сводятся в единую систему. И целью моделирования является отыскание ценового равновесия в этой системе. Для такого объединения автором получены многие интересные результаты [1]. По мнению автора, данное направление работ может оказаться весьма продуктивным с точки зрения развития:

—замена конечномерных задач, которые описывают субъектов, на вариационные задачи;

—включение в систему иных взаимодействий, например, монопольных.

1. Обозначения

Для описания моделей воспользуемся основными определениями и обозначениями теории графов. Пусть $G=\langle E,V,H\rangle$ – связный конечный ориентированный граф, E – множество вершин графа, V – множество дуг, H – отображение $H{:}V\to E\times E$. Каждой дуге $v\in V$ отображение H ставит в соответствие упорядоченную пару $(h1(v), h2(v))$ вершин из E: $h1(v)$ – начало дуги v, $h2(v)$ – конец. Будем говорить, что из вершины i выходит дуга v, если $i=h1(v)$, и входит в вершину j, если $j=h2(v)$. Множество дуг, входящих в вершину i, обозначим через $V^+(i)$, множество дуг, выходящих из вершины i, обозначим через $V^-(i)$.

2. Модель однопродуктового рассредоточенного рынка, как задача потокораспределения теории гидравлических сетей

Вершины $i\in E$ интерпретируем как пункты – локальные рынки купли–продажи некоторого однородного продукта. Субъектами рынков являются:

– конечные потребители этого продукта;

– предприятия, производящие его;

– агенты, осуществляющие экспортно-импортные операции за пределы моделируемой системы;

– арбитражеры, которые покупают продукт в вершинах с меньшей ценой и продают в вершинах с большей ценой.

Каждой вершине $i\in E$ в соответствие поставим переменные P_i, z_i, η_i, ξ_i, интерпретируемые соответственно как цена, объем экспортно-импортного сальдо, объем производства и объем потребления этого продукта. **Модели поведения субъектов рынка опишем** в виде функций предложения предприятий $\eta_i(P_i)$, функций спроса конечных потребителей $\xi_i(P_i)$, кривой экспортно-импортного сальдо $z_i(P_i)$, которые выводятся из соответствующих экстремальных задач при их взаимодействии в условиях равновесия конкурентного рынка. Описание функционирования арбитражеров приведем далее.

Дуги $v\in V$ интерпретируем как торгово-транспортные коммуникации (системы), по которым арбитражеры осуществляют транспорт потока. Обозначим через y_v величину потока, идущего по дуге $v \in V$. Направление дуги указывает положительное направление потока. Объем транспорта y_v по дуге v зависит от разности цен между инцидентными пунктами и в равновесном состоянии описывается зависимостью

$$y_v = \phi_v(P_{h2(v)} - P_{h1(v)}), \qquad v \in V, \tag{1}$$

причем, если $P_{h2(v)} > P_{h1(v)}$, то $y_v > 0$, y_v возрастает с ростом $(P_{h2(v)} - P_{h1(v)})$, если $P_{h2(v)} < P_{h1(v)}$, то $y_v < 0$. Эта зависимость описывает **модель арбитражера** и фактически отражает конкурентное предложение пункта $h1(v)$ пункту $h2(v)$ при разности цен $(P_{h2(v)} - P_{h1(v)}) \geq 0$, и, наоборот, предложение пункта $h2(v)$ пункту $h1(v)$ при разности цен $(P_{h2(v)} - P_{h1(v)}) < 0$.

Перепишем зависимость (1) в виде

$$P_{h2(v)} = P_{h1(v)} + \phi_v^{-1}(y_v), \qquad v \in V, \tag{2}$$

т.е. цена $P_{h2(v)}$ продукта в конце дуги v равна цене продукта в начале дуги v плюс цена, добавленная при его транспортировке $\phi_v^{-1}(y_v)$, где ϕ_v^{-1} – функция, обратная для ϕ_v . Пользуясь терминологией теории гидравлических сетей, соотношения (1), (2) в дальнейшем будем называть **замыкающими соотношениями**.

Граничные условия. Разобьем множество вершин E на три непересекающиеся части E^1 , E^2 и E^3 . В вершинах из E^1 зафиксированы цены, (вершины с фиксированными ценами P^*_i и свободным (искомым) отбором (внешнеторговым сальдо) B_i):

$$P_i = P^*_i, \qquad i \in E^1. \tag{3}$$

В вершинах из E^2 задана величина внешнеторгового сальдо (вершины с фиксированным отбором B^*_i и свободной (искомой) ценой):

$$z_i = B^*_i, \qquad i \in E^2. \tag{4}$$

В вершинах из E^3 объем внешнеторгового сальдо z_i связан с ценой P_i зависимостью

$$z_i = z_i(P_i), \qquad i \in E^3, \tag{5}$$

(вершины с подвижными ценами и отбором).

