

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАБЛЮДАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА С ПОВЫШЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ А.М. ЛЯПУНОВА****М.А. Бейсенби<sup>1</sup>, А.Т. Турешбаев<sup>2</sup>, А.О. Даутбаева<sup>2</sup>**<sup>1</sup> ЕНУ им. Гумилева Л.Н., Астана e-mail: [Beisenbi@mail.ru](mailto:Beisenbi@mail.ru)<sup>2</sup> КГУ им. Коркыт Ата Кызылорда, e-mail: [aturesh@mail.ru](mailto:aturesh@mail.ru), [aicos@mail.ru](mailto:aicos@mail.ru)**Аннотация**

В настоящей работе предлагается подход к построению наблюдающего устройства с повышенным потенциалом робастной устойчивости для линейных систем с неопределенными параметрами и к построению функций Ляпунова, основанные на геометрической интерпретации прямого метода А.М.Ляпунова и градиентности динамических систем по отношению некоторой потенциальной функций заданные в пространстве состояний динамической системы.

Известно [1,2], что введение обратной связи по вектору состояния, т.е. формирование закона управления по вектору состояния, позволяет надлежащим изменением собственных значений повлиять на динамические свойства замкнутой системы. При этом, если объект управляем, то значения корней характеристического полинома замкнутой системы могут быть заданы любыми. В современных условиях основным методом решения задачи параметрического синтеза является определения закона управления, обеспечивающего заданные желаемые значения корней, получил название, задача модального управления [2,3].

Однако формирование такого закона требует, чтобы все составляющие вектора состояния  $x$  были доступны для измерения, что часто не имеет места, поскольку наблюдается и измеряется только вектор выхода  $y$ . Поэтому необходимо располагать устройствами, позволяющими оценивать вектор состояния  $x(t)$  по результатам наблюдения векторов  $y(t)$  и  $u(t)$ . Такого рода устройства называются наблюдающими устройствами (или наблюдателями, идентификаторами состояния).

Для современных задач управления характерны все возрастающая сложность, связанные неопределенностью в описаниях объекта управления и внешней среды [4]. Актуальной также является проблема построения наблюдающего устройства обеспечивающего работоспособность при больших пределах изменения неопределенных параметров объекта управления. Такое наблюдающее устройство, реализующее оценку вектора состояния объекта управления с неопределенными параметрами назовем робастным. Под робастностью понимают способность сохранять работоспособность системы в условиях неопределенности [4]. В общей постановке исследование системы на робастную устойчивость состоит в указании ограничений на изменение параметров системы, при которых сохраняется устойчивость. Универсальным методом исследования устойчивости динамических систем является прямой метод А.М.Ляпунова [5,6].

Рассмотрим линейную стационарную замкнутую систему управления, описывающуюся следующим уравнением состояния с неопределенными параметрами

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + f(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x(t) \in R^n$  - вектор состояния объекта,  $u(t) \in R^m$ ,  $y(t) \in R^l$  - входной и выходной векторы,  $A, B, C$  - соответственно матрицы объекта управления, и наблюдения. Объект подвержен действию возмущений  $f(t)$  и «шума (погрешности) измерений»  $v(t)$ . Считается, что при работе системы доступны измерению процессы  $u(t), y(t), a x(t), f(t), v(t)$  - недоступны. Рассматривается задача получения оценки состояния объекта  $\hat{x}(t)$ . Процесс  $\hat{x}(t)$ , полученный с помощью некоторого алгоритма, должен в определенном (например, в асимптотическом) смысле приближаться к процессу  $x(t)$  ( $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ ) независимо от исходного начального состояния объекта  $x_0$  [7,8].

Пусть матрица объекта управления  $A$  размерности  $n \times n$  и матрицы  $b$  и  $c$  - соответственно управления и выхода имеют вид.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \quad c = \|c_1 \ 0 \ \dots \ 0\|$$

Покажем для полностью наблюдаемого стационарного объекта при отсутствии возмущений можно получить асимптотически точную оценку состояния, с наблюдающим устройством в форме однопараметрических структурно устойчивых отображений [9].

Наблюдатель состояния можем представить в виде модели объекта управления, на вход которой поступает то же управляющее воздействие, что и на объект управления и, кроме того дополнительный сигнал коррекции (обратной связи). Этот сигнал получается из невязки между выходами объекта и модели (рис.1).

