НЕЛОКАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА

К.Р. Есмаханова
*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
Астана, Казахстан, Myrzakul@rambler.ru*

Модели различных форм движения являются предметами исследования теоретической и математической физики. Волны маленькой амплитуды описываются линейным дифференциальным уравнением, и их поведение может быть детально изучено. Когда амплитуда не мала, дифференциальное уравнение становится нелинейным, и его анализ, вообще говоря, становится крайне сложной проблемой. Первым примером таких нелинейных уравнений является уравнение Кортевега--де Фриза. Вначале замечательные свойства уравнения Кортевега--де Фриза рассматривались исключительно как свойства данного уравнения. Их универсальная природа стала постепенно проясняться в результате интенсивных исследований, проведенных в конце 1960-х годов. В настоящий момент известно огромное количество интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений в работах Абловица М., Захарова В.Е., Крускала Д., Каупа Д., Лакса П.Д., Фаддеева Л.Д., Маханкова В.Г., Ньюэлла А. и др. Общее принятое название для них -солитонные уравнения. Типичным примером таких систем можно считать цепочку Тоды, уравнения sin--Гордона, уравнения магнитики Гейзенберга, нелинейного уравнения Шредингера и др.

В связи с интенсивным развитием теории солитонов исследование многомерных нелинейных интегрируемых уравнений в настоящее время стало актуальной задачей в работах Шульмана Е.И., Михайлова А.В., Нижника Л.П., Савельева М.В., Шабата А.Б., Захарова В.Е., Дубровина Б.А., Матвеева В.Б., Новикова С.П., Манакова С.А. и др. (см. [1-3]). Были разработаны различные методы нахождения солитонных решений этих уравнений. Одним из таких методов является метод $\bar{\partial}$ -- одевания (проблемы). Этот метод позволяет одновременно построить нелинейное уравнение, его представление Лакса и солитонные решения.

Адаптация метода $\bar{\partial}$--проблемы к конкретным уравнениям представляет собой одну из актуальных задач, стоящих перед нелинейной математической физикой.

1. Постановка задачи.

Система нелинейное уравнение Шредингера размерности (2+1), которое рассматривается в данном работе, имеет вид:

$$iq_t + M_1 q + vq = 0, \tag{1a}$$

$$ir_t - M_1 r - vr = 0, \tag{1b}$$

$$M_2 v = -2M_1(rq), \tag{1c}$$

где r, q, v являются произвольными комплексными функциями и $v = 2(U_1 - U_2)$, зависящими от независимых переменных x, y, t. Здесь операторы M_1 и M_2 имеют вид

$$M_1 = 4\left(a^2 - 2ab - b\right)\partial^2_{xx} + 4\alpha\left(b - a\right)\partial^2_{xy} + \alpha^2\partial^2_{yy}, \tag{2a}$$

$$M_2 = 4a\left(a+1\right)\partial^2_{xx} - 2\alpha\left(2a+1\right)\partial^2_{xy} + \alpha^2\partial^2_{yy}, \tag{2b}$$

где a, b - действительные постоянные и $\alpha^2 = -1$. Оно возникает в теории многомерных интегрируемых систем. Как принято в теории солитонов в дальнейшем, мы будем называть систему уравнений просто уравнением. Это нелинейное уравнение допускает ряд интегрируемых редукций. Отметим, что уравнения (1) является одним из (2+1)-мерных обобщений (1+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера, которое имеет вид,

$$iq_t + q_{xx} + |q|q = 0.$$

Мы должны найти решения (2+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера.

Для решений нелинейного уравнения (1), следуя методике, предложенной в [1], необходимо решить нелокальную задачу Римана-Гильберта.

2. **Нелокальная задача Римана-Гильберта.**

Для достижения поставленной задачи рассмотрим одно из обобщений уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{\lambda}} = f,$$

а именно, следующую матричную нелокальную задачу Римана-Гильберта, т.е. матичную $\overline{\partial}$ - проблему

$$\frac{\partial W(\lambda, \overline{\lambda})}{\partial \overline{\lambda}} = \iint_G W(\mu, \overline{\mu}) R(\mu, \overline{\mu}; \lambda, \overline{\lambda}) d\mu \wedge d\overline{\mu} + W'(\lambda, \overline{\lambda}), \tag{3}$$

где W, W' и R являются матричными функциями. При этом свободный член W' и ядро R являются известными функциями. Мы обозначим область (обычно полагаем ее просто односвязной) на комплексной плоскости через G, а её кусочно гладкую и с положительной ориентацией границу обозначим через $\partial G = \Gamma$. Полную комплексную плоскость обозначим через E. Для интегрирования по области мы будем использовать меру Лебега

$$d\lambda \wedge d\overline{\lambda} = -2i d\lambda_R \cdot d\lambda_I$$

где $\wedge$ символ означает внешнее произведение.

