# ОБ ОПРЕДЕЛИМОСТИ 1-ТИПОВ НАД МОДЕЛЬЮ УПОРЯДОЧЕННО СТАБИЛЬНОЙ ТЕОРИИ

**В.В. Вербовский**
*Институт проблем информатики и управления МОН РК, Алматы, Казахстан*
e-mail: vvv@ipic.kz

В данной статье исследуется сравнительно новый класс теорий — упорядоченно-стабильных. Этот класс является соединением понятий стабильности и слабой о-минимальности и, таким образом, обобщением слабой о-минимальности. Идея введения этого класса заключается в следующем. Известно, что любое сечение в модели о-минимальной теории определяет полный тип. Для слабо о-минимальных теорий сечение имеет максимум два пополнения до полных типов над моделью. Для квази о-минимальных любое сечение имеет самое большее континуум расширений до полных типов. Таким образом было бы интересно применять теорию стабильности внутри сечения. Известно, что в стабильных теориях число типов (а точнее, $\varphi$-типов) ограничено мощностью множества, над которым оно определено. В случае, если же есть порядок, число сечений может быть больше, чем мощность модели, то есть теории с порядком не являются стабильными. Но можно предположить, что порядок, в некотором смысле, является единственной «плохой» формулой, то есть единственной формулой, которая нарушает стабильность. А именно: любое сечение над моделью полной теории с линейным порядком имеет малое число пополнений до полных типов над моделью (или над множеством). В работе автора [1] было доказано, что упорядоченно-стабильные теории являются зависимыми, а это значит, что мы находимся внутри вышеописанного класса зависимых теорий. Как было показано в [2], упорядоченно-стабильные теории не исчерпывают всех зависимых теорий. Существует более сложные теории. Но, по крайней мере, они объединяют единой идеологией такие замечательные классы как класс о-минимальных теорий, слабо о-минимальных теорий и квази-о-минимальных теорий. Идеология эта берёт своё начало в теории стабильности. В данной статье доказан критерий того, что 1-тип над моделью упорядоченно стабильной теории является определимым.

Символы $a$, $b$ и $x$, $y$ обозначают элементы и переменные, соответственно, а символы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и, $\bar{x}$, $\bar{y}$ — кортежи элементов и переменных. Запись $F(\bar{x};\bar{y})$ обозначает, что $\bar{x}$ — это кортеж переменных, а $\bar{y}$ — это кортеж переменных, вместо которых будут подставляться параметры. Таким образом, если длина $len(\bar{x})$ кортежа $\bar{x}$ равна $n$, то будем говорить, что $F(\bar{x};\bar{y})$ — формула с $n$ свободными переменными.

Вспомним определение Шелаха из работы [4]: говорят, что формула $F(\bar{x};\bar{y})$ обладает *свойством независимости*, если для любого натурального положительного числа $n$ существуют такие кортежи $\bar{b}_j$, где $j<n$, что для любой функции $\tau:\{0,1,\dots n-1\}\to\{0,1\}$ существует кортеж $\bar{a}_\tau$, такой что предложение $F(\bar{a}_\tau;\bar{b}_j)$ истинно, если и только если $\tau(i)=1$. Теория обладает *свойством независимости*, если некоторая формула языка этой теории обладает свойством независимости. Говорят, что теория *зависима*, если она не обладает свойством независимости.

**Факт 1.** [4] Теория обладает свойством независимости, если и только если существует формула $F(x;\bar{y})$ с одной свободной переменной $x$, обладающая свойством независимости.

Пусть **M** = ($M$,$L$) будет некоторой линейно упорядоченной структурой. Для подмножеств $A$ и $B$ множества $M$ будем писать $A<B$, если каждый элемент из первого множества меньше каждого элемента из второго. Разбиение ($A$,$B$) множества $M$ называется *сечением*, если $A<B$. Также под сечением $A<B$ мы будем понимать следующий частичный тип:

$$\{a < x < b : a \in A,\ b \in B\}$$

Как правило, из контекста будет ясно, что именно подразумевается под сечением — разбиение специального вида или частичный тип, поэтому специально я не буду оговаривать, о чём идёт речь. Кроме того, по разбиению единственным образом можно построить частичный тип, так же как и по частичному типу — восстановить разбиение.

Пусть $A$ — некоторое подмножество упорядоченного множества $M$. *Выпуклым замыканием* множества $A$ мы назовём такое множество $B$, что каждый его (то есть $B$) элемент лежит в замкнутом интервале $[a_1, a_2]$, где элементы $a_1$ и $a_2$ лежат в множестве $A$. Мы будем обозначать выпуклое замыкание множества $A$ с помощью $A^c$.

Заметим, что если множество определимо, то и его выпуклое замыкание определимо, причём над теми же параметрами. Таким образом, будем писать $F^c(x)$ для выпуклого замыкания формулы $F(x)$. Очевидно, что

$$F^c(x) := \exists y \exists z (F(y) \wedge F(z) \wedge y \le x \le z)$$

Пусть $p$ — некоторый тип над множеством $A$. *Выпуклым замыканием* типа $p$ мы назовём следующий частичный тип:

$$p^c := \{F^c(x) : F(x) \in p\},$$

а *выпуклым носителем* типа $p$ назовём множество всех реализаций в достаточно насыщенном элементарном расширении выпуклого замыкания типа $p$.

Заметим, что любой полный тип содержит своё выпуклое замыкание.

