ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ НЕИЗГИБАЕМОСТИ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ЗАДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ СМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК КРАЯ

Г.М. Аллаев
Термезский государственный университет

В данной работе исследованы бесконечно малые изгибания первого и второго порядков кусочно-гладких односвязных поверхностей вращения, меридианы которых однозначно проектируются на ось вращения, при условии, что на поверхность наложены связи, допускающие перемещения точек края лишь в заданном постоянном направлении $\vec{c}$. Исследование этой краевой задачи приводит к такому результату:

Теорема. Пусть Ф – произвольная односвязная кусочно-гладкая, не содержащая в себе точек уплощения, поверхность вращения с краем g. Пусть меридиан такой поверхности однозначно проектируется на ось вращения и не содержит точек, кроме полюса, касательные в которых перпендикулярны оси вращения. Если на такую поверхность наложить связи, которые допускают перемещения точек края g, лищь в заданном постоянном направлении $\vec{c}$, то она станет аналитически неизгибаемой.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что поверхность Ф в данном классе деформаций обладает жесткостью не выше второго порядка, так как из этого, согласно теоремы Н. В. Ефимова [1], следует аналитическая неизгибаемость поверхности Ф.

Следуя методу Кон – Фоссена [2], отнесем радиус-вектор произвольной точки поверхности вращения Ф к подвижному трехграннику $\{O, \vec{k}, \vec{a}(v), \vec{a}'(v)\}$. Тогда ее уравнение запишется так:

$$\vec{x}(u,v) = u\vec{k} + \rho(u)\vec{a}(v), \quad 0 \le u \le b,\ 0 \le v < 2\pi, \tag{1}$$

где $\rho = \rho(u)$ – уравнение меридиана поверхности Ф.

Будем предлагать, что меридиан поверхности Ф состоит из m гладких звеньев. Пусть $u = u_i$ $(i = \overline{o,m})$: $u_0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_{m-1} < u_m$ последовательность всех точек излома меридиана. Тогда её уравнение можно представить в таком виде:

$$\rho(u) = \begin{cases} \rho_1(u), & \text{если} \quad u_0 \le u \le u_1, \\ \rho_2(u), & \text{если} \quad u_1 \le u \le u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \rho_{m-1}(u), & \text{если} \quad u_{m-2} \le u \le u_{m-1}, \\ \rho_m(u), & \text{если} \quad u_{m-1} \le u \le u_m, \end{cases} \tag{2}$$

где $\rho_i = \rho_i(u)$ функция класса C^1 на промежутках $[u_{i-1}, u_i]$ $(i = \overline{1,m})$, $\rho_1(u_0) = 0$; $\rho_i(u) > 0$, $u_{i-1} < u \le u_i$; $(i = \overline{1,m})$; $\rho_i(u_1) = \rho_{i+1}(u_1)$, $(i = \overline{1,m-1})$.

Обозначим через Φ_i поверхность, которая оброзовано в резельтате вращения i-го ($i=\overline{1,m}$) гладкого звена меридиана (2), а через $\overset{1}{\vec{z}_i}(u,v)$ и $\overset{2}{\vec{z}_i}(u,v)$ изгибающие поля бесконечно малых изгибаний второго порядка поверхности Φ_i. Тогда кусочно-гладкую поверхность Ф мы можем рассматривать как поверхность, склеенную из гладких поверхностей Φ_i, а ее изгибающие поля $\overset{1}{\vec{z}_i}(u,v)$, $\overset{2}{\vec{z}_i}(u,v)$ можно представить в виде

$$\overset{k}{\vec{z}_i}(u,v)=\begin{cases}\overset{\kappa}{\vec{z}_1}(u,v), \textit{если} \quad u_0\le u\le u_1,\\ \overset{\kappa}{\vec{z}_2}(u,v), \textit{если} \quad u_1\le u\le u_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \overset{\kappa}{\vec{z}}_{m-1}(u,v), \textit{если} \quad u_{m-2}\le u\le u_{m-1},\\ \overset{\kappa}{\vec{z}_m}(u,v), \textit{если} \quad u_{m-1}\le u\le u_m,\\ \quad 0\le v<2\pi;\ (k=1,2)\end{cases} \tag{3}$$