В общем случае, решение интегро--дифференциального уравнения (3) можно представить в виде [2]:

$$W(\lambda, \overline{\lambda}) = V'(\lambda, \overline{\lambda}) + F(\lambda) + \frac{1}{2\pi i} \iint_G \frac{d\lambda' \wedge d\overline{\lambda}'}{\lambda' - \lambda} \iint_G W(\mu, \overline{\mu}) R(\mu, \overline{\mu}; \lambda', \overline{\lambda}') d\mu \wedge d\overline{\mu}, \tag{4}$$

где $F(\lambda)$--произвольная аналитическая функция по λ в G, т.е. $\frac{\partial F}{\partial \overline{\lambda}} = 0$ и $V'(\lambda, \overline{\lambda})$ -- произвольная матричная функция, являющаяся решением $\overline{\partial}$-- уравнения $W' = \frac{\partial V}{\partial \overline{\lambda}}$. Заметим, что поскольку имеет место формула (3), только сингулярная часть $V'(\lambda, \overline{\lambda})$ дает вклад в свободный член в $\overline{\partial}$ -- проблеме (3). Целью наших дальнейших построений является установление интегрируемости рассматриваемых уравнений. При этом, выбранный метод позволяет не акцентировать в каких функциональных пространствах это происходит. Последний вопрос зависит от конкретного вида данных задачи. Например, чтобы уравнение (4) было интегральным уравнением Фредгольма второго рода в пространстве непрерывных функций $C(\overline{G})$ достаточно, чтобы ядро

$R(\mu,\overline{\mu};\lambda',\overline{\lambda}')$ имела слабую особенность так, чтобы $R(\mu,\overline{\mu};\lambda',\overline{\lambda}')\in L_p(G),\quad p>2$ по $\lambda,\overline{\lambda}$ и $R(\mu,\overline{\mu};\lambda',\overline{\lambda}')$ по $\mu,\overline{\mu}$, а функция $V'(\lambda,\overline{\lambda})\in C(\overline{G})$, что выполнимо, например, если $W'(\lambda,\overline{\lambda})$ в (3) принадлежит $L_p(G),\ p>2$.

При этих условиях интегро--дифференциальное уравнение (3) имеет непрерывное в замкнутой области $\overline{G}$ решение $W(\lambda,\overline{\lambda})$, которое непрерывно продолжается вне $\overline{G}$ аналитической функцией [3].

Таким образом, неоднородное интегро--дифференциальное уравнение (3) однозначно разрешимо в пределах некоторого класса функции $W(\lambda,\overline{\lambda})$, по крайней мере, для ядра R со слабой особенностью.

Интегральное уравнение (4) запишем виде:

$$W(\lambda,\overline{\lambda})=V(\lambda,\overline{\lambda})+\frac{1}{2\pi i}\iint_G\frac{d\lambda'\wedge d\overline{\lambda}'}{\lambda'-\lambda}\iint_G W(\mu,\overline{\mu})R(\mu,\overline{\mu};\lambda',\overline{\lambda}')d\mu\wedge d\overline{\mu}, \tag{5}$$

А теперь рассмотрим решения уравнения (5) с дополнительным условиям: $W\to 1$ при $|\lambda|\to\infty$ и W разлагается в асимптотический ряд

$$W=1+\lambda^{-1}W_{-1}+\lambda^{-2}W_{-2}+\lambda^{-3}W_{-3}+\dots\ . \tag{6}$$

Связь между решениями (2+1)-мерного уравнения Шредингера (1) и интегрального уравнения (6) задаются формулами следующей теоремы:

$$q=-2i(W_{-1})_{12},\qquad r=2i(W_{-1})_{21},\qquad v=2(U_1-U_2), \tag{7}$$

где

$$U_1=i(W_{-1})_{11},\qquad U_2=i(W_{-1})_{22},$$

которая доказано в работе [4].

