О НЕУЛУЧШАЕМЫХ УСЛОВИЯХ ВЛОЖЕНИЯ РАЗНЫХ МЕТРИК НА ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

А.У. Бимендина, Е.С. Смаилов
РГКП Институт прикладной математики МОН РК, Караганда, Казахстан
e-mail: bimend@mail.ru, esmailov@mail.ru

Аннотация

В данной работе доказывается теорема о вложении разных метрик для класса функций многих переменных $E_{p\theta}^{(n)}(\lambda)$ в пространство Лоренца, в терминах полного наилучшего приближения в метрике $L_{q\tau}(G^n)$, посредством многочленов Прайса многих переменных.

1 Определения и вспомогательные утверждения

Начало теории вложения классов функций было изложено в работе Харди и Литтльвуда [1]. Ряд теорем вложения, носящий основной характер для настоящей работы были получены П.Л. Ульяновым [2], М. Ф. Тиманом [3], М.К. Потаповым [4], Э.А. Стороженко [5], В.И. Коляды [6] и др. Вопросы о необходимом и достаточном условиях вложения классов функций в пространство Лоренца рассмотрены в работах А.Г. Акишева [7], Е.С. Смаилова [8], С. Тазабекова [9] и Н. Темиргалиева [10].

Пусть $\{\varphi_{k_i}^{(i)}(x_i)\}_{k_i=0}^{+\infty}$, $x_i \in G_i$ мультипликативные системы Прайса [11].

Положительная последовательность $\{a_k\}_{k=0}^{+\infty}$ называется квазимонотонной, если $\exists\alpha>0$ такое, что $\frac{a_k}{k^\alpha}\downarrow 0$ при $k\to+\infty$. Заметим, что любая монотонно стремящаяся к нулю последовательность чисел и квазимонотонна.

Будем говорить, что функция $f(\bar{x})$ принадлежит пространству Лоренца $L_{p\theta}(G^n)$ если

$$\|f\|_{L_{p\theta}(G^n)}=\left\{\frac{\theta}{p}\int_0^1 t^{\frac{\theta}{p}-1}\left[\frac{1}{t}\int_0^t f^*(y)dy\right]^\theta dt\right\}^{\frac{1}{\theta}}<+\infty,\ \text{когда}\, 1\le p<+\infty, 1\le\theta<+\infty$$

и $\|f\|_{p\theta}=\sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}}f^*(t)<+\infty$, когда $1\le p<+\infty, \theta=+\infty$, где $f^*(t)$ - невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|, \bar{x}\in G^n$ (см.[12]).

Для функции $f\in L(G^n)$ ставим в соответствие ее ряд Фурье-Прайса $f(\bar{x})\sim\sum\limits_{\nu_1=0}^{+\infty}\dots\sum\limits_{\nu_1=0}^{+\infty}a_{\nu_1,\dots,\nu_n}\prod\limits_{i=1}^{n}\varphi_{\nu_i}(x_i)$, где $a_{\nu_1,\dots,\nu_n}=\int\limits_G\dots\int\limits_G f(t_1,\dots,t_n)\prod\limits_{i=1}^{n}\varphi_{\nu_i}(t_i)dt_1\dots dt_n$, - коэффициенты Фурье-Прайса $\nu_i\in Z^+, i=\overline{1,n}$.

Через $T_{k,\dots k}(x_1,\dots,x_n)=\sum\limits_{\nu_1=0}^{k-1}\dots\sum\limits_{\nu_1=0}^{k-1}a_{\nu_1,\dots,\nu_n}\prod\limits_{i=1}^{n}\varphi_{\nu_i}(x_i)$ - обозначим кратный полином Прайса порядка не выше, чем $k-1$ по переменным $x_i, i=\overline{1,n}$.

Пусть $E_{k,...,k}(f)_{L_{p\theta}} = \inf\left\{\left\| f - T_{l,...,l}\right\|_{L_{p\theta}(G^n)} \; : \; \{T_{l,...,l}(\bar{x})\}, l \le k\right\}$ – полное наилучшее приближение функции $f \in L_{p\theta}(G^n)$ посредством полиномов Прайса в пространство $L_{p\theta}(G^n)$.

Определение 1. Пусть $1 < p < +\infty, 1 < \theta < +\infty$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - заданная последовательность положительных чисел, которая монотонно стремится к нулю, т.е. $\lambda_k \downarrow 0, k \to +\infty$.

Будем говорить, что $f \in E_{p\theta}^{(n)}(\lambda)$, если

1) $f \in L_{p\theta}(G^n)$; 2) $E_{k,...,k}(f)_{L_{p\theta}} \le \lambda_k, \forall k \in \mathbb{N}$.