Так как каждая из параллелей “склеивания” $u=u_i$ ($i=\overline{1,m-1}$) участвует одновременно в деформациях двух смежных гладких частей поверхности Ф , а именно, Φ_i и Φ_{i+1}, то она будет, очевидно, оказывать определенное влияние на характер этих изгибаний, поскольку деформация кривой $u=u_i$ при бесконечно малом изгибании поверхности Φ_i должна быть идентична деформации ее при бесконечно малом изгибании поверхности Φ_{i+1}. Это обстоятельство в силу непрерывности деформации вдоль $u=u_i$ приводит к дополнительным соотношениям :

$$\overset{1}{\vec{z}_i}(u_i,v)=\overset{1}{\vec{z}}_{i+1}(u_i,v), \quad (i=\overline{1,m-1}) \tag{4a}$$

$$\overset{2}{\vec{z}_i}(u_i,v)=\overset{2}{\vec{z}}_{i+1}(u_i,v), \tag{4б}$$

В связи с этим, векторные поля $\overset{1}{\vec{z}_i}(u\ ,v)$, $\overset{2}{\vec{z}_i}(u,v)$, которые имеют вид (3), будут изгибающими полями бесконечно малого изгибания второго порядка кусочно-гладкой поверхности вращения Ф , на которую вдоль краяġ наложены связи, допу с-кающие перемещения точекġ лишь в заданном постоянном направлении $\vec{c}$, если они являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases}\left(d\vec{x}(u,v), d\,\overset{1}{\vec{z}_i}(u,v)\right)=0,\\ \left(d\vec{x}(u,v), d\,\overset{2}{\vec{z}_i}(u,v)\right)+\left(d\,\overset{1}{\vec{z}_i}{}^2(u,v)\right)=0,\\ u_{i-1}\le u\le u_i \quad (i=\overline{1,m}),\quad 0\le v<2\pi\end{cases} \qquad (5а) \qquad (5б)$$

и удовлетворяют таким условиям :

$$\vec{\overset{1}{z}}_m(u\ ,v)\big|.g\ =\ \lambda_1(v)\,\vec{C}(v), \qquad (6)$$

$$\vec{\overset{2}{z}}_m(u\ ,v)\big|.g\ =\ \lambda_2(v)\,\vec{C}(v), \qquad (7)$$

$$\vec{\overset{1}{z}}_i(u_i,v)\ =\ \vec{\overset{1}{z}}_{i+1}(u_i,v), \qquad (8)$$

$$\vec{\overset{2}{z}}_i(u_i,v)\ =\ \vec{\overset{2}{z}}_{i+1}(u_i,v), \qquad (9)$$

$(i=\overline{1,m-1})$, $0\le v<2\pi$

Сначала исследуем бесконечно малые изгибания первого порядка поверхности Ф. Эта задача сводится к исследованию задачи (5а), (6), (8).

Пусть $\overset{1}{\varphi}_i(u,v)$, $\overset{1}{\psi}_i(u,v)$, $\overset{1}{\chi}_i(u,v)$ являются координатами изгибающего поля $\overset{1}{z}_i(u,v)$ в базисе $\{O,\vec{\kappa},\vec{a}(v),\vec{a}^1(v)\}$, т.е.

$$\overset{1}{z}_i(u,v)\ =\ \overset{1}{\varphi}_i(u,v)\,\vec{k}+\overset{1}{\psi}_i(u,v)\,\vec{a}(v)+\overset{1}{\chi}_i(u,v)\,\vec{a}^{|}(v),\ (i=\overline{1,m}). \qquad (10)$$

Тогда, как известно из [3], вопрос о бесконечно малых изгибаниях первого порядка поверхности Ф сводится к исследованию решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \varphi^{|}_{i,n}(u)+n\rho^{|}_i(u)\overset{1}{\chi}{}^{|}_{i,n}(u)=\overset{1}{0}, \\ n\overset{1}{\varphi}_{i,n}(u)+\left(n^2-1\right)\rho^{|}_i(u)\overset{1}{\chi}_{i,n}(u)+\rho^{|}_i(u)\overset{1}{\chi}{}^{|}_{i,n}(u)=0, \end{cases} \qquad (11)$$

$$u_{i-1}\le u\le u_i\left(i=\overline{1,m}\right),n=2,3,...,$$

где $\overset{1}{\varphi}_{i,n}(u)$ и $\overset{1}{\chi}_{i,n}(u)$- коэффициенты Фурье функции $\overset{1}{\varphi}_i(u,v)$, $\overset{1}{\chi}_i(u,v)$.

