О ФОРКИНГЕ ДЛЯ $\Delta - PM$ ТЕОРИИ И СТАБИЛЬНОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ТИПОВ $\Delta - PJ$ -ТЕОРИЙ В ОБОГАЩЁННОЙ СИГНАТУРЕ

А.Р. Ешкеев
Карагандинский государственный университет имени Е.А.Букетова, Караганда, Казахстан
e-mail: modth1705@mail.ru

1. Центральные типы $\Delta - PJ$ теорий.

В статье [1] был определён класс $\Delta - PJ$-теорий. Этот класс является позитивным обобщением класса йонсоновских теорий. В данной статье мы изучаем соответствующее понятие P-λ-стабильности (в смысле [2]) и соответствующее понятие синтаксического подобия (в смысле [4]) в некотором эквивалентном стиле в классе $\exists^+$-полных, совершенных $\Delta - PJ$-теорий. А также мы рассматриваем некоторое обогащение сигнатуры таких теорий и в рамках некоторых манипуляций с символами новой сигнатуры относительно старой, мы определяем понятие центрального типа этих теорий. Таким образом, введённое понятие дат нам возможность изучать различные теоретико-модельные вопросы касающиеся, например стабильности как в [2]. В конечном итоге мы замечаем ,что такой подход позволяет рассматривать и изучать многие $\Delta - PJ$-аналоги понятий и их свойств из классической теории моделей в рамках $\Delta - PJ$-теорий.

Пусть T есть произвольная $\Delta - PJ -$ теория в языке первого порядка сигнатуры σ. Пусть C является семантической моделью теории T. $A \subseteq C$. Let $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Пусть $T_\Gamma^{PJ}(A) = Th_{\forall\exists^+}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c_a) | a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$, где $\{"P \subseteq"\}$ есть бесконечное множество предложений ,выражающих тот факт, что интерпретация символа Р есть экзистенциально-замкнутая подмодель в языке сигнатуры σ. Требование экзистенциальной замкнутости является существенным в том смысле, что интерпретация символа P должна быть бесконечной. Понятно, что рассмотренное множество предложений является теорией и эта теория вообще говоря не полна. Через S_Γ^{PJ} обозначим множество всех $\exists^+$- пополнений теории $T_\Gamma^{PJ}(A)$. Пусть λ произвольный бесконечный кардинал.

Будем говорить, что $\Delta - PJ$-теория T J-P-λ- стабильна, если $\left|S_\Gamma^{PJ}\right| \leq \lambda$ для любого подмножества A модели C, так ,что $|A| \leq \lambda$.

Рассмотрим все пополнения теории T^* для теории T в языке сигнатуры σ_Γ,где $\Gamma = \{c\}$.Так как T^* является $\Delta - PJ$-теорий , она имеет свой центр и мы обозначим его через T^c. При ограничении теории T^c до сигнатуры σ теория T^c становится полным типом. Этот тип мы и назовем центральным типом теории T. Заметим, что все семантические модели элементарно эквивалентны между собой.

В силу этого и совершенности теории определение центрального типа корректно.

Лемма 1.1.

Пусть $T -$ совершенная $\Delta - PJ$-теория, тогда $T_\Gamma^{PJ}(A)$-совершенная $\Delta - PJ$-теория.

Доказательство. Прежде всего мы должны заметить ,что добавление символов констант и символа 1-местного предиката Р не портит $\Delta - PJ$-ность теории T и теории $T*$. Доказательство этого факта есть стандартная проверка определение $\Delta - PJ$-ности . Для доказательства совершенности $T_{\Gamma}^{PJ}(A)$ достаточно показать, что $T_{\Gamma}^{PJ}(A)$ имеет семантическую модель, которая насыщенна в своей мощности. А это следует из определения $T_{\Gamma}^{PJ}(A)$. Так как в качестве модели мы рассматриваем модель C теории T и так как в зависимости от подмножества A и интерпретации одноместного предиката P в C будет модель $D=(C,M,a)_{a\in A}$, где M есть экзистенциально-замкнутая подмодель модели C , легко заметить ,что D будет насыщенна в своей мощности, так как модель C является экзистенциально-замкнутая моделью. Это верно для всех семантических моделей теории T.

Теорема 1.1.

Пусть T $\exists^{+}$-полная совершенная $\Delta - PJ$-теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) Теория T^{c} P-λ-стабильна (в смысле [2]);

2) Теория T^{*} J-P-λ- стабильна .

Доказательство.

Из 1) в 2) доказательство тривиально ,так как если всех пополнений не более чем λ, тогда и $\exists^{+}$-пополнений не более чем λ. Докажем из 2) в 1).Пусть теория T^{*}-$J-P$-λ-стабильна. Это эквивалентно тому, что $T_{\Gamma}^{PJ}(A)$ в сигнатуре $\sigma_{\Gamma}(A)=\sigma\cup\{c_a \mid a\in A\}\cup\Gamma$ логически эквивалентно позитивной оболочке Кайзера T^{0} теории T. В силы совершенности теории T мы имеем, что $T^{0}=T*$ и следовательно $T_{\Gamma}^{PJ}(A)=T^{0}$, а значит она будет совершенной $\Delta - PJ$- теорий. Пусть теория T^{0} имеет не более чем λ $\exists^{+}$- пополнений. В этом случае центр теории T в языке новой сигнатуры будет логически эквивалентен $Th(C,a)_{a\in A}\cup\{P(c_a)\mid a\in A\}\cup\{"P\preceq"\}\cup\{P(c)\}$. Ясно, что $T^{*}=T^{c}$.Теперь нам следует показать, что T^{*} имеет не более чем λ пополнений. Это и будет означать, её P-λ- стабильность. Поймём почему T^{*} не полна в новой сигнатуре. Добавление констант даёт только несущественные расширения, а это не меняет количество типов экзистенциально-замкнутых подмоделей C. Существенную роль играет реализация предиката P. Но в этом случае реализацией предиката P будет некоторая элементарная подмодель M модели C. В силу того, что C является семантической моделью теории T, эта подмодель будет экзистенциально-замкнутой подмоделью C. Так как из $(M\preceq C)$ следует, что $M\in E_T$. Рассмотрим произвольное пополнение T' теории $T*$ в новом языке. По определению $T*$ существует такая модель M из E_T^{+}, что $T'=Th(C,M,a)_{a\in A}$, где М –интерпретация предиката P в семантической модели C. Ясно , что $T'=Th(C,M,a)_{a\in A}$ есть $\Delta - PJ$- теория. В этом случае T' является позитивной модельно полной теорией. В следствии этого (позитивной модельной полноты теории T') мы имеем ,что любая формула в T'эквивалентна некоторой позитивной экзистенциальной формуле в T'. Тогда в силу $\exists^{+}$- полноты теории T таких пополнений по выше сказанному не более чем λ. Таким образом утверждение доказано.

Пусть T произвольная $\Delta - PJ$ - теория, тогда $E^+(T) = \bigcup_{n<\omega} E_n^+(T)$, где $E_n^+(T)$ есть решётка позитивных экзистенциальных формул с точно n- свободными переменными.

Пусть T_1 и T_2 - $\Delta - PJ$ теории.

Мы будем говорить что T_1 и T_2 - $\Delta - PJ$ синтаксически подобны между собой, если существует биекция $f : E^+(T_1) \to E^+(T_2)$ такая ,что

1) Ограничение f до $E_n^+(T_1)$ есть изоморфизм $E_n^+(T_1)$ и $E_n^+(T_2)$, $n < \omega$;

2) $f(\exists v_{n+1}\varphi) = \exists v_{n+1} f(\varphi), \varphi \in E_n^+(T), n < \omega,$

3) $f(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2).$

Теорема 1.2.

Пусть T_1 и T_2 есть $\exists^+$- полные совершенные $\Delta - PJ$-теории. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T_1^* и T_2^* J-синтаксически подобны в смысле [3]

2) T_1^c и T_2^c синтаксически подобны в смысле [4]

Доказательство.

Покажем из 1) в 2). Мы имеем ,что для любого $n < \omega$ $E_n^+(T_1)$ изоморфна $E_n^+(T_2)$. Пусть этот изоморфизм будет f_{1n}. В силу условий теоремы для любого $n < \omega$ $E_n(T_1)$ и $E_n(T_2)$ есть булевы алгебры. Но в силу совершенности T_1 и T_2 мы имеем , что T_1^* и T_2^* являются позитивными модельно полными теориями и поэтому для любого $n < \omega$, $\varphi(\overline{x}) \in F_n(T_1^*)$ существует $\psi(\overline{x})$ из $E_n^+(T_1^*)$ так, что в $T_1^* \models \varphi \leftrightarrow \psi$. И так как T_1 полна для позитивно экзистенциальных предложений и $E_n^+(T_1) \subseteq E_n^+(T_1^*)$ (в силу $T_1 \subseteq T_1^*$), мы имеем, что $E_n^+(T_1) = E_n^+(T_1^*)$. Аналогично мы имеем ,что $E_n^+(T_2) = E_n^+(T_2^*)$. Для любого $n < \omega$, $\varphi_1(\overline{x}) \in F_n(T_1^*)$ мы определяем следующее отображение между $F_n(T_1^*)$ и $F_n(T_2^*)$ вот таким образом $f_{2n}(\varphi_1(\overline{x})) = f_{1n}(\psi_1(\overline{x}))$, где в $T_1^* \models \psi_1 \leftrightarrow \varphi_1$, для $\psi_1 \in E_n^+(T_1)$. Легко заметить ,что в силу f_{1n} и выше сказанного, f_{2n} является биекцией и задаёт нам нужный изоморфизм между $F_n(T_1^*)$ и $F_n(T_2^*)$. Следовательно T_1^* и T_2^* – синтаксически подобны в смысле [4]. Но из предыдущего результата (Теорема 1.1.) в связи с тем ,что $T^* = T^c$, мы имеем ,что 1)$\Rightarrow$2) теоремы 1.2. доказано.

2)$\Rightarrow$1). В эту сторону тривиально так как $F_n(T_1^*)$ изоморфна $F_n(T_2^*)$ для любого $n < \omega$, и в силу условий теоремы этот изоморфизм продолжается для всех их подалгебр.

Следующее определение даёт нам другой вид подобия, он слабее предыдущего. Все определения взяты из [4].

(1) Под чистой тройкой мы понимаем $\langle A, \Gamma, M \rangle$,где A есть непустое множеств, Γ-группа перестановок на A , и M есть семейство подмножеств множества A таких, что $M \in M \Rightarrow g(M) \in M$ для каждого $g \in \Gamma$.

(2) Если $\langle A_1, \Gamma_1, M_1 \rangle$ и $\langle A_2, \Gamma_2, M_2 \rangle$ есть чистые тройки , и $\psi : A_1 \to A_2$ есть биекция,тогда ψ есть изоморфизм , если

(i) $\Gamma_2 = \{\psi g \psi^{-1} : g \in \Gamma_1\}$;

(ii) $M_2 = \{\psi(E) : E \in M_1\}$.

Чистая тройка $\langle |C|, G, N \rangle$ называется семантической тройкой теории T (сокращённо с.т.), где $|C|$ есть универсум модели C, $G = Aut(C)$ и N есть класс всех подмножеств $|C|$,которые являются универсумами подходящей элементарной подмодели модели C.

Полные теории T_1 и T_2 семантически подобны между собой , если их семантические тройки изоморфны между собой.

Отметим следующий результат из [4].

Предложение 1.1. [4]

Если теории T_1 и T_2 синтаксически подобны между собой ,то они и семантически подобны между собой .

Обратное, вообще, говоря неверно.

Свойство (или понятие) теории (или модели , или элемента модели) называется семантическим ,если оно инвариантно относительно семантического подобия.

Оказалось , что много важных понятий из классической теории моделей принадлежит следующему списку.

Предложение 1.2 .[4]

Следующие свойства и понятия являются семантическими:

(1) форкинг;

(2) λ - стабильность;

(3) Ранг Ласкара;

(4) Сильный тип ;

(5) Последовательность Морли;

(6) Ортогональность,регулярность типов;

(7) $I(\aleph_\alpha, T)$ - функция спектра моделей теории .

В силу этого замечания мы можем сказать , что все выше указанные свойства и понятия из предложения 2 в классе центров $\exists^+$-полных совершенных Δ-PJ теорий являются семантическими. Более того, если мы будем рассматривать центральные типы в некоторых обогащениях сигнатуры то ситуация не изменится. И было бы интересно рассмотреть $\Delta - PJ$ - аналогичный список выше указанных понятий и свойств $\Delta - PJ$ теорий.

2 О PJ-форкинге в классе $\Delta - PM$ теорий.

Нашей задачей является определение аксиоматическим путем понятие форкинга для $\Delta - PM$ -теории, когда она совершенная α –йонсоновская теория. Мы идем путем обобщения результатов из [5],[6]. Дадим следующие определения.

Определение 2.1. Пусть M - $\Sigma^+_{\alpha+1}$-насыщенная Δ-позитивно $\alpha+1-$экзистенциально замкнутая модель мощности к (к достаточно большой кардинал) $\Delta - PM$ - теории T ($\Sigma^+_{\alpha+1}$-насыщенность означает насыщенность относительно $\Sigma^+_{\alpha+1}$-типов в своей мощности). Напомним, что модель M теории T называется Δ-позитивно экзистенциально замкнутой, если для каждого Δ-гомоморфизма $f: M \xrightarrow[\Delta]{} N$ и каждого $\bar{a} \in M$, и $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta : N \models \exists \bar{y} \varphi(f(\bar{a}), \bar{y}) \Rightarrow M \models \exists \bar{y} \varphi(\bar{a}, \bar{y})$.

Пусть T $\Delta - PM$-теория, $S^{PM}(X)$-множество всех позитивных $\Sigma^{+}_{\alpha+1}$ полных n-типов над X, совместных с T, для каждого конечного n.

Пусть A -класс всех подмножеств M, P-класс всех $\Sigma^{+}_{\alpha+1}$-типов (не обязательно полных), пусть $PJNF \subseteq P \times A$-некоторое бинарное отношение. Мы накладываем на $PJNF$ (позитивно йонсоновский нефоркинг) следующие аксиомы:

Аксиома 1. Если $(p, A) \in PJNF, f \in Aut(M), f(A) = B,$ то $(f(p), B) \in PJNF$.

Аксиома 2. Если $(p, A) \in PJNF, q \subseteq p$, то $(q, A) \in PJNF$.

Аксиома 3. Если $A \subseteq B \subseteq C, p \in S^{PM}(C),$ то $(p, A) \in PJNF \Leftrightarrow (p, B) \in PJNF$ и $(p|B, A) \in PJNF.$

Аксиома 4. Если $A \subseteq B, dom(p) \subseteq B, (p, A) \in PJNF,$ то $\exists q \in S^{PM}(B)$ $(p \in q$ и $(q, A) \in PJNF).$

Аксиома 5. Существует кардинал μ такой, что если $A \subseteq B \subseteq C, p \in S^{PM}(B), (p, A) \in PJNF$, то $\left|\{q \in S^{PM}(C) : p \subseteq q \text{ и } (q, A) \in PJNF\}\right| < \mu$.

Аксиома 6. Существует кардинал ρ такой, что $\forall p \in P, \forall A \in A$, если $(p, A) \in PJNF,$ то $\exists A_1 \subseteq A, (|A_1| < \rho$ и $(p, A_1) \in PJNF).$

Аксиома 7. Если $p \in S^{PM}(A)$, то $(p, A) \in PJNF$.

Классическое понятие форкинга принадлежит Шелаху.

Определение 2.2. Множество формул $\{\varphi(\overline{x}, \overline{a_i}) : i < k\} = p$ называется $k-$несовместным для некоторого положительного целого k, если каждое конечное подмножество p мощности k несовместно, т.е. $\models \neg \overline{x}(\varphi(\overline{x}, \overline{a}_{i_1}) \wedge ... \wedge \varphi(\overline{x}, \overline{a}_{i_k}))$ для каждого $i_1 < ... < i_k < k.$

Частичный тип делится над множеством относительно $k \in \omega$, если существует формула $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ и последовательность $\langle \overline{a_i} : i \in \omega \rangle$ такая, что

1) $p \vdash \varphi(\overline{x}, \overline{a})$,

2) $tp(\overline{a} / A) = tp(\overline{a_i} / A)$ для всех i,

3) $\{\varphi(\overline{x}, \overline{a_i}) : i \in \omega\}$ $k-$несовместно.

Также p делится над A относительно некоторого k. Кроме того, p форкуется над A в T, если существуют формулы $\varphi_0(\overline{x}, \overline{a_0}), ..., \varphi_n(\overline{x}, \overline{a_n})$ такие, что :

(i) $p \models \bigcup_{0 \le i \le n} \varphi_i(\overline{x}, \overline{a_i})$,

(ii) $\varphi_i(\overline{x}, \overline{a_i})$ делится над A для каждого i.

Следующая договоренность является важной. Фактически, мы будем говорить о семантическом аспекте $\Delta - PM$ теории**.** Если $\Delta - PM$-теория T является $\alpha-$йонсоновской, то с $ModT$ мы работаем как с классом моделей некоторой йонсоновской теории. Если же $\Delta - PM$-теория T не является $\alpha-$йонсоновской, то в качестве $ModT$ мы будем рассматривать класс ее позитивно экзистенциально замкнутых моделей $\Sigma^{+}_{\alpha+1}T$. Такой подход для класса $\Sigma^{+}_{\alpha+1}T$-класса экзистенциально замкнутых моделей произвольной универсальной теории T был рассмотрен в [7]. Так как относительно йонсоновских теорий возможны два случая: совершенный и несовершенный, то мы будем придерживаться следующего. Хорошо известно из [8], что если йонсоновская теория T совершенна, то класс ее экзистенциально замкнутых моделей элементарен и совпадает с $ModT^*$, где T^*-ее центр. В противном случае, т.е. если теория T несовершенна, мы поступаем аналогично [7], только вместо $ModT$ работаем с классом $\Sigma^+_{\alpha+1}T$ рассматривается как расширение E_T-класса экзистенциально замкнутых моделей (оба класса всегда существуют), и в зависимости от совершенности и несовершенности теории T теоретико-модельные свойства класса $\Sigma^+_{\alpha+1}T$ представляют особый интерес. В данной статье при рассмотренном Δ рассматриваемые $\Delta - PM$-теории являются $\Delta - PM$-совершенными, что является естественным обобщением совершенности в йонсоновском смысле.

Определение 2.3. Следуя [9], мы говорим, что модель $A \in K$ является simple в классе K, если для любого $B \in K$ такого, что существует гомоморфизм $h : A \to B$, следует, что h является вложением. Мы говорим, что теория T удовлетворяет условию (S), если каждая модель $A \in K$ является simple в классе K. В [9] замечено, что (S) эквивалентно следующему синтаксическому свойству: (S') Каждая экзистенциальная формула в L эквивалентна в T некоторой позитивной экзистенциальной формуле.

Легко заметить, что не йонсоновская $\Delta - PM$-теория T в силу договоренности о $ModT$ удовлетворяет свойству (S').

Мы будем использовать в доказательстве теоремы 2.2. следующие результаты:

Теорема 2.1. (Ramsey F.P.) [16, p.173] Пусть I-бесконечное множество, $n < \omega, |I|^n$-семейство всех подмножеств множества I, которые состоят точно из n элементов. Если $|I|^n = A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1}, k < \omega, A_i \cap A_j = \varnothing$ с $i < j < k$, то существует бесконечное $J \subset I$ такое, что $|J|^n \subset A_i$ для некоторого $i < k$.

Лемма 2.1. [17,лемма 14.9] Пусть T стабильная теория, M насыщенная модель мощности μ^+, типы $p_1, p_2 \in S(M)$ не форкуется над A. Тогда если $p_1 \upharpoonright A = p_2 \upharpoonright A$, то существует тождественный на A элементарный мономорфизм f такой, что $f(d_1) \sim d_2$, где d_1, d_2-схемы, определяющие p_1, p_2 соответственно.

Класс всех Δ-позитивно $\alpha+1$ экзистенциально замкнутых моделей теории T обозначим через $\Sigma^+_{\alpha+1}T$.

Определение 2.4. Мы, говорим что $\Delta - PM$-теория T $PM - \lambda$ стабильна, если для любой модели $A \in \Sigma^+_{\alpha+1}T$, для любого подмножества X множества A, $|X| \le \lambda \Rightarrow \left|S^{PM}(X)\right| \le \lambda.$ $\Delta - PM$-теория T PM-стабильна, если она $PM - \lambda$-стабильна для некоторого λ.

Теорема 2.2. Пусть $T - \Delta - PM$-теория, α-йонсоновская, совершенная, полная для $\Sigma_{\alpha+1}$-предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) отношение $PJNF$ удовлетворяет аксиомам 1-7 относительно теории T;

2) T^* стабильна и для любых $p \in P, A \in A((p, A) \in PJNF \Leftrightarrow p$ не форкуется над A в смысле Шелаха).

Доказательство

$1 \Rightarrow 2$. Пусть $\lambda = 2^{\rho \cdot |T| \cdot \mu}$, где λ, ρ, μ-кардиналы, соответствующие аксиомам 1-7. Теперь покажем, что T $PM - \lambda$-стабильна. Тогда, по теореме 2.1. из [10], мы будем иметь, что T^* λ-стабильна . Очевидно, что $\lambda^P = \lambda$. Пусть $|A| = \lambda$. Если $p \in S^{PM}(A)$, то по аксиоме 7 $(p, A) \in PJNF$, и по аксиоме 6 существует $A_P \subseteq A$такой, что $|A_P| < p$и $(p, A_P) \in PJNF$. Тогда по аксиоме 3 $(p|^- A_P, A) \in PJNF$. Мы обозначаем $p|^- A_P$ через $g(p)$. По аксиоме 5 $\left|\{q \in S^{PM}(A) : g(q) = g(p)\}\right| < \mu$. Следовательно. $\left|S^{PM}(A)\right| \le \left|\{g(p) : p \in S^{PM}(A)\}\right| \cdot \mu \le \left|A^\rho\right| \cdot 2^{\rho \cdot |T|} \cdot \mu \le \lambda^\rho \cdot \lambda \cdot \lambda = \lambda^\rho = \lambda$. Следовательно, T $PM - \lambda$-стабильна. И мы заключаем, что T^* λ-стабильна по теореме 2.1. из [10].

Пусть теперь $(p, A) \in PJNF$. Покажем, что pне форкуется над A. Пусть $B = dom(p)$. Тогда по аксиоме 4 существует $q \in S^{PM}(B)$такой, что $p \subseteq q$и $(q, A) \in PJNF$. Докажем, что q не форкуется над A (тогда pне форкуется над Aпо аксиоме 2). Предположим обратное. Тогда в силу совершенности теории T и определения 2.2., а также (S') существует конечное множество позитивных экзистенциальных формул Σ_0^+ такое, что $q \left|- \cup\{\varphi : \varphi \in \Sigma_0^+\}\right.$ и каждая формула $\varphi \in \Sigma_0^+$ делится над A. Пусть $C = B \cup D$, D-множество констант, входящих хотя бы одну из формул из Σ_0^+. По аксиоме 4 существует $q_0 \in S^{PM}(C)$ такой, что $q \in q_0$ и $(q_0, A) \in PJNF$. Очевидно, что $q_0 \left|- \cup\{\varphi : \varphi \in \Sigma_0^+\}\right.$, следовательно существует $\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in q_0 \cap \Sigma_0^+$. Используя теорему 2.1., теорему компактности и делимость $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$над A, мы можем показать существование последовательности $\langle \overline{a_\alpha} : \alpha < \mu^+ \rangle$и элементарных мономорфизмов $f_\alpha, \alpha < \mu^+$, тождественных на A так, что $\overline{a_0} = \bar{a}, \overline{a_\alpha} = f_\alpha(\bar{a}), \alpha < \mu^+$ и $\{\varphi(\bar{x}, \overline{a_\alpha}) : \alpha < \mu^+\}$ k-несовместно для некоторого $k < \omega$.

Пусть $E = C \cup \{\overline{a_\alpha} : \alpha < \mu^+\}, q_\alpha = f_\alpha(q_0).0 < \alpha < \mu^+$. По аксиоме 1 $(q_0, A) \in PJNF$, $\alpha < \mu^+$, по аксиоме 4 существуют$q'_\alpha \in S^{PM}(E)$ такие, что $q_\alpha \subseteq q'_\alpha$ и $(q_\alpha', A) \in PJNF$. Ясно, что $\varphi(\bar{x}, \bar{a}_\alpha) \in q'_\alpha$, $q_\alpha \subseteq q'_\alpha$, $\alpha < \mu^+$. Мы имеем, $\left|\{q'_\alpha : \alpha < \mu^+\}\right| = \mu^+$, так как $\{\varphi(\bar{x}, \overline{a_\alpha}) : \alpha < \mu^+\}$ k-несовместно. Получили противоречие с аксиомой 5. Следовательно, q не форкуется над A. Таким образом, мы имеем, что если $(p, A) \in PJNF$, то pне форкуется над A.