3. **Решения проблемы. Солитонное решения.**

Теперь переходим к построению решений матричного интегрального уравнения (5) для $W(\lambda,\overline{\lambda})$ нормой $V\to 1\$$ и $G=E$. Чтобы уравнение (5) было интегральным уравнением Фредгольма второго рода, мы полагаем, что ядро $R(\mu,\overline{\mu};\lambda',\overline{\lambda}')$ должно иметь слабую особенность.

Теорема. Если ядро R берем в виде

$$R(\mu,\overline{\mu};\lambda,\overline{\lambda};x,y,t)=e^{F(\mu,x,y,t)}R_0(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda})e^{-F(\lambda,x,y,t)},$$

где R_0 является произвольной 2×2 матричной функцией и

$$F(\mu,x,y,t)=i\mu Ix+\frac{2i\mu}{\alpha}B_1y-4i\mu^2C_2t\,.$$

Здесь диагональные и постоянные 2×2 матрицы B_1, C_2 и I задаются следующим образом:

$$B_1=\begin{pmatrix}a+1&0\\0&a\end{pmatrix},\qquad C_2=\begin{pmatrix}b+1&0\\0&b\end{pmatrix},\qquad I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Тогда решения обобщенного нелинейного уравнения Шредингера (1) определяются формулами

$$U_1(x,y,t) = -\frac{1}{2\pi}\iint_E d\lambda' \wedge d\overline{\lambda}' \iint_E R_{011}\left(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}\right) e^{i(\mu-\lambda)x+\frac{2i}{\alpha}(\mu-\lambda)(a+1)y-4i\left(\mu^2-\lambda^2\right)(b+1)t} d\mu \wedge d\overline{\mu}$$

$$q(x,y,t) = \frac{1}{\pi}\iint_E d\lambda' \wedge d\overline{\lambda}' \iint_E R_{012}\left(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}\right) e^{i(\mu-\lambda)x+\frac{2i}{\alpha}(\mu-\lambda)ay-4i\left(\mu^2-\lambda^2\right)bt} d\mu \wedge d\overline{\mu},$$

$$r(x,y,t) = -\frac{1}{\pi}\iint_E d\lambda' \wedge d\overline{\lambda}' \iint_E R_{021}\left(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}\right) e^{i(\mu-\lambda)x+\frac{2i}{\alpha}(\mu-\lambda)ay-\frac{2i}{\alpha}\lambda y-4i\left(\mu^2-\lambda^2\right)bt+4i\left(\mu^2-\lambda^2\right)t} d\mu \wedge d\overline{\mu},\ ,$$

$$U_2(x,y,t) = -\frac{1}{2\pi}\iint_E d\lambda' \wedge d\overline{\lambda}' \iint_E R_{022}\left(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}\right) e^{i(\mu-\lambda)x+\frac{2i}{\alpha}(\mu-\lambda)ay-4i\left(\mu^2-\lambda^2\right)bt} d\mu \wedge d\overline{\mu}.$$

Доказательство. Начнем с матричной $\overline{\partial}$ - проблемы. Подставляя формулы асимптотического разложения (6) и формулу $\frac{1}{\lambda'-\lambda} = \frac{1}{\lambda'}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^k$ при в (5), для ядра R со слабой особенностью получаем выражения

$$\lambda^0: \qquad 1 = 1, \tag{8a}$$

$$\lambda^{-1}: \qquad W_{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\iint_E d\lambda' \wedge d\overline{\lambda}' \iint_E R\left(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}\right) d\mu \wedge d\overline{\mu}, \tag{8b}$$

$$\begin{aligned}\lambda^{-2}: \qquad W_{-2} = &-\frac{1}{2\pi i}\iint_E \lambda' d\lambda' \wedge d\overline{\lambda}' \iint_E R\left(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}\right) d\mu \wedge d\overline{\mu} - \\ &-\frac{1}{2\pi i}\iint_E \lambda' d\lambda' \wedge d\overline{\lambda}' \iint_E W_{-1} R\left(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}\right) d\mu \wedge d\overline{\mu},\end{aligned} \tag{8c}$$