**Лемма 1. [2]** Пусть **M** = ($M$,$L$) достаточно насыщенная модель теории $T$, а подмножество $A$ множества $M$ малое, то есть любой тип над множеством $A$ реализован в модели $\mathbf{M}$. Тогда для любых полных типов $p$ и $r$ над множеством $A$ либо их выпуклые носители равны: $p^c(\mathbf{M}) = r^c(\mathbf{M})$, либо не пересекаются.

**Определение.** Пусть $T$ — некоторая теория языка $L$, содержащего символ линейного порядка. Пусть $\lambda$ — некоторый бесконечный кардинал.

1. Будем говорить, что теория $T$ *упорядоченно-стабильна в* $\lambda$, если для любой её модели **M** = ($M$,$L$) и для любого подмножества $A$ множества $M$, у которого мощность не превышает $\lambda$, для каждого типа сечения $s$ модели $\mathbf{M}$ существует самое большее $\lambda$ полных типов над множеством $A$, которые совместимы с сечением $s$.

2. Будем говорить, что теория $T$ *упорядоченно-стабильна*, если она упорядоченно-стабильна в $\lambda$ для некоторого бесконечного кардинала $\lambda$.

**Определение.** Пусть **M** — некоторая структура, а $p$ — некоторый частичный $n$-тип над некоторым подмножеством множества $M$. Будем говорить, что структура **M** обладает свойством *строгого порядка внутри типа p*, если существует $n$-формула $F(\overline{x},\overline{y})$ и последовательность кортежей элементов $\overline{b}_j$, где $j<\omega$, такая что в $|M|^+$-насыщенном элементарном расширении **N** модели **M** для любых $i<j<\omega$ выполняется строгое включение

$$p(\mathbf{N})\bigcap F(\mathbf{N},\overline{b}_i)\subset p(\mathbf{N})\bigcap F(\mathbf{N},\overline{b}_j)$$

Будем говорить, что теория с линейным порядком обладает свойством *локального строгого порядка*, если у неё есть модель, которая обладает свойством строгого порядка внутри выпуклого замыкания полного 1-типа над некоторым подмножеством $A$, причём параметры $\overline{b}_j$ также лежат во множестве $A$.

Заметим, что аналогичным образом можно ввести и свойство порядка внутри типа и свойство локального порядка.

**Теорема 1. [2]** *Зависимая теория является упорядоченно-стабильной в том и только в том случае, когда она не обладает свойством локального строгого порядка.*

Учитывая, что все упорядоченно-стабильные теории не обладают свойством независимости [1], как следствие мы получаем следующий результат:

**Следствие.** *Теория с линейным порядком является упорядоченно-стабильной тогда и только тогда, когда она не обладает и свойством независимости, и свойством локального линейного порядка.*

Заметим, что, как было показано в [2], существует зависимая теория, которая не является упорядоченно-стабильной.

Так как внутри сечения своей произвольной модели упорядоченно стабильная теория не обладает свойством порядка, то можно надеятся, что обычная техника теории стабильности, которая позволяет доказывать определимость типов будет работать и в данных условиях, естественно, после некоторой модификации.

**Теорема 2.** *Один-тип над моделью упорядоченно стабильной теории определим тогда и только тогда, когда определимо соответствующее сечение (часть этого типа).*

*Доказательство.* Необходимость данного утверждения очевидна. Поэтому я докажу его достаточность. Предположим, что сечение $(C,D)$ определимо. Пусть предикат $P(x)$ выделяет множество $C$. Тогда отрицание этого предиката будет выделять множество $D$.

Для того, чтобы определить тип, как и в теории стабильности достаточно ввести понятия локального ранга, который будет конечен, и его конечность может быть выражена некоторой формулой. Но нам необходимо работать внутри сечения, так как внутри любого интервала стабильности у нас нет. То есть, когда мы работаем с формулой $F(x,y)$ требуется добавить условие, что $x$ лежит внутри сечения, при этом сечение у нас в модели не реализовано. Получается некоторое противоречие: как сказать, что элемент лежат там, где ничего нет. Поэтому вместо этого будем говорить, что данная формула выполняется в сколь угодно близкой окрестности сечения $(C,D)$. Очевидно, что это легко выражается при помощи формулы языка логики предикатов первого порядка. Поэтому в классическом определении локального ранга Шелаха мы везде добавляем условие, что рассматриваемые формулы истинны в любой окрестности данного сечения. В слу упорядоченной стабильности получим, что любой таким образом определённый фи-тип должен быть конечен. Используя стандартную процедуру определимости из теории стабильности получим, что и любой тип, совместный с данным сечением определим.

Теорема доказана.

Заметим, что идейно эта теорема переносится и на более общий случай: когда типы рассматриваются над множеством. Но это требует более кропотливого и технического анализа. А задачей этой статьи была демонстрация возможности переноса теории стабильности на нестабильный случай.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вербовский В. В. О зависимости упорядоченно-стабильных теорий. – Вестник инженерной академии, Алматы, №1, 2008. С. 18–25.
2. Вербовский В. В. Критерий упорядоченной стабильности зависимой теории. – Вестник КарГУ, №2, 2008. С. 16–23.
3. Shelah S. Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models. – North-Holland – Amsterdam · New York · Oxford, 1978. – 544 P.
4. Poizat B. Cours de thèorie des modéles. – Lyon, Nur al-Mantiq Wal-Ma'rifah, 1985. – 585 P.