ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ЭНТРОПИИ СЛОЖНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.Ш. Кажикенова
Карагандинский государственный технический университет, Караганда, Казахстан
e-mail: sauleshka555@mail.ru

Алгоритмы вычисления информационной емкости системы, предложенные Шенноном, позволяют выявить соотношение количества детерминированной информации и количества стохастической информации, а тем самым дать возможность определить качественную и количественную оценку определенной технологической схемы. При общей характеристике энтропийно-информационного анализа любых объектов широко используется статистическая формула Шеннона для выражения неопределенности любой системы [1]:

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i , \qquad (1)$$

где p_i – вероятность обнаружения элемента системы; $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,2,..., N$.

В качестве вероятности обнаружения главного элемента технологической системы можно принять его содержание в продукте, выраженное в долях единицы. Например, это содержание извлекаемого химического элемента в продуктах технологического передела. То же самое относится и к процессу извлечения элемента в тот или иной продукт, так как в этом случае показатель извлечения тождествен вероятности перехода данного элемента из одного состояния системы в другое состояние. Для оценки качества продукта или технологических переделов могут быть в равной степени использованы оба этих показателя – содержание и извлечение. Рассмотрим применение информационной формулы Шеннона для двух независимых технологических систем A и B. Из независимости A и B следует, что в сложной технологической системе они никак не могут повлиять друг на друга и, в частности A, не может оказать воздействия на неопределенность B, и наоборот. Справедлива

Теорема 1 Неопределенность сложной технологической схемы, состоящей из нескольких независимых систем, равна сумме неопределенностей отдельных систем.

Доказательство. Пусть $p(A_1), p(A_2),..., p(A_N)$ и $p(B_1), p(B_2),..., p(B_M)$ вероятности обнаружения элементов A и B в их множествах N и M соответственно. Сложная технологическая система $A \cap B$ имеет $N \cdot M$ исходов типа $A_i \cap B_j$, где $i = 1,2,..., N$; $j = 1,2,..., M$. Следовательно, на основании информационной формулы Шеннона:

$$H(A \cap B) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(A_i \cap B_j)\log_2 p(A_i \cap B_j) \qquad (2)$$

Поскольку A и B – независимы, то независимыми окажутся исходы в любой паре $A_i B_j$. Тогда:

$$p(A_i \cap B_j) = p(A_i) \cdot p(B_j). \tag{3}$$

Прологарифмируем обе части уравнения (3):

$$\log_2 p(A_i \cap B_j) = \log_2 p(A_i) + \log_2 p(B_j), \tag{4}$$

Полученное выражение подставим в равенство (2). В результате имеем:

$$H(A \cap B) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(A_i)p(B_j)(\log_2 p(A_i) + \log_2 p(B_j)) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(A_i)p(B_j)\log_2 p(A_i) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(A_i)p(B_j)\log_2 p(B_j) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} p(A_i)\log_2 p(A_i)\sum_{j=1}^{M} p(B_j) - \sum_{j=1}^{M} p(B_j)\log_2 p(A_j)\sum_{i=1}^{N} p(A_i).$$

В слагаемых произведено изменение порядка суммирования в соответствии со значениями индексов. Далее, по условиям нормировки:

$$\sum_{i=1}^{N} p(A_i) = 1, \qquad \sum_{j=1}^{M} p(B_j) = 1, \tag{5}$$

с учетом формулы Шеннона (1):

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{N} p(A_i)\log p(A_i), \tag{6}$$

$$H(B) = -\sum_{j=1}^{M} p(B_j)\log p(B_j). \tag{7}$$

окончательно получим:

$$H(A \cap B) = H(A) + H(B). \tag{8}$$

Что и требовалось доказать.

Определим неопределенность сложной технологической схемы $A \cap B$ в том случае, если системы A и B не являются независимыми.

Теорема 2 Неопределенность сложной технологической схемы $A \cap B$ в том случае, если A и B являются зависимыми, равна сумме энтропии первой и второй систем, вычисленную в предположении, что первая система реализована.

Доказательство. Зависимость между системами A и B приводит к тому, что некоторые пары исходов $A_i \cap B_j$ не являются независимыми. Но тогда в равенстве

(6.4) выражение $p(A_i \cap B_j)$ следует заменять не произведением вероятностей, а, согласно понятию условной вероятности на равенство:

$$p(A_i \cap B_j) = p(A_i) \cdot p_{A_i}(B_j), \tag{9}$$

где $p_{A_i}(B_j)$– вероятность наступления исхода B_j при условии, что имел место исход A_i. В данном случае прологарифмировав обе части выражения (9) получим:

$$\log_2 p(A_i \cap B_j) = \log_2 p(A_i) + \log_2 p_{A_i}(B_j). \tag{10}$$

Подстановка соотношения (10) в (2) дает следующий результат:

$$H(A \cap B) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(A_i) p_{A_i}(B_j)\left(\log_2 p(A_i) + \log_2 p_{A_i}(B_j)\right) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(A_i) p_{A_i}(B_j)\log_2 p(A_i) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(A_i) p_{A_i}(B_j)\log_2 p_{A_i}(B_j) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{N} p(A_i)\log_2 p(A_i)\sum_{j=1}^{M} p_{A_i}(B_j) - \sum_{j=1}^{M} p_{A_i}(B_j)\log_2 p_{A_i}(B_j)\sum_{i=1}^{N} p(A_i).$$

В первом слагаемом сомножитель $\sum_{j=1}^{M} p_{A_i}(B_j)$ представляет собой условную вероятность системы B и удовлетворяет условию:

$$\sum_{j=1}^{M} p_{A_i}(B_j) = p_{A_i}\sum_{j=1}^{M} B_j = 1,$$

поскольку $\sum_{j=1}^{M} B_j$ образует достоверное событие.

Условную энтропию технологической системы B при условии, что в системе A реализован исход A_i будем определять соотношением:

$$H_{A_i}(B) = -\sum_{j=1}^{M} p_{A_i}(B_j)\log_2 p_{A_i}(B_j) \tag{11}$$

Тогда второе слагаемое будет иметь вид:

$$\sum_{i=1}^{N} p(A_i) \cdot H_{A_i}(B) = H_A(B). \tag{12}$$

где $H_A(B)$–средняя условная энтропия системы B при условии, что реализована система A.

Окончательно получаем для технологической схемы $A \cap B$ в том случае, если системы A и B не являются независимыми:

$$H(A \cap B) = H(A) + H_A(B). \tag{13}$$

Что и требовалось доказать.

Полученное выражение представляет собой общее правило нахождения энтропии сложной системы. Совершенно очевидно, что выражение (8) является частным случаем (13) при условии независимости систем A и B.

Условная энтропия технологической системы обладает следующими свойствами:

1 Условная энтропия является величиной неотрицательной.

2 $H_A(B) = 0$ тогда и только тогда, когда любой исход технологической системы A полностью определяет исход системы B, то есть:

$$H_{A_1}(B) = H_{A_2}(B) = \ldots = H_{A_N}(B) = 0.$$

В этом случае:

$$H(A \cap B) = H(A). \tag{14}$$

3 Если системы A и B независимы, то:

$$H_A(B) = H(B),$$

причем эта величина оказывается наибольшим значением условной энтропии.

Приведенные утверждения можно объединить одним неравенством:

$$0 \le H_A(B) \le H(B), \tag{15}$$

что означает, что условная энтропия не превосходит безусловную.

4 Из соотношений (13) и (15) следует, что:

$$H(A \cap B) \le H(A) + H(B), \tag{16}$$

причем равенство реализуется только в том случае, если системы A и B независимы.

Разность $H(B)$ и $H_A(B)$ называется информацией технологической схемы относительно технологической системы B, содержащейся в системе A:

$$I(A \cap B) = H(B) - H_A(B). \tag{17}$$

Следствием аддитивности энтропии независимых систем оказывается аддитивность информации. В данном случае принцип максимума энтропии [2] можно сформулировать следующим образом:

- энтропия технологической схемы максимальна, именно, при равномерном распределении вероятностей;

- всякое отклонение от равномерности приводит к уменьшению энтропии технологической схемы:

$$H(A \cap B) = H(A) + H(B) - I(A \cap B). \tag{18}$$

Следовательно, на основании формул (15), (16) справедлива оценка:

$$H_{\max}(A \cap B) \le H_{\max}(A) + H_{\max}(B) \le \log_2 N + \log_2 M .$$

Для вычисления условной энтропии технологической системы воспользуемся определением условной вероятности события $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$. Тогда условная энтропия технологической системы B при условии реализации A определяется соотношением:

$$H_A(B) = -\sum_{j=1}^{M} p_{A_i}(B_j) \log_2 p_{A_i}(B_j) \sum_{i=1}^{N} p(A_i) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{M} \frac{p(A_i, B_j)}{p(A_i)} \log_2 \frac{p(A_i, B_j)}{p(A_i)} \sum_{i=1}^{N} p(A_i) = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(A_i, B_j) \log_2 \frac{p(A_i, B_j)}{p(A_i)}.$$

Аналогично определяется условная энтропия технологической системы A при условии реализации B:

$$H_B(A) = -\sum_{i=1}^{N} p_{B_j}(A_i) \log_2 p_{B_j}(A_i) \sum_{i=1}^{M} p(B_j) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \frac{p(A_i, B_j)}{p(B_j)} \log_2 \frac{p(A_i, B_j)}{p(B_j)} \sum_{j=1}^{M} p(B_j) = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(A_i, B_j) \log_2 \frac{p(A_i, B_j)}{p(B_j)}.$$

Данные расчеты применимы и для технологических схем с большим числом систем. Таким образом, предложенные формулы энтропийно-инфомационного анализа технологических схем позволят осуществить переход от сингулярного приближения информационной энтропии Шеннона к локальной и далее к полной для учета самых различных элементов множества в самоорганизующейся системе. Тем самым установлены предпосылки энтропийно-нформационного анализа технологических схем переработки металлургического сырья с учетом всех ценных компонентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shannon K.E. Mathematical theory of connection // Works on the theory of the information and cybernetics. - M.: SILT, 1963. With. 243-332pp.
2. Hartley R. Transfer of the information / the Theory of the information and its appendix. - M.: SILT, 1959. With. 5-35pp.