……………………………………………………………

Отсюда (8a) выполняется тождественно, из (8b) используя условие (7), получаем решения

$$q(x,y,t) = \frac{1}{\pi}\iint_E d\lambda' \wedge d\overline{\lambda}' \iint_E \left(W\left(\mu,\overline{\mu}\right) R\left(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}\right)\right)_{12} d\mu \wedge d\overline{\mu}, \tag{9a}$$

$$r(x,y,t) = -\frac{1}{\pi}\iint_E d\lambda' \wedge d\overline{\lambda}' \iint_E \left(W\left(\mu,\overline{\mu}\right) R\left(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}\right)\right)_{21} d\mu \wedge d\overline{\mu}, \tag{9b}$$

$$U(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\iint_E d\lambda' \wedge d\overline{\lambda}' \iint_E \left(W\left(\mu,\overline{\mu}\right) R\left(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}\right)\right)_{diag} d\mu \wedge d\overline{\mu}. \tag{9c}$$

Для данного ядра со слабой особенностью R при $W(\infty) = 1$, следовательно, имеем

$$q(x,y,t) = \frac{1}{\pi}\iint_E d\lambda' \wedge d\overline{\lambda}' \iint_E (R)_{12}\left(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}\right) d\mu \wedge d\overline{\mu},$$

$$r(x,y,t) = -\frac{1}{\pi}\iint_E d\lambda' \wedge d\overline{\lambda}' \iint_E (R)_{21}\left(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}\right) d\mu \wedge d\overline{\mu}.$$

Подставляя формулу (7) в (9c) получим

$$U_1(x,y,t)=-\frac{1}{2\pi}\iint_E d\lambda'\wedge d\bar{\lambda}'\iint_E (R)_{11}\left(\mu,\bar{\mu},\lambda,\bar{\lambda}\right)d\mu\wedge d\bar{\mu}\,,$$

$$U_2(x,y,t)=-\frac{1}{2\pi}\iint_E d\lambda'\wedge d\bar{\lambda}'\iint_E (R)_{22}\left(\mu,\bar{\mu},\lambda,\bar{\lambda}\right)d\mu\wedge d\bar{\mu}\,,$$

Предполагаем, что R_0 -- произвольная 2×2 матрица. Тогда решения имеют вид

$$q(x,y,t)=\frac{1}{\pi}\iint_E d\lambda'\wedge d\bar{\lambda}'\iint_E R_{012}\left(\mu,\bar{\mu},\lambda,\bar{\lambda}\right)e^{i(\mu-\lambda)x+\frac{2i}{\alpha}(\mu-\lambda)ay-4i\left(\mu^2-\lambda^2\right)bt}d\mu\wedge d\bar{\mu}\,, \quad \text{(10a)}$$

$$r(x,y,t)=-\frac{1}{\pi}\iint_E d\lambda'\wedge d\bar{\lambda}'\iint_E R_{021}\left(\mu,\bar{\mu},\lambda,\bar{\lambda}\right)e^{i(\mu-\lambda)x+\frac{2i}{\alpha}(\mu-\lambda)ay-\frac{2i}{\alpha}\lambda y-4i\left(\mu^2-\lambda^2\right)bt+4i\left(\mu^2-\lambda^2\right)t}d\mu\wedge d\bar{\mu}\,, \quad \text{(10b)}$$

$$U_1(x,y,t)=-\frac{1}{2\pi}\iint_E d\lambda'\wedge d\bar{\lambda}'\iint_E R_{011}\left(\mu,\bar{\mu},\lambda,\bar{\lambda}\right)e^{i(\mu-\lambda)x+\frac{2i}{\alpha}(\mu-\lambda)(a+1)y-4i\left(\mu^2-\lambda^2\right)(b+1)t}d\mu\wedge d\bar{\mu}\,, \quad \text{(10c)}$$

$$U_2(x,y,t)=-\frac{1}{2\pi}\iint_E d\lambda'\wedge d\bar{\lambda}'\iint_E R_{022}\left(\mu,\bar{\mu},\lambda,\bar{\lambda}\right)e^{i(\mu-\lambda)x+\frac{2i}{\alpha}(\mu-\lambda)ay-4i\left(\mu^2-\lambda^2\right)bt}d\mu\wedge d\bar{\mu}\,. \quad \text{(10d)}$$

Таким образом теорема доказана.

Итак используя метод $\bar{\partial}$ - проблемы построили солитоно подобные решения (2+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера.