СОПРЯЖЕНИЯ МЕЖДУ ГОМЕОМОРФИЗМАМИ ОКРУЖНОСТИ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ ИЗЛОМА

А.Ю. Жураева

Классификация гомеоморфизмов окружности является одной из важных проблем в теории одномерных динамических систем. Гомеоморфизмы окружности впервые изучались в работе А.Пуанкаре [1] и мотивировались изучением дифференциальных уравнений. В настоящей работе изучается гомеоморфизмы окружности S^1, с одним изломом. Мы отождествляем единичную окружность $S^1 = R^1/Z^1$ с полуинтервалом $[0,1)$. Рассмотрим множество непрерывных строго монотонных функций $F(x), x \in R^1$, со следующими свойствами:

a) $0 < F(0) \le 1$ и $F(\mathrm{x}+1) = F(\mathrm{x})+1$ для всех $x \in R^1$;

b) существует точка $x_c \in S^1$ такая, что в этой точке определены односторонние положительные производные $F'(x_c - 0)$, $F'(x_c + 0)$ и $F'(x_c - 0) \ne F'(x_c + 0)$;

c) $F'(x)$ абсолютно непрерывная функция на $[x_c, x_c+1]$, $F'(x) > const > 0$ для всех $x \in (x_c, x_c+1)$ и $F''(x) \in L^1(S^1, dl)$, l-мера Лебега на S^1.

Всякий сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности с одним изломом однозначно определяется функцией $f(x)$ и задается формулой $f(x) = F(x) \,(\mathrm{mod}1)$, $x \in S^1$. Функция $F(x)$ называется **поднятием** гомеоморфизма $f(x)$. Точка $x = x_c$ называется **точкой излома** гомеоморфизма f. Число $\sigma_f = \dfrac{F'(x_c-0)}{F'(x_c+0)}$ называется **величиной излома** гомеоморфизма f в точке x_c. Пусть число вращения $\rho = \rho_f$ иррационально и ее разложение в непрерывную дробь имеет вид: $\rho = [k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n, \ldots]$. Положим $p_n/q_n = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$, $n \ge 1$. Числа p_n/q_n называются **подходящими дробями** для ρ. Обозначим через $\Delta_0^n(x_0)$ замкнутый интервал, концами которого служат точки x_0 и $x_{q_n} = f^{q_n} x_0$. Заметим, что при нечетным n точка x_{q_n} лежит слева от x_0, а при чётном n - справа. Положим $\Delta_i^n(x_0) := f^i \Delta_0^n(x_0), i \ge 1$. Хорошо известно, что система отрезков $\xi_n(x_0) = \{\Delta_i^{n-1}(x_0), 0 \le i < q_n; \quad \Delta_j^n(x_0), 0 \le j < q_{n-1}\}$ определяет разбиение окружности. Мы низовьем ее n- ым **динамическим разбиением**. Динамические разбиения $\xi_m(x_0)$ измельчаются с ростом m, $\xi_{m+1}(x_0) > \xi_m(x_0)$ в том смысле, что каждый элемент предыдущего разбиения состоит из объединения целого числа элементов следующего разбиения.

Определение 1. Два гомеоморфизма окружности f_1 и f_2 называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм окружности φ такой, что $\varphi \circ f_1 = f_2 \circ \varphi$. При этом φ называется **сопрягающим гомеоморфизмом** или просто **сопряжением**.

Теорема 1. Рассмотрим гомеоморфизм окружности f с поднятием F и иррациональным числом вращения ρ_f. Пусть $F \in C^1(S^1 \setminus x_c)$, $\underset{[x_c, x_c+1]}{\mathrm{var}} \ln F' = \bar{v} < \infty$, существуют

$F'(x_c \pm 0) > 0$ и $F'(x_c - 0) \neq F'(x_c + 0)$. Тогда f топологически эквивалентен линейному повороту f_ρ.

Отметим, что Теорема 1 является обобщением классической теоремы Данжуа для случае гомеоморфизмов окружности с одним изломом (см. напр.[2]).

Определение 2. Пусть $\tilde{N} > 1$. Два интервала называются $C-$измеримыми, если отношения их длин лежат в $[C^{-1};C]$.

Основной целью нашей работы является доказательство следующего результата.

Теорема 2. Пусть $f_i, i = 1,2$ гомеоморфизмы окружности, удовлетворяющие условиям a)-c). Предположим, что:

(1) их числа вращения $\rho(f_i)$ $i = 1,2$ совпадают и иррационально т.е., $\rho(f_1) = \rho(f_2)$;

(2) величины изломов f_1 и f_2 различны т. е. $\sigma(f_1) \neq \sigma(f_2)$.

Тогда сопряжения между f_1 и f_2 является сингулярной функцией, т. е. $\psi(x)$ непрерывна на S^1 и $\psi'(x) = 0$ п.в. (относительно меры Лебега).

В дальнейшем важную роль играет понятие двойного отношения (cross-ratio).

Определение 3. Двойным отношением четверки (z_1, z_2, z_3, z_4), $z_1 < z_2 < z_3 < z_4, z_i \in R^1$, $i = 1,2,3,4$ называется число $Cr(z_1, z_2, z_3, z_4) := \dfrac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}$.

Определение 4. Пусть задана четверка чисел $z_i \in R^1, i = 1,2,3,4$, $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ и строго возрастающая функция $g : [z_1, z_4] \to R^1$. Искажением двойных отношений четверки $z_i \in R^1$, $i = 1,2,3,4$ $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ называется число

$$Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; g) := \frac{Cr(g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4))}{Cr(z_1, z_2, z_3, z_4)}.$$

Пусть $z_i \in S^1$, $i = 1,...,k$, $k \geq 3$ и $z_1 \prec z_2 \prec ... \prec z_k \prec z_1$ порядок на окружности. Определим $\hat{z}_1 = z_1$ и $\hat{z}_i := z_i$ если $z_i \in (z_1, 1)$ и $\hat{z}_i := z_i + 1$, если $z_i \in [0, z_1)$, $i = 2,3,...k$. Очевидно, что $\hat{z}_1 < \hat{z}_2 < ... < \hat{z}_k$. Вектор $(\hat{z}_1, \hat{z}_2, ..., \hat{z}_k)$ называется **поднятиям** $(z_1, z_2, ..., z_k)$. Рассмотрим гомеоморфизм окружности f с поднятием F. Теперь мы определим искажение двойных отношений четверки (z_1, z_2, z_3, z_4) относительно f по формуле $Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; f) := Dist(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4; F)$.

Теперь мы сформулируем основную теорему об искажениях двойных отношений.

Теорема 3. Предположим, что функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a)-c). Пусть $z_i \in S^1$, $i = 1,2,3,4$, $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ и интервал $[z_1, z_4]$ не содержит точку излома x_c. Тогда имеет место следующее соотношение: $Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; F) = 1 + G(z_1, z_2, z_3, z_4; F)$, где

$$|G(z_1, z_2, z_3, z_4; f)| \leq C_1 |z_4 - z_1| \max_{x,t \in [z_1, z_4]} |g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(t)| + C_1 \int_{z_1}^{z_2} |\theta_\varepsilon(y)| dy + C_1 \left(\int_{z_1}^{z_2} |f''(y)| dy \right)^2,$$ константа

$C_1 > 0$ зависит только от функции F.

Теперь рассмотрим, когда интервал $[z_1, z_4]$ содержит особые точки $x = x_c$. Пусть $z_i \in S^1$, $i = 1,2,3,4$, $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$. Введем также следующие обозначения

$$\alpha = z_2 - z_1,\ \beta = z_3 - z_2,\ \gamma = z_4 - z_3,\ \xi = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Лемма 2. Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a)-c) $z_i \in S^1$, $i = 1,2,3,4$, $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ и $z_2 = x_c$. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\left| Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; F) - \frac{\sigma(F)(1+\xi)}{\sigma(F)+\xi} \right| \le K_1 \int_{z_4}^{z_1} |F''(y)| dy,$$

где константа $K_1 > 0$ зависит только от F.

Теперь докажем теорему 2. Рассмотрим два экземпляра единичной окружности S^1. Гомеоморфизм f_1 действует в первой окружности и f_2 на второй окружности. Предположим, $f_i, i = 1,2$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Пусть φ_1 и φ_2 сопряжения гомеоморфизмов f_1 и f_2, к линейному повороту f_ρ, т.е. $\varphi_1 \circ f_1 = f_\rho \circ \varphi_1$ и $\varphi_2 \circ f_2 = f_\rho \circ \varphi_2$. Легко можно проверить, что функция $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ будет сопряжением между гомеоморфизмами f_1 и f_2, т.е. $\psi \circ f_1 = f_2 \circ \psi$. Заметим что сопряжение $\psi(x)$ непрерывно на S^1. Необходимо показать, что $\psi'(x) = 0$, почти для всех x относительно меры Лебега. Производная $\psi'(x)$ существует, в силу монотонности функции ψ, почти для всех x по меры Лебега. Мы покажем, что $\psi'(x) = 0$, всюду, где производная определена.

Лемма 3. Пусть $\psi(x)$ имеет положительную производную $\psi'(x) = \tau_0$ в точке $x_0 \in S^1$. Пусть $z_i \in R, i = 1,2,3,4$, $z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec z_4$ и для некоторой константы $R_1 > 1$ выполнены следующие условия:

a) $R_1^{-1}\beta\sqrt{\varepsilon} \le \alpha \le R_1\beta\sqrt{\varepsilon}$ и $R_1^{-1}\beta \le \gamma \le R_1\beta$ для всех $\varepsilon \in (0,1)$;

b) $\max\limits_{1\le i\le 4} |z_i - x_0| \le R_1\beta.$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ такое, что если $z_i \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $i = 1,2,3,4$,

I) $\frac{\beta}{\alpha}(1 - \tilde{N}_2\sqrt{\varepsilon}) \le \frac{\psi(z_3) - \psi(z_2)}{\psi(z_2) - \psi(z_1)} \le \frac{\beta}{\alpha}(1 + \tilde{N}_2\sqrt{\varepsilon})$ и $\frac{\gamma}{\beta}(1 - \tilde{N}_2\varepsilon) \le \frac{\psi(z_4) - \psi(z_3)}{\psi(z_4) - \psi(z_2)} \le \frac{\gamma}{\beta}(1 + \tilde{N}_2\varepsilon)$;

II) $|Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; \psi) - 1| \le C_2\sqrt{\varepsilon}$

где константа $C_2 > 0$ зависит лишь от R_1.

Лемма 4. Пусть поднятие $F_1(x)$ гомеоморфизма f_1 удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда для любого $x_0 \in S^1$ и для любого $\delta > 0$, существует $N = N(\delta, x_0)$ такое, что для всех $n > N$, найдется тройка отрезков $[z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4]$ со следующими свойствами:

(1) Интервал $[z_1, z_4]$, $[f_1^{q_n} z_1, f_1^{q_n} z_4] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

(2) Отрезки $[z_S, z_{s+1}]$, $[f_1^{q_n} z_s, f_1^{q_n} z_{s+1}], s = 1,2,3$ удовлетворяет условиям a) и b) леммы 3.

Предположим что $\psi'(x)=\tau_0>0$ в некоторой точке $x_0\in S^1$. Рассмотрим динамические разбиения $\eta_n=\eta_n(x_0,f_1)$ точки x_0 на первой окружности и $\zeta_n=\zeta_n(y_0,f_2)$ точки $y_0=\psi(x_0)$ на второй окружности $\eta_n=\Delta_i^{(n-1)}(x_0),0\le i<q_n;$ $\Delta_j^{(n)}(x_0),0\le j<q_{n-1};$ $\zeta_n=C_i^{(n-1)}(y_0),0\le i<q_n$

и $C_j^{(n)}(y_0),0\le j<q_{n-1}$. Здесь возможны следующие два случая: $x_c\in\Delta_{i_0}^{(n-1)}(x_0),\quad 0\le i_0<q_n$ или $x_c\in\Delta_{j_0}^{(n)}(x_0),\quad 0\le j_0<q_{n-1}$. Обозначим через $\overline{x}_c$ прообраз точки x_c который лежит в интервале $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ или $\Delta_0^{(n-1)}(x_0)$. Очевидно, что $\overline{x}_c=f_1^{-l}x_c$, где $l\in(0,q_n)$. Для определенности предположим, что n нечетное число. Тогда $\Delta_0^{(n-1)}(x_0)=[x_0,f_1^{q_n-1}x_0]$ и $\Delta_0^{(n)}(x_0)=[f_1^{q_n}x_0,x_0]$. Очевидно, что $\overline{x}_c\in\Delta_0^{(n-1)}(x_0)\cup\Delta_0^{(n)}(x_0)\subset[f_1^{-q_n-1}x_0,f_1^{q_n-1}x_0]$. Из структуры динамического разбиения следует, что интервалы $f_1^j([f_1^{-q_n-1}\overline{x}_c\ ,f_1^{q_n-1}\overline{x}_c]),0\le j<q_n$, покрывает особенную точку x_c только один раз, а именно $f_1^l\overline{x}_c=x_c,0\le l<q_n$. Так как число вращения ρ гомеоморфизмов f_1 и f_2 иррационально, порядок траектории $\{f_1^k(y_0),k\in Z^1\}$, на первой окружности совпадает с порядком траектории $\{f_2^k\varphi(y_0),k\in Z^1\}$ на второй окружности. Отсюда и из утверждения леммы 3 следует, что $\psi(\Delta_i^{(n-1)}(x_0))=C_i^{(n-1)}(y_0),0\le i<q_n$, $\psi(\Delta_j^{(n)}(x_0))=C_j^{(n)}(y_0),\quad 0\le j<q_{n-1}$. Так как $b_1\in\Delta_0^{(n-1)}\cup\Delta_0^{(n)}$ мы получим $\psi(\overline{x}_c)\in C_0^{(n-1)}\cup C_0^{(n)}$. Отсюда видно, что $f_2^l(\psi(\overline{x}_c))=f_2^{l-1}(f_2\psi(\overline{x}_c))=f_2^{l-1}(\psi(f_1\overline{x}_c))=...=\psi(f_1^l\overline{x}_c)=\psi(x_c)=x_c$. Следовательно, система интервалов $f_2^i([f_2^{-q_n-1}\psi(\overline{x}_c),f_2^{q_n-1}\psi(\overline{x}_c)]),0\le i<q_n$, покрывает особенную точку $\overline{x}_c$ только один раз, а именно $f_2^l(\psi(\overline{x}_c))=x_c$. Введем следующие обозначения:

$$z_2=\overline{x}_c,\ z_3=\frac{\overline{x}_c+f_1^{q_{n-1}}\overline{x}_c}{2},\ z_4=f_1^{q_{n-1}}\overline{x}_c,\ \beta=z_3-z_2,\quad\gamma=z_4-z_3,\quad z_1=z_2-2\beta\sqrt{\varepsilon}.\qquad(1)$$

где $\varepsilon\in(0,e^{-2v}]$. Легко можно проверить, что $z_1\in[f_1^{q_{n-1}}z_2,z_2]$.

Лемма 5. Предположим, что поднятия $F_i(x)\quad i=1,2$ гомеоморфизма f_i удовлетворяет условиям теоремы 2. Пусть точки $z_i\in S^1\quad i=1,2,3,4$ определены по соотношениям (1). Тогда для достаточно больших n имеет место неравенство:

$$\left|\frac{Dist(\psi(z_1),\psi(z_2),\psi(z_3),\psi(z_4);\,f_2^{q_n})}{Dist(z_1,z_2,z_3,z_4;\,f_1^{q_n})}-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right|\le K_3\sqrt{\varepsilon}\,,\qquad(2)$$

где K_3 зависит лишь от функции F_1 и F_2.

Фиксируем $\varepsilon>0$. Определим точки $z_i\in S^1\quad i=1,2,3,4$, по (1). Из леммы 4 следует, что $[z_1,z_4]\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ и интервалы $[z_S,z_{s+1}]$, $[f_1^{q_n}z_s,f_1^{q_n}z_{s+1}],s=1,2,3$ удовлетворяет условиям а)и b) леммы 3. Из утверждения леммы 3 следует, что

$$\left|\frac{Dist(f_1^{q_n}z_1,f_1^{q_n}z_2,f_1^{q_n}z_3,f_1^{q_n}z_4;\psi)}{Dist(z_1,z_2,z_3,z_4;\psi)}-1\right|\le\tilde{N}_3\sqrt{\varepsilon}\qquad(3)$$

где константа $\tilde{N}_3$ не зависит от ε и n. Используя $\psi \circ f_1 = f_2 \circ \psi$ легко можно видеть, что
$\tilde{N}r(\psi(f_1^{q_n} z_1), \psi(f_1^{q_n} z_2), \psi(f_1^{q_n} z_3), \psi(f_1^{q_n} z_4)) = \tilde{N}r(f_2^{q_n}\psi(z_1), f_2^{q_n}\psi(z_2), f_2^{q_n}\psi(z_3), f_2^{q_n}\psi(z_4)).$
Отсюда, используя (3) получаем:

$$\left| \frac{Dist(\psi(z_1), \psi(z_2), \psi(z_3), \psi(z_4); f_2^{q_n})}{Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; f_1^{q_n})} - 1 \right| \le K_4 \sqrt{\varepsilon} \qquad (4)$$

В силу подтверждения Теоремы 2 числа σ_1 и σ_2 различны т. е. $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \neq 1$. Заметим, что при достаточно малых ε соотношения (2) и (4) одновременно не могут выполняется. Это противоречие доказывает теорему 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincare H. Memoire sur les courbes definie par une equation differentiable I-IV // J. Math. Pures et Appl., p. 1881-1886. Имеется русский перевод: О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М. Л: Гостехиздат. 1947.
2. Корнфельд И.П., Синай Г.Я., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.:Наука,1980.
3. Синай Я. Г., Ханин К. М. Гладкость сопряжений диффеоморфизмов окружности с поворотами. УМН, 44, вып. 1(265), 57-81, 1989.