Утверждение 1. [13] Пусть $f \in L(\Omega), \Omega \subset R_n$ и $\alpha \in [0; \mu(\Omega)]$ некоторое число. Тогда $\sup\limits_{\substack{E \subset \Omega \\ \mu(E) = \alpha}} \left\{\int_E |f(\bar{x})| d\bar{x}\right\} = \int_0^\alpha f^*(t)dt$.

Лемма 1. [14] Пусть последовательность $\{\mu(l)\}_{l=0}^{+\infty}$ такова, что

$$\mu(0) = 1, \; \frac{\mu(l+1)}{\mu(l)} \ge \alpha > 1, \; \forall l \in \mathbb{Z}^+, \tag{1}$$

то для чисел $q > 0$ и $\{a_k\}_{k=0}^{+\infty}, a_k \ge 0$ справедливы неравенства:

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \mu(l)^r \left(\sum_{k=0}^{l} a_k\right)^q \le c_1 \sum_{l=0}^{+\infty} \mu(l)^r a_l^q, \; r < 0; \; \sum_{l=0}^{+\infty} \mu(l)^r \left(\sum_{k=l}^{+\infty} a_k\right)^q \le c_2 \sum_{l=0}^{+\infty} \mu(l)^r a_l^q, \; r > 0,$$

где константы $c_i > 0, i = 1,2$ зависят только от параметров α, r, q.

Лемма 2. [7] Пусть $0 < \gamma < +\infty, 0 < \tau < +\infty$ и последовательность чисел $\{\lambda_m\}_{m=1}^{+\infty}$ такова, что $\lambda_m \downarrow 0$ при $m \to +\infty$. Если ряд $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} m^{\tau\gamma - 1} \lambda_m^\tau$ расходится, то существуют последовательность номеров $\{l_k\}_{k=1}^{+\infty}$ и последовательность положительных чисел $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$, обладающие свойствами:

1) $\mu_k \le \lambda_m$, при всех $m \; : \; l_k \le m < l_{k+1}; 2l_k \le l_{k+1}; \lambda_{l_{k+1}} \le \mu_k, k \in \mathbb{N}$;

2) $\mu_{k+1} \le \frac{1}{2}\mu_k, k \in \mathbb{N}$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} l_k^{\tau\gamma} \mu_k^\tau = +\infty$

Теорема 1. [16] Пусть $\{a_\nu\}_{\nu=0}^{+\infty}$ - неотрицательная квазимонотонная последовательность. Для того чтобы числа a_ν были коэффициентами Фурье Прайса некоторой функции $f \in L_{p\theta}(G), 1 < p < +\infty, 1 < \theta < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} \nu^{\theta(1-\frac{1}{p})-1} a_\nu^\theta < +\infty$, и при этом имеет места неравенства:

$$c_1(p\theta\tau)\left\{a_0^\theta+\sum_{\nu=1}^{+\infty}\nu^{\theta(1-\frac{1}{p})-1}a_\nu^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}}\le\|f\|_{p\theta}\le c_2(p\theta\tau)\left\{a_0^\theta+\sum_{\nu=1}^{+\infty}\nu^{\theta(1-\frac{1}{p})-1}a_\nu^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}}$$

где $const=c_i(p\theta\tau)>0, i=1,2$, от $\{a_\nu\}_{\nu=0}^{+\infty}$ не зависят.

С учетом мультипликативности системы Прайса, путем замены индекса суммирования из этой теоремы непосредственно можем получить следующее важное в дальнейшем утверждение:

Лемма 3. Пусть $1<p<+\infty, 1<\theta<+\infty$ и $\{l_k\}_{k=1}^{+\infty}$ последовательность натуральных чисел из леммы 2. Тогда справедлива неравенства

$$c'_p l_{k+1}^{1-\frac{1}{p}}\le\left\|\sum_{\nu=l_k}^{l_{k+1}-1}\varphi_\nu\right\|_{p\theta}\le c''_p l_{k+1}^{1-\frac{1}{p}},$$

где константы $c'_p>0, c''_p>0$ не зависят от $k\in Z^+$.

Теорема 2. [17] Пусть $1<p<q<+\infty, 1<\theta,\tau\le+\infty$. Тогда для любого полинома Прайса имеет место неравенство

$$\|T_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n}\|_{L_{q\tau}(G^n)}\le c_{pq\theta\tau}\prod_{i=1}^n\nu_i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|T_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n}\|_{L_{p\theta}(G^n)},$$

где $const=c_{pq\theta\tau}>0$ зависит лишь от указанных параметров.