Докажем в обратную сторону. Пусть P не форкуется над A. Так как теория T совершенна, то T^* модельно полна [8], и для нас достаточно работать только с экзистенциальными типами, более того в силу (S') с позитивно экзистенциальными типами, и рассматривать $\Sigma_{\alpha+1}^+$-насыщенные позитивные $\alpha + 1$-экзистенциально замкнутые модели теории T. Нам нужно доказать, что $(p, A) \in PJNF$. Пусть $M \supseteq A, M \supseteq dom(p), |M| > 2^{\rho \cdot |T| \cdot \mu}$ и M $\Sigma_{\alpha+1}^+$-насыщенная модель теории T^*, $t \in S^{PM}(M), p \subseteq t, t$ не форкуется над A. По аксиоме 7 $(t|^- A, A) \in PJNF$, и по аксиоме

5 существует $q \in S^{PJ}(M)$ такой, что $q \supseteq t|^{-} A$ и $(q, A) \in PJNF$. Как показано выше $(q, A) \in PJNF$ влечет, что q не форкуется над A. По лемме 1 существует автоморфизмы f модели M тождественный на A такой, что $y = f(q)$. Тогда по аксиоме 1 $(t, A) \in PJNF$, и по аксиоме 2 $(p, A) \in PJNF$. Следовательно, $1 \Rightarrow 2$ доказано.

$2 \Rightarrow 1$. Так как центр теории T, а именно, T^* является полной теорией, то к нему можно применить свойства форкинга в смысле Шелаха. Например, как в доказательстве теоремы 19.1 ($2 \Rightarrow 1$) из [11]. Полученные результаты (аналоги аксиом 1-7 для полных теорией) можно легко ограничить до обобщений соответствующих понятий в α-йонсоновском смысле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ешкеев А.Р. Категоричные позитивные теории. Синтаксис и семантика логических систем. Материалы российской школы-семинара, посвященной 100-летию со дня рождения Курта Геделя, 23-27 август 2006 г., Иркутск, Институт математики СО РАН, Изд-во гос. Пед. Ун-т, 2006, 124 с., с. 28-32.
2. Мустафин Т.Г.,Нурмагамбетов Т.А. О Р-стабильности полных теорий //Структурные свойства алгебраических систем .сборник научных трудов .- Караганда :Изд.КарГУ,1990.-125стр.-88-100
3. Ешкеев А.Р. О PJ-подобии в $\Delta - PJ$-теориях //Вестник КазНПУ, №4(20), 2007. – С.113-117
4. Mustafin T.G. On similarities of complete theories // Logic Colloquium ’90: proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, - held in Helsinki, - Finland, - July 15-22, - 1990, P. 259-265
5. Ешкеев А.Р. О J-форсинге совершенных йонсоновских теорий // Вестник КарГУ, серия математика. №3(43)/2006 С.18-22
6. Ешкеев А.Р. О PJ-форкинге в классе $\Delta - PJ$ -теорий // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика, №3(54), 2007 С.10-16
7. Pillay A. Forking in the category of existentially closed structures / Connection between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry (A.Macintyr, ed), Quaderni di Matematica, vol.6, University of Naples,
8. Ешкеев А.Р.,.Оспанов Р.М Связь йонсоновских теорий с теоремой Линдстрема // Труды V-Казахско-Французского коллоквиума по теории моделей. Сборник научных трудов. -- Караганда: Изд-во КарГУ, - 2001, -- С. 65-75.
9. Weispfenning V. The model-theoretic significance of complemented existential formulas / The Journal of Symbolic Logic Volume 46, Number 4, Dec.1981
10. Ешкеев А.Р., Бегетаева Г.С. Стабильность $\Delta - PM$ теории и её центра // Вестник КарГУ, 2009г. (в печати).
11. Мустфин Т.Г. Число моделей теорий / Караганда 1983.