Условие (8) относительно функций $\overset{1}{\varphi}_{i,n}(u)$, $\overset{1}{\chi}_{i,n}(u)$ принимает вид :

$$\begin{aligned} &\overset{1}{\varphi}_{i,n}(u_i)=\overset{1}{\varphi}_{i+1,n}(u_i), \\ &\overset{1}{\chi}_{i,n}(u_i)=\overset{1}{\chi}_{i+1,n}(u_i), \\ &(i=\overline{1,m-1}),\ n=2,3,\ \ldots \end{aligned} \qquad (12)$$

Найдем граничное условие, при котором следует интегрировать систему (11) в указанном классе деформации.

Пусть вектор $\vec{c}(v)$ относительно базиса $\{O,\vec{\kappa},\vec{a}(v),\vec{a}^1(v)\}$ представлено в виде

$$\vec{c}(v)=\alpha(v)\vec{k}+\beta(v)\vec{a}(v)+\gamma(v)\vec{a}^{|}(v). \qquad (13)$$

По условию теоремы направление $\vec{c}(v)$ должна быть постоянным.

Направление $\vec{c}(v)$ будет постоянным тогда и только тогда, когда

$$\alpha(v)=c_1,\ \beta(v)=+c_2Cosv+c_3Sinv,\quad \gamma(v)=-c_2Sinv+c_3Cosv, \qquad (14)$$

где c_1, c_2, c_3- произвольные постоянные.

Воспользовавшись выражениями (10), (13), из условия (6) получаем

$$\overset{1}{\varphi}_m(u_m,v)=c_1\lambda_1(v),\ \overset{1}{\psi}_m(u_m,v)=\lambda_1(v)[C_2\cos v+C_3\sin v],$$
$$\overset{1}{\chi}_m(u_m,v)=\lambda_1(v)[-C_2\sin v+C_3\cos v],\quad 0\le v\le 2\pi, \tag{15}$$

где $\overset{1}{\varphi}_m(u_m,v)$, $\overset{1}{\psi}_m(u_m,v)$, $\overset{1}{\chi}_m(u_m,v)$- координаты изгибающего поля $\overset{1}{z}_m(u_m,v)$ в базисе $\{O,\vec{\kappa},\vec{a}(v),\vec{a}^1(v)\}$, $u=u_m$ значение u, которое соответствует параллели g. Из равенств (15), имея в виду (11) получим $\lambda_1^{/}(v)[-C_2\sin v+C_3\cos v]=0,\quad 0\le v<2\pi$.
(16)

Рассмотрим два возможные случая:

1) направление $\vec{c}$ не параллельно оси вращения;
2) направление $\vec{c}$ параллельно оси вращения.

1. Пусть направление $\vec{c}$ не параллельно оси вращения. Тогда $c_2^2+c_3^2\ne 0$ и из равенства (16), которое должно выполняться для всех $v\in[0,2\pi)$, вытекает, что $\lambda_1^{|}(v)\equiv 0$, т.е.

$$\lambda_1(v)=\lambda_0=const. \tag{17}$$

Итак, для рассматриваемого случая краевые условия (15) принимают вид:

$$\overset{1}{\varphi}_m(u_m,v)=c_1\lambda_0,\ \overset{1}{\psi}_m(u_m,v)=\lambda_0\,[C_2\cos v+C_3\sin v],$$
$$\overset{1}{\chi}_m(u_m,v)=\lambda_0\,[-C_2\sin v+C_3\cos v]. \tag{18}$$

Эти краевые условия для коэффициентов Фурье $\overset{1}{\varphi}_{m,n,j}(u_m)$, $\overset{1}{\psi}_{m,n,j}(u_m)$, $\overset{1}{\chi}_{m,n,j}(u_m)$ функций $\overset{1}{\varphi}_m(u_m,v)$, $\overset{1}{\psi}_m(u_m,v)$, $\overset{1}{\chi}_m(u_m,v)$ запишутся так:

$$\overset{1}{\varphi}_{m,01}(u_m)=c_1\lambda_0,\ \overset{1}{\varphi}_{m,n,j}(u_m)=0,\ \text{n=2,3, …, j=1,2},\ \overset{1}{\psi}_{m,01}(u_m)=0,\ \overset{1}{\psi}_{m,11}(u_m)=c_2\lambda_0,$$
$$\overset{1}{\psi}_{m,12}(u_m)=c_3\lambda_0,\ \overset{1}{\psi}_{m,n,j}(u_m)=0,\ \text{n=2,3, … , j=1,2},\ \overset{1}{\chi}_{m,01}(u_m)=0,\ \overset{1}{\chi}_{m,11}(u_m)=-c_2\lambda_0,$$
$$\overset{1}{\chi}_{m,12}(u_m)=c_3\lambda_0,\ \ \overset{1}{\chi}_{m,n,j}(u_m)=0,\ \text{n=2,3, …, j=1,2.}$$

Отсюда относительно интересующих нас функций $\overset{1}{\varphi}_{m,n}(u)$, $\overset{1}{\chi}_{m,n}(u)$ получаем следующие условия:

$$\overset{1}{\varphi}_{m,n}(u_m)=0,\ \overset{1}{\chi}_{m,n}(u_m)=0,\ \text{n=2,3, …} \tag{19}$$

Таким образом, краевая задача (5а), (6), (8) для рассматриваемого случая свелась к исследованию решений системы (11) при условиях (12) и (19).

а) Пусть меридиан $\rho(u)$ поверхности Ф состоит из одного гладкого звена , т.е.

$$\rho(u)=\rho_1(u),\quad u_0\le u\le u_1, \tag{20}$$

где $\rho_1(u_0)=0$, $\rho_1(u)>0$ при $u_0<u\le u_1$. Тогда условия (19) примут вид:

$$\overset{1}{\varphi}_{1,n}(u_1)=0,\ \overset{1}{\chi}_{1,n}(u_1)=0,\ \text{n=2,3, …} \tag{21}$$

Значению $u=u_0$ соответствует полюс поверхности вращения Ф.

Система (11) при $i=1$ в полюсе $u=u_0$ имеет особенность (коэффициент $\rho_1(u_0)=0$ при производной). Так как полюс поверхности Ф не является точкой уплощения, то порядок нуля функций $\rho_1(u)$ в полюсе равен $\frac{1}{2}$. Тогда система (11) ($i=1$) в окрестности особой точки имеет два линейно независимых решения, одно из которых имеет в особой точке нуль порядка $\frac{n}{2}$, а другое – полюс порядка - $\frac{n}{2}$. Так как нас интересуют только ограниченные решения системы (11), то, за счет выбора произвольных постоянных, общее решение системы на $[u_0, u_1]$ можем представить в виде:

$$\overset{1}{\varphi}_{1,n}(u) = C^1_{1,n} \overset{1\,(1)}{\varphi}_{1,n}(u),$$

$$\overset{1}{\chi}_{1,n}(u) = C^1_{1,n} \overset{1\,(1)}{\chi}_{1,n}(u), \ \text{n=2,3, … }, \tag{22}$$

где $\overset{1\,(1)}{\varphi}_{1,n}(u)$, $\overset{1\,(1)}{\chi}_{1,n}(u)$ - ограниченное решение системы (11) ($i=1$) , а $C^1_{1,n}$ - произвольные. Если учесть краевое условие (21) , то из (22) получим $C^1_{1,n}$=0.

Следовательно,

$$\overset{1}{\varphi}_{1,n}(u)=0, \ \overset{1}{\chi}_{1,n}(u)=0, \ u_0 \le u \le u_1, \ \text{n=2,3, …} \tag{23}$$

Это означает, что поверхность Ф, меридиан которой имеет вид (20), в данном классе деформации обладает жесткостью первого порядка.

б) Рассмотрим теперь случай, когда меридиан поверхности Ф состоит из m гладких звеньев, тогда его уравнение можно представить в виде (2).

Рассмотрение начинаем с последнего промежутка гладкости меридиана $\rho = \rho(u)$, т.е., с промежутка $[u_{m-1}, u_m]$. На этом промежутке система (11) ($i=m$) имеет фундаментальную систему решений, так как коэффициенты системы непрерывны и принадлежат классу $C^1[u_{m-1}, u_m]$ и $\rho(u) \ne 0$ для $u \in [u_{m-1}, u_m]$. Общее решение системы (11) ($i=m$) на промежутке $[u_{m-1}, u_m]$ запишется так:

$$\overset{1}{\varphi}_{m,n}(u) = C^1_{m,n} \overset{1\,(1)}{\varphi}_{m,n}(u) + \overset{2}{C}_{m,n} \overset{1\,(2)}{\varphi}_{m,n}(u), \quad \overset{1}{\chi}_{m,n}(u) = C^1_{m,n} \overset{1\,(1)}{\chi}_{m,n}(u) + \overset{2}{C}_{m,n} \overset{1\,(2)}{\chi}_{m,n}(u), \ \text{n=2,3,…} \tag{24}$$

