

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КРУПНЫХ ВИХРЕЙ

А.А. Исахов

Аннотация

В работе рассматривается моделирование турбулентного перемешивания. На основе уравнений Навье - Стокса построена математическая модель процесса в кубической области. Разработан численный алгоритм с использованием схемы расщепления по физическим параметрам. Результаты моделирования представлены в виде трехмерных графиках. В настоящей работе построен и реализован алгоритм для решения трехмерного уравнения Пуассона.

Турбулентное движение является наиболее распространенной формой движения жидкостей и газов в природе и в технических устройствах. Важную с практической точки зрения группу составляют задачи о течениях вязких жидкостей и газов, описываемых уравнениями Навье – Стокса [1].

В случае течений с большим градиентами, особо важную роль играет свойство алгоритма не искажать получаемые в процессе счета сеточные решения схемными осцилляциями. Если это условие не выполняется, то процесс вычислений может быть либо сильно осложнен, либо вообще невозможен. Наконец, порядок аппроксимации конвективных членов в уравнениях, описывающих течение с вязкостью, должен превышать первый порядок в противном случае либо существует опасность искажения решений из-за схемной вязкости, либо пространственные шаги сетки следует выбирать неразумно малыми.

В настоящей работе рассмотрена задача вентиляции помещения. Математическая модель данного процесса основана на уравнениях Навье – Стокса описывающих трехмерные нестационарные турбулентные течения и имеют следующий вид[2]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Уравнения (1) – (2) записаны в безразмерном виде; плотность включена в число Рейнольдса Re. При помощи уравнение (2) левые части (1) записаны в консервативном виде. Для нестационарных течений определены начальные и граничные условия удовлетворяющие уравнению(2) [2].

Применяя метод крупных вихрей(LES) осредненный по пространству получаем уравнения Навье – Стокса с дополнительным членом τ_{ij}

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4)$$

$$\text{где } \tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (5)$$

В качестве модели турбулентности используется динамическая модель Смагоринского[5]. Для применения динамической модели проводится двойное осреднение с длиной фильтра $\bar{\Delta} = 2\Delta$, тогда

$$\frac{\overline{\partial u_i}}{\partial t} + \frac{\overline{\partial u_j u_i}}{\partial x_j} = -\frac{\overline{\partial p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{\partial u_i}}{\partial x_j} \right) - \frac{\overline{\partial \tau_{ij}}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial(u_j u_i - u_j u_i)}}{\partial x_j} \quad (6)$$

Уравнение (1), подвергнутое осреднению с двумя фильтрами длиной $\bar{\Delta}$ и Δ соответственно, имеет следующий вид:

$$\frac{\overline{\partial u_i}}{\partial t} + \frac{\overline{\partial u_j u_i}}{\partial x_j} = -\frac{\overline{\partial p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{\partial u_i}}{\partial x_j} \right) - \frac{\overline{\partial \tau_{ij}}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial T_{ij}}}{\partial x_j} \quad (7)$$

где $T_{ij} = \overline{u_j u_i} - \overline{u_j} \overline{u_i}$, из (6) и (7) следует $T_{ij} = \overline{\tau_{ij}} + \overline{u_j u_i} - \overline{u_j} \overline{u_i}$, тогда T_{ij} имеет следующий вид: $T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk} = -2(C_s \bar{\Delta})^2 (2s_{ij} s_{ij})^{1/2} \overline{s_{ij}}$, а напряжения Леонарда имеют вид:

$$L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} = -2(C_s)^2 \left[(\bar{\Delta})^2 (2s_{ij} s_{ij})^{1/2} \overline{s_{ij}} - (\Delta)^2 (2s_{ij} s_{ij})^{1/2} \overline{s_{ij}} \right] \quad (8)$$

Из (7) при использовании метода наименьших квадратов находится значение C_s в

$$\text{виде } C_s^2 = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{lk} M_{lk}}, \text{ где } M_{ij} = \left[(\bar{\Delta})^2 (2s_{ij} s_{ij})^{1/2} \overline{s_{ij}} - (\Delta)^2 (2s_{ij} s_{ij})^{1/2} \overline{s_{ij}} \right]$$

Численное решение системы (3) – (4) проводится на разнесенной сетке с использованием схемы против потока второго типа и компактной аппроксимации для конвективного члена[2-6]. Для решения задачи с учетом выше предложенной модели турбулентности используется схема расщепления по физическим параметрам.