Лемма 4. Пусть $1<p<q<r\le+\infty, 1<\theta,\tau<+\infty$ и заданы последовательность $\{\mu(l)\}_{l=0}^{+\infty}$ вида (1) и $\psi(\bar{x})=\sum_{l=0}^{+\infty}\psi_l(\bar{x})$ в смысле $L(G^n)$, где $\psi_l(\bar{x})\in L_{p\tau}(G^n)\cap L_{q\tau}(G^n)$. Тогда справедливо

$$\|\psi\|_{L_{q\tau}(G^n)}\le c_{\tau rqp}\left\{\sum_{l=0}^{+\infty}[\mu(l)^{\tau(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\|\psi_l\|_{L_{r\theta}(G^n)}^\tau+\mu(l)^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\psi_l\|_{L_{p\theta}(G^n)}^\tau]\right\}^{\frac{1}{\tau}},$$

где константа $c_{\tau rqp}>0$ зависит только от указанных параметров.

Доказательство. Применяя утверждения 1 и неравенства Гельдера получим, что

$$F(y)=\int_0^y\psi^*(u)du=\sup_{\substack{E^n\subset[0,1]^n\\ \mu(E^n)=y}}\int_{E^n}\left|\sum_{l=0}^{+\infty}\psi_l(\bar{x})\right|d\bar{x}=$$

$$=\sup_{\substack{E^n\subset[0,1]^n\\ \mu(E^n)=y}}\int_{E^n}\left|\sum_{l=0}^{k}\psi_l(\bar{x})\right|d\bar{x}+\sup_{\substack{E^n\subset[0,1]^n\\ \mu(E^n)=y}}\int_{E^n}\left|\sum_{l=k+1}^{+\infty}\psi_l(\bar{x})\right|d\bar{x}=$$

$$=\int_0^y\left(\sum_{l=0}^{k}\psi_l(t)\right)^* dt+\int_0^y\left(\sum_{l=k+1}^{+\infty}\psi_l(t)\right)^* dt\le$$

$$\le c_{\tau r}y^{1-\frac{1}{r}}\left\{\int_0^1 t^{\frac{\theta}{r}-1}\left(\sum_{l=0}^{k}\psi_l(t)\right)^{*\theta}dt\right\}^{\frac{1}{\theta}}+c_{\tau p}y^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_0^1 t^{\frac{\theta}{p}-1}\left(\sum_{l=k+1}^{+\infty}\psi_l(t)\right)^{*\theta}dt\right\}^{\frac{1}{\theta}}\le$$

$$\le c_{\tau r}y^{1-\frac{1}{r}}\sum_{l=0}^{k}\|\psi_l\|_{L_{r\theta}(G^n)}+c_{\tau p}y^{1-\frac{1}{p}}\sum_{l=k+1}^{+\infty}\|\psi_l\|_{L_{p\theta}(G^n)}. \qquad (2)$$

Далее, в силу леммы 1 имеем следующие неравенства:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mu(k)^{\tau(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\left(\sum_{l=0}^{k}\|\psi_l\|_{L_{r\theta}(G^n)}\right)^{\tau}\le D_1\sum_{k=0}^{+\infty}\mu(k)^{\tau(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\|\psi_k\|^{\tau}_{L_{r\theta}(G^n)}; \qquad (3)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mu(k+1)^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left(\sum_{l=k+1}^{+\infty}\|\psi_l\|_{L_{p\theta}(G^n)}\right)^{\tau}\le D_2\sum_{k=0}^{+\infty}\mu(k)^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\psi_k\|^{\tau}_{L_{p\theta}(G^n)}. \qquad (4)$$

Отсюда, с помощью соотношения (2)-(4) следует, что

$$\|\psi\|^{\tau}_{L_{q\tau}(G^n)}=\frac{\tau}{q}\int_0^1 y^{\frac{\tau}{q}-1}\left[\frac{1}{y}\int_0^y\psi^*(u)du\right]^{\tau}dy=\frac{\tau}{q}\int_0^1 y^{\frac{\tau}{q}-1}\left[\frac{1}{y}F(y)\right]^{\tau}dy\le$$

$$\le c'_{\tau rp}\int_0^1 y^{\frac{\tau}{q}-\tau-1}\left\{y^{1-\frac{1}{r}}\sum_{l=0}^{k}\|\psi_l\|_{L_{r\theta}(G^n)}+y^{1-\frac{1}{p}}\sum_{l=k+1}^{+\infty}\|\psi_l\|_{L_{p\theta}(G^n)}\right\}^{\tau}dy\le$$

$$\le c'_{\tau rp}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\frac{1}{\mu(k+1)}}^{\frac{1}{\mu(k)}}y^{\frac{\tau}{q}-\tau-1}\left\{y^{\tau-\frac{\tau}{r}}\left(\sum_{l=0}^{k}\|\psi_l\|_{L_{r\theta}(G^n)}\right)^{\tau}+y^{\tau-\frac{\tau}{p}}\left(\sum_{l=k+1}^{+\infty}\|\psi_l\|_{L_{p\theta}(G^n)}\right)^{\tau}\right\}dy\le$$

$$\le c_{\tau rqp}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\mu(k)^{\tau(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\left(\sum_{l=0}^{k}\|\psi_l\|_{L_{r\theta}(G^n)}\right)^{\tau}+\sum_{k=0}^{+\infty}\mu(k+1)^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left(\sum_{l=k+1}^{+\infty}\|\psi_l\|_{L_{p\theta}(G^n)}\right)^{\tau}\right\}\le$$

$$\le c_{\tau rqp}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}[\mu(k)^{\tau(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\|\psi_k\|^{\tau}_{L_{r\theta}(G^n)}+\mu(k)^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\psi_k\|^{\tau}_{L_{p\theta}(G^n)}\right\}^{\frac{1}{\tau}}.$$

2 Достаточное условие вложения в пространстве Лоренца

Теорема 3. Пусть $1<p<+\infty, 1<\theta,\tau<+\infty, s_0^{(i)}=1, \{s_k^{(i)}\}_{k=1}^{+\infty}, i=\overline{1,n}$ возрастающие последовательности натуральных чисел вида (1) и пусть для $f\in L_{p\theta}(G^n)$ справедливо разложения:

$$f(\bar{x}) = T_{1,\dots,1} + \sum_{k=1}^{+\infty}[T_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(\bar{x}) - T_{s_{k-1}^{(1)},\dots,s_{k-1}^{(n)}}(\bar{x})] = \sum_{k=0}^{+\infty}\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f;\bar{x}),$$

в смысле сходимости пространства $L_{p\theta}(G^n)$.

Если при некотором $q : p < q < +\infty$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\prod\limits_{i=1}^{n} s_k^{(i)\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{L_{p\theta}(G^n)}^{\tau}$ сходится, то $f \in L_{q\tau}(G^n)$ и справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_{q\tau}(G^n)} \le c_{pq\theta\tau}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n} s_k^{(i)\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{L_{p\theta}(G^n)}^{\tau}\right]^{\frac{1}{\tau}},$$

где константа $c_{pq\theta\tau} > 0$ не зависит от $k \in \mathrm{Z}^+$ и $f \in L_{p\tau}(G^n)$.

Доказательство. Пусть $b_k = \prod\limits_{i=1}^{n} s_k^{(i)}, \forall k \in \mathrm{Z}^+$. Тогда $\{b_k\}_{k=0}^{+\infty}$ удовлетворяет условию (1) из леммы 4.

Положим $\Delta_{0,\dots,0}(f;\bar{x}) = T_{1,\dots,1}(\bar{x}), \Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f;\bar{x}) = T_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(\bar{x}) - T_{s_{k-1}^{(1)},\dots,s_{k-1}^{(n)}}(\bar{x})$. К разложению $f(\bar{x}) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f;\bar{x})$ – применяя лемму 4, при $r = +\infty$ получим, что

$\|f\|_{L_{q\tau}(G^n)}^{\tau} \le c_{\tau qp}\left\{\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left[b_k^{-\frac{\tau}{q}}\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{L_{\infty,\theta}(G^n)}^{\tau} + b_k^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{L_{p\theta}(G^n)}^{\tau}\right]\right\}$.С помощью неравенство разных метрик С.М. Никольского (теорема 2), при $1 < p < +\infty, 1 < \tau < +\infty$:

$$\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{L_{+\infty,\theta}(G^n)} \le D_p\prod_{i=1}^{n} s_k^{(i)\frac{1}{p}}\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{L_{p\theta}(G^n)},\ \text{имеем:}$$

$$\|f\|_{L_{q\tau}(G^n)} \le c_{\tau qp}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\left[b_k^{-\frac{\tau}{q}}\prod_{i=1}^{n} s_k^{(i)\frac{\tau}{p}}\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{L_{p\theta}(G^n)}^{\tau} + \right.\right.$$

$$\left.\left.+ b_k^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{L_{p\theta}(G^n)}^{\tau}\right]\right\}^{\frac{1}{\tau}} \le c_{\tau qp}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\prod_{i=1}^{n} s_k^{-(i)\frac{\tau}{q}} s_k^{(i)\frac{\tau}{p}}\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{L_{p\theta}(G^n)}^{\tau} + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\prod_{i=1}^{n} s_k^{(i)\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{L_{p\theta}(G^n)}^{\tau}\right]\right\}^{\frac{1}{\tau}} \le$$

$$\le c'_{\tau qp}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n} s_k^{(i)\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{L_{p\theta}(G^n)}^{\tau}\right\}^{\frac{1}{\tau}}.$$