где $\overset{1\,(1)}{\varphi}_{m,n}(u)$, $\overset{1\,(1)}{\chi}_{m,n}(u)$ и $\overset{1\,(2)}{\varphi}_{m,n}(u)$, $\overset{1\,(2)}{\chi}_{m,n}(u)$ - фундаментальная система решений уравнения (11), а $C^1_{m,n}$, $C^2_{m,n}$ - произвольные постоянные. Очевидно, что единственным решением системы (11) ($i=m$) на промежутке $[u_{m-1}, u_m]$, которое удовлетворяет условиям (19), будет $\overset{1}{\varphi}_{m,n}(u)=0$, $\overset{1}{\chi}_{m,n}(u)=0$, n=2,3,…

Отсюда, воспользовавшись равенствами (12), получаем $\overset{1}{\varphi}_{m-1,n}(u_{m-1})=0$, $\overset{1}{\chi}_{m-1,n}(u_{m-1})=0$, n=2,3,…

Повторяя аналогичные рассуждения на промежутках $[u_{m-2}, u_{m-1}]$, $[u_{m-3}, u_{m-2}]$, …, $[u_1, u_2]$, получаем, что

$$\overset{1}{\varphi}_{m-1,n}(u)=0, \ \overset{1}{\chi}_{m-1,n}(u)=0, \ u_{m-2} \le u \le u_{m-1},$$

$$\overset{1}{\varphi}_{m-2,n}(u)=0, \ \overset{1}{\chi}_{m-2,n}(u)=0, \ u_{m-3} \le u \le u_{m-2},$$

………………………………………………

$$\overset{1}{\varphi}_{2,n}(u)=0,\ \overset{1}{\chi}_{2,n}(u)=0,\ u_1 \le u \le u_2,\ \text{n=2,3,…}$$

Отсюда, учитывая заключение пункта а), приходим к выводу, что $\overset{1}{\varphi}_{i,n}(u)=0$, $\overset{1}{\chi}_{2,n}(u)=0$ во всех промежутках $[u_{i-1},u_i]$ ($i=\overline{1,m}$), n=2,3,….

Тогда изгибающие поля $\overset{1}{\vec{z}}_i(u,v)=[\vec{a}_i,\vec{x}(u,v)]+\vec{b}_i$ $u_{i-1}\le u\le u_1$, $i=\overline{1,m}$, где $\vec{a}_i$, $\vec{b}_i$ - произвольные векторы. Учитывая равенства (4а), легко убеждаемся, что

$$\vec{a}_1=\vec{a}_2=...=\vec{a}_{m-1}=\vec{a}_m=\vec{a}=\overrightarrow{const} \text{ и } \vec{b}_1=\vec{b}_2=...=\vec{b}_{m-1}=\vec{b}_m=\vec{b}=\overrightarrow{const}.$$

Отсюда и из (2) заключаем, что изгибающее поле $\overset{1}{z}(u\ ,v)$ бесконечно малого первого порядка поверхности Ф представимо в виде:

$$\overset{1}{\vec{z}}(u,v)=[\vec{a},\vec{x}(u,v)]+\vec{b}.$$

Это означает, что кусочно-гладкая односвязная поверхность вращения Ф, на которую наложены связи, допускающие перемещения точек края лишь в заданном постоянном направлении $\vec{c}$, в рассматриваемом случае обладает жесткостью первого порядка.

2. Теперь рассмотрим случай, когда направление $\vec{c}$ параллельно оси вращения. Тогда $\beta(v)=0$, $\gamma(v)=0$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\vec{c}=\vec{k}$. Тогда краевое условие (6) примет вид:

$$\overset{1}{\vec{z}}_m(u_m,v)=\lambda_1(v)\vec{k} \tag{25}$$

Отсюда, учитывая (10), для координат вектора $\overset{1}{\vec{z}}_m(u\ ,v)$ находим

$$\overset{1}{\varphi}_m(u_m,v)=\lambda_1(v),\ \overset{1}{\psi}_m(u_m,v)=0,\quad \overset{1}{\chi}_m(u_m,v)=0. \tag{26}$$

Раскладывая в ряды Фурье функции $\overset{1}{\varphi}_m(u_m,v)$, $\overset{1}{\psi}_m(u_m,v)$, $\overset{1}{\chi}_m(u_m,v)$, из (26) относительно интересующих нас функций $\overset{1}{\varphi}_{m,n}(u)$, $\overset{1}{\chi}_{m,n}(u)$ получим

$$\overset{1}{\varphi}_{m,n}(u_m)=\lambda_{1n},\ \overset{1}{\chi}_{m,n}(u_m)=0,\ \text{n=2,3,…}, \tag{27}$$

где λ_{1n}-коэффициенты Фурье функций $\lambda_1(v)$. Если $\lambda_1(v)=const$., то условия (27) совпадут с условиями (19). Тогда поверхность Ф в рассматриваемом случае обладает жесткостью первого порядка.