Влияние сигнала невязки придает поведению модели качественно новые свойства (отличные от свойств объекта). Собственные движения модели и объекта оказываются различными, но переменные состояния модели служат оценками состояния объекта. Для стационарных систем наблюдатель описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t), \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0, t \geq t_0 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\hat{x}(t) \in R^n$  - вектор состояния наблюдателя, служащий оценкой состояния объекта;  $\hat{y}(t) \in R^l$  - вектор выхода;  $L$  - оператор обратной связи по невязке между выходами объекта и наблюдателя.

Синтез наблюдателя заключается в выборе оператора  $L$ . Мы будем рассматривать наблюдатель, у которого размерность вектора состояния такая же, как и у объекта (так называемый наблюдатель полного порядка, или наблюдатель Калмана).

Для построения наблюдателя рассмотрим ошибки оценивания  $\varepsilon(t) = (x(t) - \hat{x}(t))$ . Вычитая из (1) уравнение (2), получаем уравнение для ошибки

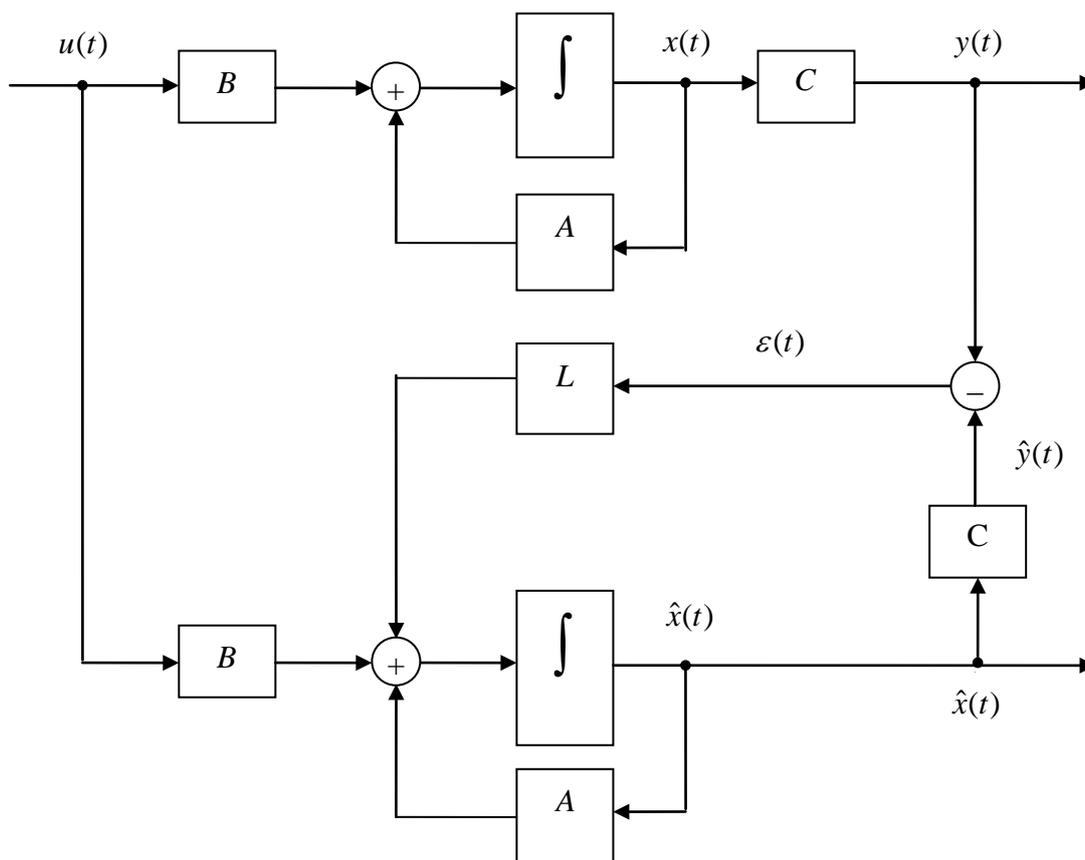


Рис1. Структурная схема наблюдателя

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A\varepsilon(t) - LC\varepsilon(t) + f(t) - Lv(t), \\ \varepsilon(t_0) &= \varepsilon_0 = x_0 - \hat{x}_0, \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Как видно из этого уравнения, источниками ошибки  $\varepsilon(t)$  являются начальное рассогласование  $\varepsilon_0 = x_0 - \hat{x}_0$ , возмущение и помеха измерений  $v(t)$ . Динамика переходного процесса ошибки  $\varepsilon(t)$  определяется оператором  $G(t) = A - L(t)C$