Теорема 4. Пусть $1<p<q<+\infty, 1<\theta,\tau<+\infty$, $s_0^{(i)}=1, \{s_k^{(i)}\}_{k=1}^{+\infty}, i=\overline{1,n}$ возрастающие последовательности натуральных чисел вида (1) и пусть для $f\in L_{p\theta}(G^n)$ справедливо разложения:

$$f(\overline{x})=T_{1,\dots,1}+\sum_{k=1}^{+\infty}[T_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(\overline{x})-T_{s_{k-1}^{(1)},\dots,s_{k-1}^{(n)}}(\overline{x})]=\sum_{k=0}^{+\infty}\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f;\overline{x}),$$

в смысле сходимости пространства $L_{p\theta}(G^n)$.

Тогда справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_{p\theta}(G^n)}\ge c'_{p\theta\tau q}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}s_k^{(i)\theta(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{L_{q\tau}(G^n)}^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Доказательство: Пусть $g\in L_{p'\theta'}(G^n)$, $g(\overline{x})\sim\sum\limits_{\mu_1=0}^{+\infty}\dots\sum\limits_{\mu_n=0}^{+\infty}b_{\mu_1,\dots,\mu_n}\prod\limits_{i=1}^{n}\varphi_{\mu_i}(x_i)$ ряд Фурье-Прайса и пусть для функции f имеет место разложения

$$f(\overline{x})=T_{1,\dots,1}+\sum_{k=1}^{+\infty}[T_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(\overline{x})-T_{s_{k-1}^{(1)},\dots,s_{k-1}^{(n)}}(\overline{x})]=\sum_{k=0}^{+\infty}\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f;\overline{x}),$$

в смысле сходимости пространства $L_{p\theta}(G^n)$.

Как известно, для $f\in L_{p\theta}(G^n)$ и $g\in L_{p'\theta'}(G^n)$ справедливо неравенство Гельдера: $\int\limits_{G^n}f(\overline{x})g(\overline{x})d\overline{x}\le\|f\|_{L_{p\theta}(G^n)}\|g\|_{L_{p'\theta'}(G^n)}$.

Так как последовательности чисел $\{s_k\}_{k=0}^{+\infty}$ удовлетворяют условию (1), то в силу ортогональности системы Прайса и теоремы 3 следует, что

$$\|f\|_{L_{p\theta}(G^n)}\ge\sup_{\|g\|_{L_{p'\theta'}(G^n)}\le 1}\int\limits_{G^n}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f;\overline{x})\right]g(\overline{x})d\overline{x}\ge$$

$$\ge\frac{1}{c_{q'p'\theta'\tau'}}\sup\left\{\frac{1}{\lambda_0}c_{q'p'\theta'\tau'}T_{1,\dots,1}b_{0,\dots,0}(g)\lambda_0+\right.$$

$$\left.+c_{q'p'\theta'\tau'}\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\int\limits_{G^n}\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f;\overline{x})\left(\sum_{\mu_1=s_{k-1}^{(1)}}^{s_k^{(1)}-1}\dots\sum_{\mu_n=s_{k-1}^{(n)}}^{s_k^{(n)}-1}b_{\mu_1,\dots,\mu_n}\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\mu_i}(x_i)\right)\frac{1}{\lambda_k}d\overline{x}\right|\right)$$

Sup берется по всевозможным ,

$$\{\lambda_k\}:\ a)c_{q'p'\theta'\tau'}\,|b_0(g)|\le\lambda_0,c_{q'p'\theta'\tau'}\left\|\sum_{\mu_1=s_{k-1}^{(1)}}^{s_k^{(1)}-1}\dots\sum_{\mu_n=s_{k-1}^{(n)}}^{s_k^{(n)}-1}b_{\mu_1,\dots,\mu_n}\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\mu_i}\right\|_{L_{q'\tau'}(G^n)}\le\lambda_k, k\in\mathbb{N};$$

$$b)\|g\|_{L_{p'\theta'}(G^n)}\le$$

$$c_{q'p'\theta'\tau'}\left[|b_0(g)|^{\theta'}+\sum_{k=1}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}s_k^{(i)\theta'(\frac{1}{q'}-\frac{1}{p'})}\left\|\sum_{\mu_1=s_{k-1}^{(1)}}^{s_k^{(1)}-1}\dots\sum_{\mu_n=s_{k-1}^{(n)}}^{s_k^{(n)}-1}b_{\mu_1,\dots,\mu_n}\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\mu_i}\right\|_{L_{q'\tau'}(G^n)}^{\theta'}\right]^{\frac{1}{\theta'}}\le$$

$$\le\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}s_k^{(i)\theta'(\frac{1}{q'}-\frac{1}{p'})}\lambda_k^{\theta'}\right]^{\frac{1}{\theta'}}\le 1\Bigg\}=c_{q'p'\theta'\tau'}^{-1}\sup\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{q\tau}\right|$$

Sup берется по всевозможным

$$\{\lambda_n\}:\ \sum_{k=0}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}s_k^{(i)\theta'(\frac{1}{q'}-\frac{1}{p'})}\lambda_k^{\theta'}\le 1\Bigg\}=c_{q'p'\theta'\tau'}^{-1}\sup\Bigg\{$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k\prod_{i=1}^{n}s_k^{(i)(\frac{1}{q'}-\frac{1}{p'})}\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{p\tau}\prod_{i=1}^{n}s_k^{(i)(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\Bigg|\ \text{Sup берется по всевозможным}$$

$$\{\lambda_n\}:\ \sum_{k=0}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}s_k^{(i)\theta'(\frac{1}{q'}-\frac{1}{p'})}\lambda_k^{\theta'}\le 1\Bigg\}\ge c_{q'p'\theta'\tau'}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}s_k^{(i)\theta(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{p\tau}^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Таким образом, мы получили нам необходимую оценку, а именно

$$\|f\|_{L_{p\theta}(G^n)}\ge c'_{p\theta\tau q}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}s_k^{(i)\theta(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\left\|\Delta_{s_k^{(1)},\dots,s_k^{(n)}}(f)\right\|_{L_{q\tau}(G^n)}^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 5. Пусть $f\in L_{p\theta}(G^n), 1<p<+\infty, 1<\theta<+\infty$. Если при некотором $q\ :\ p<q<+\infty$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k^{n\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1}E_{k,\dots,k}^{\tau}(f)_{L_{p\theta}}<+\infty$ сходится, то $f\in L_{q\tau}(G^n)$ и при этом имеет место

$$\|f\|_{L_{q\tau}(G^n)}\le c_{pq\theta\tau}\left\{\|f\|_{L_{p\theta}(G^n)}+\left[\sum_{k=1}^{+\infty}k^{n\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1}E_{k,\dots,k}^{\tau}(f)_{L_{p\theta}}\right]^{\frac{1}{\tau}}\right\},$$

где константа $c_{pq\theta\tau}>0$ от $k\in Z^+$ и $f\in L_{p\theta}(G^n)$ не зависит.

Доказательство. Пусть $f\in L_{p\theta}(G^n)$, $1<p<q<+\infty, 1<\theta<+\infty$. Последовательность натуральных чисел $\{s_k^{(i)}\}_{k=0}^{+\infty}, i=\overline{1,n}$ выберем так, чтобы $s_k^{(i)}=l_k\ :\ l_0=1, 1<B\le\frac{l_{k+1}}{l_k}\le A<+\infty,\ \forall k\in Z^+$.

Если $\{T_{l_k,\dots,l_k}(\bar{x})\}$ последовательность полиномов наилучших приближений функции f в метрике $L_{p\theta}(G^n)$, то для функции f имеет место разложения $f(\bar{x})=T_{1,\dots,1}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}[T_{l_k,\dots,l_k}(\bar{x})-T_{l_{k-1},\dots,l_{k-1}}(\bar{x})]$ в смысле сходимости пространства $L_{p\theta}(G^n)$.

Положим $\Delta_{1,\dots,1}(f;\bar{x}) = T_{1,\dots,1}(\bar{x}), \Delta_{l_k,\dots,l_k}(f;\bar{x}) = T_{l_k,\dots,l_k}(\bar{x}) - T_{l_{k-1},\dots,l_{k-1}}(\bar{x})$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{n\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left\| \Delta_{l_k,\dots,l_k}(f) \right\|_{L_{p\theta}(G^n)}^{\tau} \le \|f\|_{L_{p\theta}(G^n)}^{\tau} + E_{1,\dots,1}^{\tau}(f)_{L_{p\theta}} +$$

$$+ 2^{\tau} \sum_{k=1}^{+\infty} l_k^{n\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} E_{l_{k-1},\dots,l_{k-1}}^{\tau}(f)_{L_{p\theta}} \le$$

$$\le 2^{\tau} \left\{ \|f\|_{L_{p\theta}(G^n)}^{\tau} + E_{1,\dots,1}^{\tau}(f)_{L_{p\theta}} + A^{n\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \sum_{k=1}^{+\infty} l_k^{n\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} E_{l_k-1,\dots,l_k-1}^{\tau}(f)_{L_{p\theta}} \right\} \le$$

$$\le c''_{pq\tau n} \left\{ \|f\|_{L_{p\theta}(G^n)}^{\tau} + \sum_{k=1}^{+\infty} k^{n\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1} E_{k,\dots,k}^{\tau}(f)_{L_{p\theta}} \right\} < +\infty,$$

по условию теоремы. Тогда в силу теоремы 3 следует, что $f \in L_{q\tau}(G^n)$, $1 < p < q < +\infty, 1 < \theta < +\infty$, и имеет место

$$\|f\|_{L_{q\tau}(G^n)} \le c'_{pq\theta\tau n} \left\{ \|f\|_{L_{p\theta}(G^n)} + \left[\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1} E_{k,\dots,k}^{\tau}(f)_{L_{p\theta}} < +\infty \right]^{\frac{1}{\tau}} \right\}.$$

3 О вложении классов функций $E_{p\theta}^{(n)}(\lambda)$ в пространство Лоренца

Теорема 6. Пусть $1 < p < q < +\infty, 1 < \theta, \tau < +\infty$. Для того чтобы имело место вложения $E_{p\theta}^{(n)}(\lambda) \hookrightarrow L_{q\tau}(G^n)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\tau n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1} \lambda_k^{\tau}$.

Доказательство. Достаточность теоремы следует из теоремы 5 и из определения класса $E_{p\theta}^{(n)}(\lambda)$. Докажем необходимости условия теоремы. Для этого предположим, что $E_{p\theta}^{(n)}(\lambda) \hookrightarrow L_{q\tau}(G^n), 1 < p < q < +\infty, 1 < \theta, \tau < +\infty$, но при этом ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\tau n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1} \lambda_k^{\tau}$ расходится. Тогда согласно лемме 2 существуют последовательности натуральных чисел $\{l_k\}_{k=1}^{+\infty}$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ такие, что:

1) $\mu_k \le \lambda_m$, при всех $m : l_k \le m < l_{k+1}$; 2) $2l_k \le l_{k+1}$; 3) $\mu_{k+1} \le \frac{1}{2}\mu_k, \forall k \in \mathbb{N}$;
4) $\sum_{k=1}^{+\infty} l_{k+1}^{\tau n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \mu_k^{\tau} = +\infty$.

Рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) = \frac{1}{2(c''_p)^n} \sum_{k=1}^{+\infty} l_{k+1}^{n(\frac{1}{p}-1)} \mu_k \prod_{i=1}^{n} \sum_{\nu_i = l_k}^{l_{k+1}-1} \varphi_{\nu_i}^{(i)}(x_i), \qquad (5)$$

где постоянная $c''_p > 0$ из леммы 3. Сначала покажем, что $f_0 \in L_{p\theta}(G^n), 1 < p < +\infty, 1 < \theta < +\infty$. В силу леммы 3 имеет место

$$\|f\|_{L_{p\theta}(G^n)} \leq \frac{1}{2(c''_p)^n} \sum_{k=1}^{+\infty} l_{k+1}^{n(\frac{1}{p}-1)} \mu_k (c''_p)^n l_{k+1}^{n(1-\frac{1}{p})} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k = \frac{1}{2}\mu_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \mu_1 < +\infty .$$

Пусть $\forall N \in \mathrm{N}$: $l_k \leq N < l_{k+1}$. Тогда с помощью леммы 3 получим, что

$$E_{N,...,N}(f_0)_{L_{p\theta}} \leq E_{l_k,...,l_k}(f_0)_{L_{p\theta}} \leq$$

$$= \frac{1}{2(c''_p)^n} \left\| \sum_{\nu=k}^{+\infty} l_{\nu+1}^{n(\frac{1}{p}-1)} \mu_\nu \prod_{i=1}^{n} \sum_{s_i = l_\nu}^{l_{\nu+1}-1} \varphi_{s_i}^{(i)} \right\|_{L_{p\theta}(G^n)} \leq \frac{1}{2}\mu_k \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \mu_k \leq \lambda_N ,$$

т.е. $f_0 \in E_{p\theta}^{(n)}(\lambda)$.

Пусть $T_{l_{k+1}}(\bar{x}) = \frac{1}{2(c''_p)^n} \sum_{\nu=1}^{k} l_{\nu+1}^{n(\frac{1}{p}-1)} \mu_\nu \prod_{i=1}^{n} \sum_{\lambda_i = l_\nu}^{l_{\nu+1}-1} \varphi_{\lambda_i}^{(i)}(x_i), \forall k \in \mathrm{Z}^+$ – частичная сумма ряда (5). В теореме 4 полагая $s_k^{(i)} = l_k, \forall i = 1,...,n$ и применяя лемму 3 имеем, что