Предлагается следующая физическая интерпретация приведенной схемы расщепления. На первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии. Промежуточное поле скорости находится методом дробных шагов, при использовании метода прогонки. На втором этапе, по найденному промежуточному полю скорости, находится поле давления. Уравнение Пуассона для поля давления решается методом Фурье в сочетании с методом матричной прогонки, которая применяется для определения коэффициентов Фурье. На третьем этапе предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления. Алгоритм задачи распараллелен на высокопроизводительной систем-мех[7,8].

$$\text{I) } \frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{\tau} = -(\nabla \vec{u}^n \vec{u}^* - \nu \Delta \vec{u}^*)$$

$$\text{II) } \Delta p = \frac{\nabla \vec{u}^*}{\tau}$$

$$\text{III) } \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\tau} = -\nabla p.$$

Уравнение Пуассона для поля давления находится в таком виде:

$$\frac{p_{i+1,j,k} - pu_{i,j,k} + p_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \frac{p_{i,j,k+1} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} = F_{i,j,k} \quad (9)$$

К уравнению Пуассона применяем метод Фурье, согласно которому, для любой сеточной функции $f(i)$ имеет место разложение

$$f(i) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^N \rho_k \phi_k \cos \frac{\pi k i}{N}, i = 0, 1, \dots, N,$$

где

$$\phi_k = \sum_{i=0}^N \rho_i f(i) \cos \frac{\pi k i}{N}, k = 0, 1, \dots, N,$$

$$\rho_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq N-1 \\ 0.5, & i = 0, N \end{cases}$$

Согласно данным соотношениям имеем:

$$p_{i,j,k} = \frac{2}{N_3} \sum_{l=0}^{N_3} \rho_l a_{i,j,l} \cos \frac{\pi k l}{N_3}, F_{i,j,k} = \frac{2}{N_3} \sum_{l=0}^{N_3} \rho_l b_{i,j,l} \cos \frac{\pi k l}{N_3}, \quad (10)$$

где

$$a_{i,j,l} = \sum_{k=0}^{N_3} \rho_k p_{i,j,k} \cos \frac{\pi k l}{N_3}, b_{i,j,l} = \sum_{k=0}^{N_3} \rho_k F_{i,j,k} \cos \frac{\pi k l}{N_3}, \quad (11)$$

Подставляя выражения (10) в уравнение (9) и используя формулу

$$\cos \frac{\pi(k+1)l}{N_3} + \cos \frac{\pi(k-1)l}{N_3} = 2 \cos \frac{\pi k l}{N_3} \cos \frac{\pi l}{N_3}$$

производим упрощение, после чего полученное выражение запишем при фиксированном значении $k=1$ и разделим на величину $\frac{2}{N_3} \rho_l a_{i,j,l} \cos \frac{\pi k l}{N_3}$:

$$\frac{a_{i+1,j} - 2a_{i,j} + a_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{a_{i,j+1} - 2a_{i,j} + a_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \frac{a_{i,j}}{\Delta z^2} (2 \cos \frac{\pi l}{N_3} - 2) + 10a_{i,j} = b_{i,j} \quad (12)$$

Данное уравнение преобразуется к следующему виду:

$$-\frac{a_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \left[\left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} - \frac{1}{\Delta z^2} \left(2 \cos \frac{\pi l}{N_3} - 2 \right) - 10 \right) a_{i,j} - \frac{a_{i+1,j} + a_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right] - \frac{a_{i,j+1}}{\Delta y^2} = -b_{i,j}$$

Как известно, метод матричной прогонки относится к прямым методам решения разностных уравнений и применяется к уравнениям, которые можно записать в виде системы векторных уравнений

$$-A_j \vec{a}_{j-1} + B_j \vec{a}_j - C_j \vec{a}_{j+1} = \vec{F}_j, j=1, 2, \dots, N_2 - 1, \quad (13)$$