Необходимо исследовать поведение процесса  $\varepsilon(t)$ . Динамика переходного процесса в таких системах определяется оператором  $G(t) = A - L(t)C$ . Если возмущения  $f(t)$  и шумы  $v(t)$  отсутствуют, то процесс оценивания должен быть асимптотически устойчив и  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  для любых начальных значений  $x_0$  и  $\hat{x}_0$ . Оператор  $G(t)$  зависит от параметров объекта управления (матриц  $A$  и  $C$ ) и оператора  $L(t)$  выбор которой определяется проектировщиком. Для полностью наблюдаемого объекта, выбором оператора  $L(t)$  можно обеспечить устойчивость и требуемое быстродействие процесса оценивания. При отсутствии сигнала коррекции ( $L=0$ ) динамика процесса оценивания, полностью определяется динамикой объекта. В частности для неустойчивых и нейтрально-устойчивых объектов асимптотическое оценивание было бы неосуществимо. Оператор  $G(t)$ , а следовательно и  $L(t)$ , влияет также на точность процесса оценивания при внешних воздействиях. Это влияние оказывается разным по отношению к возмущениям  $f(t)$ , с одной стороны, и помехам измерений  $v(t)$  - с дру-

гой. Поэтому при определении  $L(t)$  следует учитывать характеристики внешних воздействий и обеспечивать компромисс между требованиями быстрогодействия и точности системы.

Синтез наблюдателя заключается в выборе оператора  $L$ . Выбираем оператор  $L$  в форме

$$L(t) = (x_1(t) - \hat{x}_1(t))^2 - k = (\varepsilon_1(t))^2 - k, \quad (4)$$

С учетом (4) система (3) в развернутой форме записывается в виде

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1(t) = \varepsilon_2(t) \\ \dot{\varepsilon}_2(t) = \varepsilon_3(t) \\ \vdots \\ \dot{\varepsilon}_n(t) = -c_1 \varepsilon_1^3(t) + (c_1 k - a_n) \varepsilon_1(t) - a_{n-1} \varepsilon_2(t) - \dots - a_1 \varepsilon_n(t) \end{cases} \quad (5)$$

Стационарные (установившиеся) состояния системы определяются решением уравнения

$$\begin{cases} \varepsilon_{2s} = 0, \varepsilon_{3s} = 0, \dots, \varepsilon_{n-1s} = 0, \varepsilon_{ns} = 0 \\ -c_1 \varepsilon_{1s}^3 + (c_1 k - a_n) \varepsilon_{1s} - a_{n-1} \varepsilon_{2s} - \dots - a_1 \varepsilon_{ns} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Из (6) получаем стационарные состояния системы:

$$\varepsilon_{1s}^1 = 0, \varepsilon_{2s} = 0, \dots, \varepsilon_{ns} = 0 \quad (7)$$

Другие стационарные состояния системы будут определяться решением уравнения:

$$-\varepsilon_{1s}^2 - \left( \frac{a_n}{c_1} - k \right) = 0, \varepsilon_{2s} = 0, \varepsilon_{3s} = 0, \dots, \varepsilon_{ns} = 0, \quad (8)$$

При  $k - \frac{a_n}{c_1} > 0$ , уравнения (8) допускает следующие установившиеся состояния:

$$\varepsilon_{1s}^2 = \sqrt{k - \frac{a_n}{c_1}}, \varepsilon_{2s} = 0, \varepsilon_{3s} = 0, \dots, \varepsilon_{ns} = 0 \quad (9)$$

$$\varepsilon_{1s}^3 = -\sqrt{k - \frac{a_n}{c_1}}, \varepsilon_{2s} = 0, \varepsilon_{3s} = 0, \dots, \varepsilon_{ns} = 0 \quad (10)$$

При отрицательном  $k - \frac{a_n}{c_1}$  (т.е.  $k - \frac{a_n}{c_1} < 0$ ) уравнения (8) имеет мнимое решение, что не может соответствовать какой-либо физически возможной ситуации.

Решения (9) и (10) сливаются с решением (7) при  $k - \frac{a_n}{c_1} = 0$  и ответвляются

от них при  $k - \frac{a_n}{c_1} > 0$  т.е. в точке  $k - \frac{a_n}{c_1} = 0$  происходит бифуркация (рис.2)

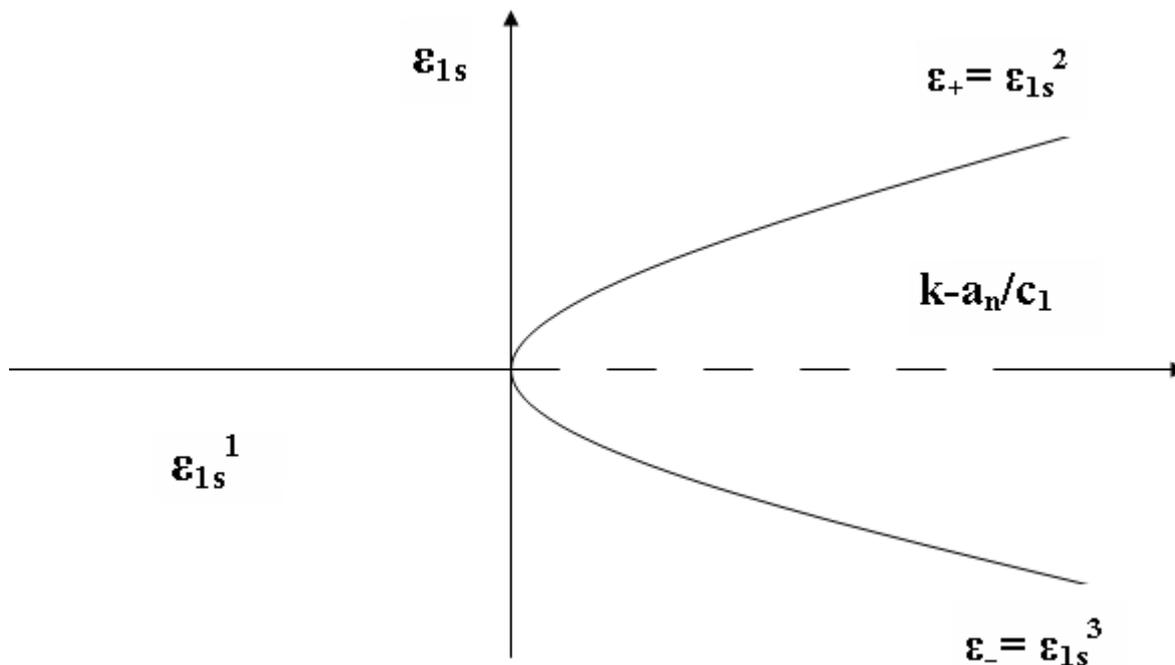


Рис.2

На графике сплошной и штриховой линиями обозначены соответственно асимптотически устойчивое и неустойчивое состояние системы. Оказывается, что состояние (8) является глобально асимптотически устойчивым при  $k - \frac{a_n}{c_1} < 0$  и неустой-

чивым при  $k - \frac{a_n}{c_1} > 0$ . Состояния (9) и (10) асимптотически устойчивы (но не глобальны). Иными словами, ветви (9) и (10) появляются в результате бифуркации в тот момент, когда установившееся состояние наблюдающего устройства (7) теряет устойчивость, причем сами эти ветви устойчивы [7].

Проверку приведенных высказываний проведем с помощью идей второго метода Ляпунова т.е. разработаем метод исследования устойчивости данной системы базирующееся на идее второго метода А.М.Ляпунова.

Универсальным методом исследования устойчивости динамической системы является второй метод А.М.Ляпунова. В качестве инструмента исследования, в которых используются некоторые специальные функции, называемые функциями Ляпунова и базируются на двух теоремах А.М.Ляпунова.

Теоремы Ляпунова имеют простое геометрическое истолкование. Это не только выясняет основное содержание теорем, но она может быть использована для решения задачи построения функции Ляпунова.

Допустим, что существует положительно-определенная функция  $V(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  для которой  $dV/dt < 0$  и рассмотрим какую-нибудь интегральную кривую уравнения (5) выходящую в начальный момент времени из какой – нибудь точки окрестности начало координат. Если  $dV/dt$  есть функция отрицательно-определенная ( $dV/dt < 0$ ), то каждая интегральная кривая, выходящая из достаточно малой окрестности начало координат, будет непременно пересекать каждую из поверхностей  $V(\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_n(t)) = C, C = const$  снаружи во внутрь, так как функция  $V(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \dots, \varepsilon_n(t)) = C$  должна непрерывно убывать. Но в таком случае интегральные кривые должны неограниченно приближаться к началу координат, т.е. невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Пусть допустим, что существует функция Ляпунова  $V_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), i = 1, 2, \dots, n$ , для которой антиградиент  $-\partial V_i / \partial \varepsilon$  задается вектором скорости системы (4) т.е. через:

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = -\left( \frac{\partial V_i}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial V_i}{\partial \varepsilon_2} + \dots + \frac{\partial V_i}{\partial \varepsilon_n} \right)$$

Обозначим компоненты вектора градиента для вектора - функций  $V_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), V_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \dots, V_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  через:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} = 0, \frac{\partial V_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_2} = -\varepsilon_2(t), \frac{\partial V_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} = 0, \dots, \frac{\partial V_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_n} = 0 \\ \frac{\partial V_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} = 0, \frac{\partial V_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_2} = 0, \frac{\partial V_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} = -\varepsilon_2(t), \dots, \frac{\partial V_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_n} = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \frac{\partial V_{n-1}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} = 0, \frac{\partial V_{n-1}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_2} = 0, \frac{\partial V_{n-1}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} = 0, \dots, \frac{\partial V_{n-1}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_n} = -\varepsilon_n(t) \\ \frac{\partial V_n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} = c_1 \varepsilon_1^3(t) + (c_1 k - a_n) \varepsilon_1(t), \frac{\partial V_n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_2} = a_{n-1} \varepsilon_2(t) \\ \frac{\partial V_n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} = a_{n-2} \varepsilon_3(t), \dots, \frac{\partial V_n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_n} = a_1 \varepsilon_n(t) \end{array} \right. \quad (11)$$

Полная производная по времени от вектор-функции Ляпунова  $V(\varepsilon)$  с учетом уравнений состояния (5) определяется как скалярное произведение градиента функций Ляпунова на вектор скорости т.е.

$$\begin{aligned} \frac{dV(\varepsilon)}{dt} &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon_i}{dt} = \\ &= -\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 - \dots - \varepsilon_n^2 - \left[ -c_1 \varepsilon_1^3 + (c_1 k - a_n) \varepsilon_1 - a_{n-1} \varepsilon_2 - \dots - a_1 \varepsilon_n \right]^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда из (12) имеем, что полное производное по времени от функций Ляпунова всегда получается знакоотрицательной функцией, т.е. достаточное условие устойчивости всегда будет выполняться.

Теперь по компонентам вектора градиента можем построить потенциальную функцию, т.е. функцию Ляпунова.

$$V(\varepsilon) = \frac{1}{4}c_1\varepsilon_1^4(t) + \frac{1}{2}(c_1k - a_n)\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}(a_{n-1} - 1)\varepsilon_2^2(t) + \frac{1}{2}(a_{n-2} - 1)\varepsilon_3^2(t) + \dots + \frac{1}{2}(a_1 - 1)\varepsilon_n^2(t) \quad (13)$$

Положительная определенность функций Ляпунова будет определяться условиями: при  $c_1 > 0$

$$\begin{cases} -\infty < k < a_n / c_1 \\ 1 < a_{n-1} \\ 1 < a_{n-2} \\ \vdots \\ 1 < a_1 \end{cases} \quad (14)$$

Таким образом, за счет введения закона управления в форме скалярной однопараметрической структурно-устойчивых отображений при неопределенности параметра объекта управления стационарное состояние (7) будет устойчивой при изменении параметров системы в пределах неравенства (14).

При потере устойчивости стационарного состояния (7) наблюдающего устройства появляются новые стационарные состояния (9) и (10), которые появляются при  $k - a_n / c > 0$ .

Исследуем устойчивость этих стационарных состояний.

Выписываем уравнения состояния наблюдающего устройства (5) относительно установившегося состояния (9) и (10):

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1(t) = \varepsilon_2(t) \\ \dot{\varepsilon}_2(t) = \varepsilon_3(t) \\ \vdots \\ \dot{\varepsilon}_{n-1}(t) = \varepsilon_n(t) \\ \dot{\varepsilon}_n(t) = -c_1\varepsilon_1^3(t) - 2(c_1k - a_n)\varepsilon_1(t) - a_{n-1}\varepsilon_2(t) - a_{n-2}\varepsilon_3(t) - \dots - a_1\varepsilon_n(t) \end{cases} \quad (15)$$

Предполагая, что вектор градиента от искомой функции Ляпунова и вектор скорости системы (15) по величине одинаковы и имеет противоположное направление, находим компоненты вектора градиента

$\partial V_i / \partial \varepsilon_j$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ) от вектор функций Ляпунова

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} = 0, \frac{\partial V_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_2} = -\varepsilon_2(t), \frac{\partial V_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} = 0, \dots, \frac{\partial V_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_n} = 0 \\ \frac{\partial V_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} = 0, \frac{\partial V_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_2} = 0, \frac{\partial V_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} = -\varepsilon_3(t), \dots, \frac{\partial V_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_n} = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \frac{\partial V_n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_1} = c_1 \varepsilon_1^3(t) - 2(c_1 k - a_n) \varepsilon_1(t), \frac{\partial V_n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_2} = a_{n-1} \varepsilon_2(t) \\ \frac{\partial V_n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} = a_{n-2} \varepsilon_3(t), \dots, \frac{\partial V_n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_n} = a_1 \varepsilon_n(t) \end{array} \right. \quad (16)$$

Полная производная от искомой функции Ляпунова

$$\frac{dV(\varepsilon)}{dt} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x} \frac{dx_i}{dt} = -\varepsilon_2^2(t) - \varepsilon_3^2(t) - \dots - \varepsilon_n^2(t) - [-c_1 \varepsilon_1^3(t) - 2(c_1 k - a_n) \varepsilon_1(t) - a_{n-1} \varepsilon_2(t) - a_{n-2} \varepsilon_3(t) - \dots - a_1 \varepsilon_n(t)]^2 \quad (17)$$

Условия отрицательности полной производной по времени от функции Ляпунова всегда будет выполняться.

По компонентам вектора градиента от вектора функций Ляпунова получим функции Ляпунова в скалярной форме

$$V(\varepsilon) = V_1(\varepsilon) + V_2(\varepsilon) + \dots + V_n(\varepsilon) = \frac{1}{4} c_1 \varepsilon_1^4(t) - 2(c_1 k - a_n) \varepsilon_1^2(t) + \frac{1}{2} (a_{n-1} - 1) \varepsilon_2^2(t) + \frac{1}{2} (a_{n-2} - 1) \varepsilon_3^2(t) + \dots + \frac{1}{2} (a_1 - 1) \varepsilon_n^2(t) \quad (18)$$

Положительная определенность функций (18) определяется условием при  $c_1 > 0$ , т.е. робастная устойчивость стационарных состояний (9) и (10) задается областью

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{a_n}{c_1} < k < \infty \\ 1 < a_{n-1} \\ 1 < a_{n-2} \\ \vdots \\ 1 < a_1 \end{array} \right. \quad (19)$$

Отсюда видно, что выбирая значения коэффициента  $k$  можно регулировать робастную устойчивость наблюдающего устройства вокруг стационарных состояний (8), (9) и (10). В полученных областях (14) и (19) наблюдающее устройство с неопределенным параметрам  $a_n$  будет асимптотически устойчивым при любых изменениях

этого параметра, т.е. оценка вектора состояния всегда быстро будет сходиться к истинному значению.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Автоматизированное проектирование систем автоматического управления. / Под ред. В.В.Солодовникова.-М.: Машиностроение, 1990. – 332 с.
2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами.М.: Наука, 1976. – 424 с.
3. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. – 184 с.
4. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. - М.: Наука, 2002. – 303 с.
5. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости.-М.: Наука, 1967. – 225 с.
6. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. 2-е изд.-М.: Наука, 1966. – 540 с.
7. Бейсенби М.А., Ержанов Б.А. Системы управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости. Астана, изд.-ЕНУ им Л.Н. Гумилева
8. 2002 – 164с.
9. Бейсенби М.А., Кульниязова К.С. Исследование робастной устойчивости систем управления прямым методом А.М. Ляпунова. Тезисы докладов, Международной 11-ой межвузовской конференции по математике и механике, посвященной 10-летию Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева (25-26 мая, г. Астана). – 14 с.
10. Гильмор Р. Прикладная теория катастроф.-М.: Мир, Т.1, 1981. – 344 с.