Условия продуктового баланса. В условиях равновесия объемы внешнеторгового сальдо, производства и потребления, ввоза–вывоза арбитражерами этого продукта сбалансированы, поэтому

$$\Sigma\,\{y_v : v \in V^+(i)\} - \Sigma\,\{ y_v : v \in V^-(i)\} + \eta_i - \xi_i = z_i, \qquad i \in E. \tag{6}$$

В теории гидравлических сетей это равенство называют Первым правилом Кирхгофа. Задача отыскания значений переменных P_i , η_i , ξ_i , z_i , $i \in E$, y_v , $v \in V$, удовлетворяющих уравнениями (2) – (6), является задачей потокораспределения в гидравлической сети с нефиксированными отборами.

3. Математическая модель однопродуктового рассредоточенного рынка, как система экстремальных задач

Представим функции предложения производителей $\eta_i(P_i)$, функции спроса конечных потребителей $\xi_i(P_i)$, функции (кривые) экспортно–импортного сальдо $z_i(P_i)$, которые выводятся из соответствующих экстремальных задач при их взаимодействии в условиях равновесия конкурентного рынка. Теперь будем считать, что каждый из субъектов описан своей экстремальной задачей.

Модель конечного потребления в вершинах $i\in E$ опишем задачей максимизации полезности

$$u_i(\xi_i, \Xi_i) \to max, \tag{7}$$

при бюджетных ограничениях

$$P_i \cdot \xi_i + \pi_i \cdot \Xi_i \le M_i, \tag{8}$$

$$\xi_i \ge 0, \qquad \Xi_i \ge 0,$$

где ξ_i – объем потребления продукта исследуемого рынка, P_i – его цена, Ξ_i – прочие продукты, π_i – их цена.

Модель производства в вершинах $i\in E$ опишем задачей максимизации прибыли

$$F_i = \eta_i \cdot P_i - \langle Y_i, PY_i \rangle - \langle r_i, Pr_i \rangle \to max, \tag{9}$$

при ограничениях

$$\eta_i \le f_i(Y_i, r_i), \tag{10}$$

$$0_i \leqq r_i \leqq \bar{r}_i, \tag{11}$$

где переменные Y_i, PY_i соответственно означают вектор объемов и вектор цен факторов производства, которые приобретаются у других отраслей; r_i – вектор объемов факторов производства, имеющихся в наличии (ресурсов производства); $\bar{r}_i$ – вектор предельных объемов этих факторов; $\bar{r}_i > 0_i$, 0_i – нуль–вектор, имеющий такую же размерность, что и вектор r_i. Факторы производства r_i можно интерпретировать, например, как объем фондов, численность трудящихся, сырьевые ресурсы, и т.д., f_i – производственная функция, связывающая выпуск с потреблением.

Модель арбитража. Для дуг $v\in V$, интерпретируемые как торгово-транспортные коммуникации (системы), по которым арбитражер осуществляет транспорт продукта, соответствующие экстремальные задачи имеют вид

$$F_v = y_v \cdot (P_{h2(v)} - P_{h1(v)}) - \langle r_v, Pr_v \rangle \to max, \tag{12}$$

при ограничениях

$$|y_v| \le f_v(r_v), \tag{13}$$

$$0_v \leqq r_v \leqq \bar{r}_v, \tag{14}$$

где объем перевозок $|y_v|$ по дуге v определяется производственной функций $f_v(r_v)$; r_v – вектор ресурсов производства (объем фондов, численность трудящихся, занятых в производственном процессе,…); $\bar{r}_v$ – вектор предельных объемов ресурсов; $\bar{r}_v > 0_v$, 0_v – ноль–вектор, имеющий такую же размерность, что и вектор r_v.