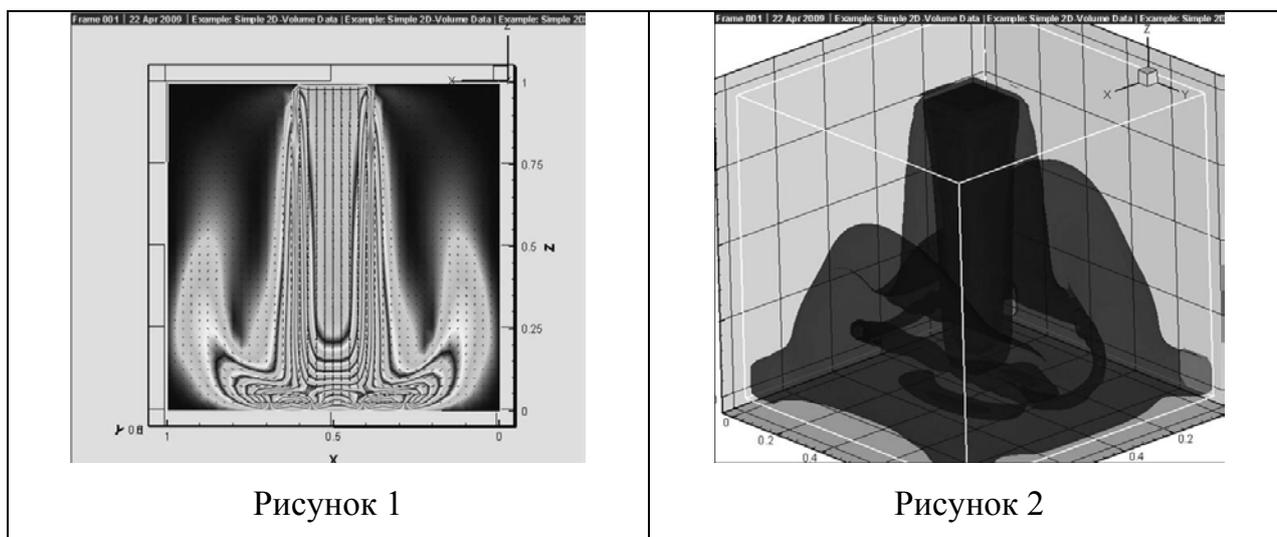
где матрицы A_j, B_j, C_j и векторы \vec{F}_j, \vec{a}_j имеют следующий вид:

$$\alpha_{j+1} = (B_j - A_j \alpha_j)^{-1} C_j, j=1, 2, \dots, N_2 - 1, \alpha_1 = B_0^{-1} C_0 \quad (14)$$

$$\vec{\beta}_{j+1} = (C_j - A_j \alpha_j)^{-1} (\vec{F}_j + A_j \vec{\beta}_j), j=1, 2, \dots, N_2 - 1, \vec{\beta}_1 = B_0^{-1} \vec{F}_0 \quad (15)$$

$$-A_j \vec{a}_{j-1} + B_j \vec{a}_j - C_j \vec{a}_{j+1} = \vec{F}_j, j=1, 2, \dots, N_2 - 1, \vec{a}_{N_2} = \vec{\beta}_{N_2+1} \quad (16)$$

После нахождения коэффициентов $\alpha_{i,j,k}$ значения поля давления находятся из формулы (10). Для вычисления суммы (10) и (11) применяется метод быстрого преобразования Фурье, который позволяет вычислить данные суммы за $O(N \ln N)$ действий, что существенно сокращает вычислительное время.



На рисунках представлены результаты расчетов полученные на сетке $100 \times 100 \times 100$. На рисунке 1 показана вдуваемая струя ударяющаяся об нижнюю область и вызывает циркуляционное течение у стен. На рисунке 2 показано изоповерхность течение выходного потока воздуха на нижней границе области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
2. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах: Т.2. – М.: Мир, 1991. – 552 с.

3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1972. – 612 с.
4. Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1990. – 230 с.
5. Пейре Р., Тейлор Т. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. – 352 с.
6. Яненко Н.Н. Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физике. – Н: Наука, 1967. – 197 с.
7. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологий MPI. МГУ, 2004. – 71 с.
8. Шпаковский Г.И., Серикова Н.В. Программирование для многопроцессорных систем в стандарте MPI. Минск: БГУ, 2002. – 323 с.