Поскольку функция $\lambda_1(v)$ произвольная, то не все ее коэффициенты Фурье λ_{1n} (n=2,3,…,) одновременно равны нулю. Тогда, пользуясь рассуждениями пункта 1, нетрудно убедиться, что система дифференциальных уравнений (11) на промежутке $[u_0,u_m]$ имеет нетривиальное ограниченное решение, которое удовлетворяет краевому условию (27), а в точках излома меридиана, - условиям (12).

Это означает, что поверхность Ф в рассматриваемом случае обладает нежесткостью первого порядка.

Докажем, что нетривиальные бесконечно малые изгибания первого порядка, которые допускает кусочно-гладкая односвязная поверхность вращения Ф, когда направление $\vec{C}$ параллельно оси вращения, не продолжимы в нетривиальные бесконечно малые изгибания второго порядка.

Пусть

$$\vec{x}(u_m, v) = u_m\vec{k} + \rho(u_m)\vec{a}(v), \quad 0 \le v < 2\pi \tag{28}$$

радиус-вектор произвольной точки края g поверхности Ф. Тогда из системы (5), учитывая (7), где $\vec{c} = \vec{k}$, получим

$$\mathrm{d}\overset{1}{\vec{z}}{}^{2}_{m}(u_m, v) = 0, \tag{29}$$

откуда

$$\overset{1}{\vec{z}}_m(u_m, v) = \vec{A}, \tag{30}$$

где $\vec{A}$ - произвольный постоянный вектор.

Воспользовавшись условием (25), из равенства (30) получаем

$$\overset{1}{\vec{z}}_m(u_m, v) = c_0\vec{k}, \tag{31}$$

где c_0 -произвольная постоянная.

Тогда для функций $\overset{1}{\varphi}_m(u,v)$, $\overset{1}{\psi}_m(u,v)$, $\overset{1}{\chi}_m(u,v)$ получаем $\overset{1}{\varphi}_m(u_m,v) = c_0$, $\overset{1}{\psi}_m(u_m,v) = 0$, $\overset{1}{\chi}_m(u_m,v) = 0$. Отсюда, принимая во внимание разложения функций $\overset{1}{\varphi}_m(u,v)$, $\overset{1}{\psi}_m(u,v)$, $\overset{1}{\chi}_m(u,v)$ в ряды Фурье и систему дифференциальных уравнений (11), получаем

$$\overset{1}{\psi}_{m,n}(u_m) = 0, \quad \overset{1}{\chi}_{m,n}(u_m) = 0 . \tag{32}$$

Далее, повторяя рассуждения пункта 1, заключаем, что изгибающие поле $\overset{1}{\vec{z}}(u,v)$ кусочно-гладкой поверхноси вращения Ф представимо в виде

$$\overset{1}{\vec{z}}(u,v) = [\vec{a}, \vec{x}(u,v)] + \vec{b}, \tag{33}$$

где $\vec{a}, \vec{b}$ - произвольные постоянные векторы.

Таким образом, из двух уравнений системы (5) мы получили, что изгибающее поле $\overset{1}{\vec{z}}(u,v)$ поверхности Ф имеет вид (33). Это означает, что поверхность Ф в указанном классе деформации обладает жесткостью второго порядка, а следовательно, аналитически неизгибаема.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов Н. В. Некоторые предложения о жесткости и неизгибаемости. Успехи мат. наук. – Т. 7 . вып. 5 (15), 1952. – С. 214-215
2. Кон-Фоссен С. Э. Некоторые вопросы дифференциальный геометрии «в целом» - М. : Физматгиз, 1959.
3. Аллаев Г. М., Михайловский В. И. О бесконечно малых изгибаниях первого порядка гладких поверхностей вращения, подчинённых вдоль края коническим втулочным связям. Укр. геом. сбор. -1990. вып. 33. –С. 3-8.