Условия продуктового баланса. В условиях равновесия объемы внешнеторгового сальдо, производства и потребления, ввоза – вывоза арбитражерами этого продукта сбалансированы, поэтому

$$\sum_{v\in V^+(i)} y_v - \sum_{v\in V^-(i)} y_v + \eta_i - \xi_i - z_i = 0 \qquad i\in E^2\cup E^1. \tag{15}$$

Все локальные рынки будем считать рынками совершенной конкуренции, поэтому субъекты являются ценополучателями. В их экстремальных задачах переменные $(P_i, Pr_i : i\in E^2\cup E^3)$, $(P_{h2(v)}, P_{h1(v)}, Pr_v : v\in V)$, интерпретируемые ценами, являются параметрами.

3 Описание модели многопродуктового рассредоточенного рынка

Пусть m – количество отраслей в анализируемой экономической системе. Также как и в модели межотраслевого баланса В. Леонтьева [2] между отраслями и выпускаемыми ими продуктами установим взаимно однозначное соответствие. Каждой отрасли s=1,2,3,…,m поставим в соответствие конечный ориентированный граф $G_s = \langle E_s, V_s, H_s\rangle$, описывающий структуру рассредоточенного рынка s-го продукта, E_s – множество вершин его графа, V_s – множество дуг, H_s – отображение $H_s: V_s \to E_s\times E_s$, $E_s\cap E_{s1}=\varnothing$, $V_s\cap V_{s1}=\varnothing$, при $s\neq s1$. Каждой дуге $v\in V_s$ отображение H_s ставит в соответствие упорядоченную пару $(h1(v), h2(v))$ вершин из E_s, $h1(v)$ – начало, $h2(v)$ – конец дуги v. Через $G=\langle E, V, H\rangle$ обозначим граф, получаемый объединением графов G_s, т.е.

$$G = \bigcup_{s=1}^{m} G_s,\quad E = \bigcup_{s=1}^{m} E_s,\quad V = \bigcup_{s=1}^{m} V_s$$

Будем говорить, что из вершины $i\in E_s$ графа G_s выходит дуга $v\in V_s$, если $i=h1(v)$, и входит в вершину $j\in E_s$, если $j=h2(v)$. Множество дуг, входящих в вершину i графа G_s, обозначим через $V^+(i)$. Множество дуг, выходящих из вершины i в графе G_s, обозначим через $V^-(i)$.

Вершины $i\in E_s$ будем интерпретировать как пункты – локальные рынки, в которых в соответствии с установившейся ценой, осуществляется обмен продукцией отрасли s между различными субъектами. Субъекты поставляют, либо вывозят продукцию по входящим и выходящим дугам, а также поставляют (либо потребляют) продукцию извне. В некоторых пунктах могут располагаться предприятия, которые потребляют продукцию других отраслей и производят продукцию данной отрасли. Подробное описание всех субъектов приводится далее.

Пусть v – некоторая дуга из $V_s\subset V$. Субъект, соответствующий этой дуге графа, осуществляет процессы купли-продажи между вершинами $h1(v)$ и $h2(v)$. Обозначим через Py_v и py_v цены продукта соответственно в начале и конце дуги v. Если $Py_v \geq py_v$, то продукт покупается в вершине $h1(v)$ и продается в вершине $h2(v)$, в противном случае покупается в вершине $h2(v)$ и продается в вершине $h1(v)$. Обозначим через y_v величину потока продукта s, идущего по этой дуге, направление дуги указывает его положительное направление. Поток может идти как в прямом, так и в обратном направлении, т.е. величина y_v может быть как положительной, так и отрицательной, причем $sign(y_v)=sign(Py_v - py_v)$. Объем перевозок $|y_v|$ по дуге v определяется производственной функций $f_v(r_v)$,

$$|y_v| \leq f_v(r_v), \qquad v\in V, \tag{16}$$

где r_v – вектор ресурсов (объем фондов, численность трудящихся, занятых в производственном процессе,…),

$$0_v \leqq r_v \leqq \bar{R}_v, \qquad v \in V, \tag{17}$$

R_v – вектор предельных объемов ресурсов, $\bar{R}_v > 0_v$, 0_v – ноль-вектор, имеющий такую же размерность, что и вектор r_v. Целью субъекта является максимизации прибыли

$$F_v = y_v \times (Py_v - py_v) - \langle r_v, Pr_v \rangle \to max, \quad v \in V, \tag{18}$$

где Pr_v – вектор цен за использование единицы объема ресурса. Субъекты конкурентных рынков являются ценополучателями. Поэтому в задаче (16) – (18) разность $(Py_v - py_v)$ является параметром, определяемым состоянием рынка, и оптимизация проводится по переменным y_v, r_v. Заметим, что различие условий перевозок в разных направлениях может быть учтено видом производственной функции $f_v(r_v)$. Экстремальная задача (16) – (18) определяет функцию $y_v = \varphi_v(Py_v - py_v)$, являющуюся торгово-транспортной кривой дуги $v \in V_s$. Торгово-транспортная кривая описывает предложение одного пункта другому в зависимости разности цен между ними.