$$\|f_0\|_{L_{q\tau}(G^n)}^{\tau} \geq (c_{q\theta\tau})^\tau \sum_{k=1}^{+\infty} l_{k+1}^{n(\frac{1}{2q}-\frac{1}{q})} \mu_k \left\| T_{l_{k+1},...,l_{k+1}} - T_{l_k,...,l_k} \right\|_{L_{2q,\theta}(G^n)}^{\tau} =$$

$$= (c_{q\theta\tau})^\tau \sum_{k=1}^{+\infty} l_{k+1}^{-n\frac{1}{2q}} \mu_k \left\{ \frac{1}{2(c''_p)^n} l_{k+1}^{n(\frac{1}{p}-1)} \mu_k \prod_{i=1}^{n} \left\| \sum_{\nu_i = l_k}^{l_{k+1}-1} \varphi_{\nu_i}^{(i)} \right\|_{L_{2q,\theta}(G^n)} \right\}^{\tau} \geq$$

$$\geq (c_{q\theta\tau})^\tau \left(\frac{c'_{q\theta\tau}}{2(c''_p)^n} \right)^{\tau} \sum_{k=1}^{+\infty} l_{k+1}^{-\tau n\frac{1}{2q}} l_{k+1}^{\tau n(\frac{1}{p}-1)} \mu_k^\tau (c'^{n\tau}_p l_{k+1}^{n\tau(1-\frac{1}{2q})} =$$

$$= (c_{q\theta\tau})^\tau \frac{\left(c'_{q\theta\tau}\right)^\tau}{2^\tau} \sum_{k=1}^{+\infty} l_{k+1}^{n\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \mu_k^\tau = +\infty,$$

согласно лемме 2. Следовательно, $f_0 \notin L_{q\tau}(G^n)$. Это противоречить вложению $E_{p\theta}^{(n)}(\lambda) \hookrightarrow L_{q\tau}(G^n)$. Отсюда следует, что при наличии данного вложения ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\tau n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1} \lambda_k^\tau$ должен сходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hardy G. H., Littlewod J.L. A convergence criterion for Fourier series. Math.Z. 1928. 28. 4. p. 612-634.
2. П.Л. Ульянов. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями в разных метриках. // Мат. сбор. 1970. 81.1. -С. 104-131.

3. М. Ф. Тиман. О вложении $L_p^{(k)}$ классов функций. // Изв.вузов матем. Т. 149, № 10, 1974, -С. 61-74.
4. М.К. Потапов. Теорема вложении в смешанной метрике. // Труды МИАН СССР, 1980, т. 156, -С. 143-156.
5. Э.А. Стороженко. Необходимые и достаточные условия для вложения некоторых классов функций. // Изв.АН СССР. Серия матем. 1973. 37. -С. 386-398.
6. В.И. Коляды. Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений. //Матем. сбор. 1977.102.144. 2. -С. 195-215.
7. А.Г. Акишев. О вложении классов $E_p(\lambda)$ в пространство Лоренца. // Вестник АН КазССР. 1982. 7. -С. 72-75.
8. Е.С. Смаилов. Мультипликаторы Фурье, теоремы вложения и смежные с ними вопросы. Диссер. на соискание учен.степ. д.ф.-м.н., 1997.
9. С. Тазабеков. Ортогональные ряды Фурье по системе типа Хаара функции из пространств L_p. // Сборник «Современные вопросы теории функции и функцион. анализа», Караганда, 1988, -С. 109-118.
10. Н. Темиргалиев. О вложении некоторых классов функций. // Матем. заметки. 1976. 20. 6. -С. 835-841.
11. Б.И.Голубов, А.Б.Ефимов, В.А.Скворцов. Ряды и преобразования Уолша. Наука. 1987 г. -С. 28-39.
12. И. Стейн , Г.Вейс. Введение в гармонический анализ на Евклидовых пространствах. Москва. Мир. 1974 г. -С. 212-229.
13. В.И. Коляда. О вложении некоторых классов функций многих переменных. Сибир. матем. журнал. 1973 г. Т. XIV, 4.
14. М. Л. Гольдман. О вложений пространств Никольского-Бесова с модулями непрерывности общего вида в пространства Лоренца. // Доклад АН СССР. 1984. 277. 1. -С. 72-75.
15. Е.С. Смаилов , А.У.Бимендина. Теорема Харди-Литтлвуда для рядов Фурье-Прайса с квазимонотонными коэффициентами в пространстве Лоренца. Вестник КарГУ . Сер. матем. -2005. - 2(38). -С. 3-9.
16. А. У. Бимендина, Е.С. Смаилов. Достаточное условие вложения в пространство Лоренца в терминах полных наилучших приближений. // Межд. науч.-практич. конф. "Соврем. состояние и перспек. разв. науки и высшего образ. в центр. Казахстане". -Караганда, -2008.