Опишем взаимосвязь отраслей между собой и с конечными потребителями, позволяющую объединить отдельные рассредоточенные рынки в единую систему. Рассмотрим некоторую вершину $i \in E_{so}$, $so = 1,2,3,\ldots,m$. Будем считать, что в ней расположено предприятие, потребляющее продукцию остальных отраслей $s = 1,2,3,\ldots,m$, включая so, т.е. выступающее в роли покупателя, и выпускающее продукцию отрасли so в вершину i, т.е. выступающее в роли продавца. Множество всех таких вершин обозначим через $E^{np}{}_{so}$. Дополним граф G дугами $v \notin (\cup \{V_s | s = 1,2,3,\ldots,m\})$ следующим образом. Соединим вершину i дугами v с вершинами $j \in E_s$, $s = 1,2,3,\ldots,m$, от которых это предприятие получает продукцию. Не ограничивая общности, будем считать, что для каждого из этих значений s такая вершина $j \in E_s$ единственная, и что дуги направлены от j к i, т.е. $j = h1(v)$, $i = h2(v)$. Также будем считать, что движение потока определяется закономерностями, описанными зависимостями (16) - (18). Множество всех дополнительных дуг, входящих в вершину i, обозначим через $V^+{}_d(i)$. Множество всех дополнительных дуг, выходящих из вершины j, обозначим через $V^-{}_d(j)$.

Для $v \in V^+{}_d(i)$ переменные y_v, Py_v соответственно означают объем и цену продукции, которая поступает на предприятие вершины i по этим дугам. Если через η_i обозначить объем продукции, выпускаемой этим предприятием, то

$$\eta_i = f_i((y_v, v \in V^+{}_d(i)), r_i), \qquad i \in E^{np}{}_{so}, \tag{19}$$
$$0_i \leqq r_i \leqq \bar{R}_i, \qquad i \in E^{np}{}_{so}, \tag{20}$$

где f_i – производственная функция, связывающая выпуск с потреблением, r_i - вектор объемов используемых ресурсов (объем фондов, численность трудящихся, сырьевые ресурсы, и т.д.), $\bar{R}_i$ - вектор предельных объемов ресурсов, $\bar{R}_i > 0_i$, 0_i – ноль-вектор, имеющий такую же размерность, что и вектор r_i. Решение об объемах выпуска и потребления, ценах принимается на основе критерия максимизации прибыли

$$F_i = \eta_i \times P\eta_i - \Sigma\{y_v \times Py_v \,|\, v \in V^+{}_d(i)\} - \langle r_i, Pr_i \rangle \to max, \; i \in E^{np}{}_{so}, \tag{21}$$

где $P\eta_i$ – цена продаваемой продукции, Pr_i – вектор стоимостей ресурсов. В условиях конкурентного рынка все субъекты являются ценополучателями, поэтому переменные $P\eta_i$, Py_v, $v\in V^+{}_d(i)$, являются параметрами, определяемыми состоянием рынка. Оптимизация проводится по переменным η_i, $y_v, v\in V^+{}_d(i)$, r_i. Эта задача определяет функцию предложения $\eta_i = \eta_i(P\eta_i,(Py_v, v\in V^+{}_d(i)))$ и функции спроса на потребляемые продукты $y_v = y_v(P\eta_i,(Py_u, u\in V^+{}_d(i)))$, $v\in V^+{}_d(i)$.

Для моделирования конечного потребления дополним граф G множеством вершин $E_{nom.}$ Соединим вершины $i\in E_{nom}$ дугами v с вершинами $j\in E_s$, от которых конечный потребитель получает продукцию, s=1,2,3,…,m. Не ограничивая общности, будем считать, что для этих значений s такая вершина $j\in E_s$ единственная, и что дуги направлены от j к i, т.е. $j=h1(v)$, $i=h2(v)$. Также будем считать, что движение потока определяется закономерностями (16) – (18). Множество всех дополнительных дуг, входящих в вершину i, обозначим через $V^+{}_d(i)$. Для этой вершины $V^-{}_d(j)\cup V^+(i)\cup V^-(i)=\varnothing$. Конечный потребитель может быть описан:

1. Задачей максимизации полезности $f_i(y_v, v\in V^+{}_d(i))$ при бюджетном ограничении $\sum\{Py_v\times y_v \,|v\in V^+{}_d(i)\} = M_i$, M_i – величина бюджета;
2. Задачей минимизации затрат $\sum\{Py_v\times y_v\,|v\in V^+{}_d(i)\}$ при заданном уровне полезности $\eta_i = f_i(y_v, v\in V^+{}_d(i))$;
3. Задачей (19) – (21), если конечный потребитель является предприятием, выпускающим продукцию за пределы анализируемой экономической системы .

Для анализируемых далее методов важно, чтобы на основе этих задач было возможно построение функций спроса. Легко заметить, что если в задаче (19) – (21) зафиксировать $P\eta_i$, то во всех 3-ех случаях эти функции имеют одинаковый вид $y_v = y_v(Py_v, v\in V^+{}_d(i))$. Поэтому конечное потребление будем описывать задачей (19) – (21) с фиксированным $P\eta_i$.

Пусть z_i, Pz_i соответственно отбор и цена отбора в вершине $i\in E$. Отбор и цену отбора можно интерпретировать как объем чистого экспорта (разность между экспортом и импортом), и его цену в вершине. Разобьем множество вершин на 3 непересекающихся подмножества, $E=E^1\cup E^2\cup E^3$. Подмножество E_{nom} должно быть помещено в E^2, т.е. $E_{nom}\subset E^2$. Вершины $i\in E^1$ будем называть вершинами со свободной ценой и заданным отбором B_i. Для них

$$z_i = B_i, \qquad i\in E^1. \tag{22}$$

Вершины $i\in E^2$ со свободным отбором и заданной ценой PB_i

$$Pz_i = PB_i, \qquad i\in E^2, \tag{23}$$

в вершинах $i\in E^3$ отбор z_i связан с ценой Pz_i функциональной зависимостью

$$z_i = \Psi_i(Pz_i), \qquad i\in E^3. \tag{24}$$

Эти вершины будем называть вершинами с подвижными ценой и отбором. В дальнейшем равенство (22) будем записывать также в виде $z_i = \Psi_i(Pz_i)\equiv B_i$, Величины B_i, PB_i и зависимости $z_i = \Psi_i(Pz_i)$ (кривые внешнеторгового сальдо) определяют связь моделируемой экономической системы с другими (внешними) экономическими системами.

В условиях конкурентного рынка цены, по которым продукт вывозится, ввозится, и поступает с предприятия, находящегося в этой вершине, совпадают. Поэтому для $i \in E_s$, s=1,2,3,…,m можно записать :

$$py_v = Pz_i, \quad v \in V^-(i) \cup V^-{}_d(i), \tag{25}$$

$$P\eta_i = Pz_i, \tag{25}$$

$$Py_v = Pz_i, \quad v \in V^+(i)\,. \tag{26}$$

В состоянии равновесия цены Pz_i, должны быть таковы, чтобы выполнялись условия продуктового баланса

$$z_i = \sum_{v \in V^+(i)} y_v - \sum_{v \in V^-(i)} y_v - \sum_{v \in V^-{}_d(i)} y_v + \eta_i \tag{27}$$

Если принять соглашение, что сумма по пустому множеству равна нулю, для $i \in E_s \backslash E^{np}{}_s$ η_i=0, то (25) – (27) можно записать для всех $i \in E$.

Соотношения (16) – (27) являются моделью многопродуктового рассредоточенного рынка в равновесном состоянии и представляют собой систему оптимизационных задач (16)–(18) и (19)–(21), определяемую граничными условиями (22)–(24), которые в свою очередь связанны между собой условиями совпадения цен обмена продукцией (25)–(26) и условиями совпадения объемов производства с объемами потребления (27).

В докладе для приведенных моделей будут рассмотрены методы отыскания состояния равновесия, взаимосвязь этих состояний с централизованным управлением экономической системой, возможность включения монопольных взаимодействий субъектов.

ЛИТЕТАТУРА

1. Коваленко, А.Г. Развитие математических моделей и методов теории гидравлических сетей и их применение для моделирования рассредоточенного рынка Диссертация доктора физ.–мат. наук – М., 2006. – 305 с.
2. Леонтьев, В. Межотраслевая экономика. – М.: Экономика», 1997. – 479 с.