О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Б.Д. Кошанов

Институт математики, информатики и механики МОН РК, Алматы, Казахстан

E-mail: koshanov@list.ru

Аннотация

В работе построен явный вид функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в пространстве произвольной размерности в шаре.

Задача G**.** Требуется найти функцию $G_{2m,n}(x,y)$ следующей задачи Дирихле в области $\Omega_r=\{x:\|x\|<r\}\subset R^n$ ($n\in N,\ r>0$), удовлетворяющую уравнению

$$\Delta_x^m G_{2m,n}(x,y)=\delta(x-y), \tag{1}$$

и краевым условиям

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial\vec{n}_x^i}G_{2m,n}(x,y)\right|_{x\in\partial\Omega_r}=0,\ i=0,1,2,\dots,m-1. \tag{2}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *а) В случае нечетного* n*, а также при четных* n*, если* $2m<n$*, функция Грина задачи Дирихле (1),(2) представима в виде*

$$G_{2m,n}(x,y)=c_{2m,n}\left\{|x-y|^{2m-n}-\left[\left|\left|\frac{y}{r}\right|x-\frac{ry}{|y|^2}\right|\right]^{2m-n}-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{m-1}(2m-n)(2m-n-2)\dots(2m-2k-n+2)\cdot\left[\left|\left|\frac{y}{r}\right|x-\frac{ry}{|y|^2}\right|\right]^{2m-2k-n}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{r}\right|^2\right)^k\left(1-\left|\frac{x}{r}\right|^2\right)^k\cdot\frac{r^{2k}}{(-2)^k k!}\right\}, \tag{3}$$

где $$c_{2m,n}=\frac{1}{(m-1)!2^{m-1}(2m-n)(2(m-1)-n)\dots(2-n)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2^m\pi^{n/2}}.$$

б) В случае когда n *четное и* $2m\ge n$ *функция Грина представима в виде*

$$G_{2m,n}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-g^0_{2m,n}(x,y)-\sum_{j=1}^{m-1}g^j_{2m,n}(x,y), \tag{4}$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y)=c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\ln|x-y|,$$

$$g^0_{2m,n}(x,y)=c_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{r}\right||x-y^*|\right]^{2m-n}\ln\left[\left|\frac{y}{r}\right||x-y^*|\right],$$

$$g^j_{2m,n}(x,y)=c_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{r}\right||x-y^*|\right]^{2(m-j)-n}\left(1-\left|\frac{y}{r}\right|^2\right)^j\left(1-\left|\frac{x}{r}\right|^2\right)^{j}r^{2j}\times$$

$$\times\left[\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-j+1)-n)\ln\left[\left|\frac{y}{r}\right|\left|x-y^*\right|\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{2^{2j}}{2}\left(\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\frac{(2m-n)}{2}...\frac{(2m-n-2(j-k)+2)}{2}\right)\right],\ j=\overline{1,m-1},$$

$$c_{2m,n}=\frac{(-1)^{n/2-1}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n/2+1)2^{2m-1}\pi^{n/2}}$$

Основной результат работы теоремы 1 докажем в случае а).

Известна следующая

Лемма 1. [3] В пространстве нечетной размерности и в пространстве четной размерности при $2m<n$ фундаментальное решение уравнения (1) задается формулой:

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y)=c_{m,n}\left|x-y\right|^{2m-n}, \tag{5}$$

где

$$c_{2m,n}=\frac{(-1)^m\Gamma\left(\frac{n}{2}-m\right)}{\Gamma(m)2^{2m}\pi^{\frac{n}{2}}}=\frac{1}{(2m-n)(2(m-1)-n)(2(m-2)-n)...(4-n)(2-n)}\cdot\frac{1}{(m-1)!}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^m\pi^{\frac{n}{2}}}$$

$\Gamma(.)$ - гамма функция.

Лемма 2. В случае нечетного n и в случае четного n при $2m<n$ для всех $0\le k\le m-1$ функции $g^k{}_{2m,n}(x,y)$

$$g^k_{2m,n}(x,y)=c_k\left[\left|\frac{y}{r}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}r^2\right|\right]^{2(m-k)-n}\cdot(1-\left|\tfrac{y}{r}\right|^2)^k(1-\left|\tfrac{x}{r}\right|^2)^k r^{2k}, \tag{6}$$

где $c_k=\dfrac{1}{(-2)^k k!}c_{2m,n}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-k+1)-n)$, $(k=1,...,m-1)$ являются решениями однородного полигармонического уравнения:

$$\Delta_x^m g^k_{2m,n}(x,y)=0. \tag{7}$$

Доказательство. Действительно, функцию $g^k{}_{2m,n}(x,y)$ перепишем в следующем виде

$$g^k{}_{2m,n}(x,y)=g^0{}_{2m-2k,n}(x,y)\ f_{2k}(|x|,|y|),$$

где $f_{2k}(|x|,|y|)$-многочлен степени $2k$ от $|x|$ при фиксированном $|y|$.

Нам известно, что $g^0{}_{2m-2k,n}(x,y)$ удовлетворяет $\Delta_x^{m-k} g^0{}_{2m-2k,n}(x,y)=0$.

По теореме Альманзи [2] функция $g^0{}_{2m-2k,n}(x,y)$ представляется в виде:

$$g^0{}_{2m-2k,n}(x,y)=\sum_{j=0}^{m-k-1}|x|^{2j}\psi_j(x,y),$$

где $\psi_j(x,y)$- гармонические функции, т.е. удовлетворяет уравнению $\Delta_x\psi_j(x,y)=0$.

Тогда для функции $g^k{}_{2m,n}(x,y)$ справедливо представление

$$g^k{}_{2m,n}(x,y)=\sum_{j=0}^{m-k-1}|x|^{2j}\psi_j(x,y)\, f_{2k}(|x|,|y|)=\sum_{j=0}^{m-1}|x|^{2j}\tilde{\psi}_j(x,y),$$

где $\tilde{\psi}_j(x,y)$- некоторые гармонические функции.

Следовательно, согласно теореме Альманзи [2] функция $g^k{}_{2m,n}(x,y)$ для всех $0\le k\le m-1$ удовлетворяет полигармоническому уравнению (7). Таким образом, лемма 2 доказана.

Введем обозначение**:**

$$|x-y|^2=X^2(x,y)=X^2,\ \left|\tfrac{y}{r}\right|^2\left|x-\tfrac{y}{|y|^2}r^2\right|^2=Y^2(x,y)=Y^2,$$

$$r^2(1-\left|\tfrac{y}{r}\right|^2)(1-\left|\tfrac{x}{r}\right|^2)=Z^2(x,y)=Z^2 \text{ при } x,y\in\Omega_r \qquad (8)$$

Очевидно, справедливо тождество

$$X^2-Y^2=-Z^2 \quad \text{при любых } x,y\in\Omega_r. \qquad (9)$$

Данное тождество следует из следующих цепочек равенств:

$$X^2-Y^2=|x-y|^2-\left|\tfrac{y}{r}\right|^2\left|x-\tfrac{y}{|y|^2}r^2\right|^2=|x|^2-2(x,y)+|y|^2-\left|\tfrac{y}{r}\right|^2(|x|^2-2\tfrac{(x,y)}{|y|^2}r^2+\tfrac{|y|^2}{|y|^4}r^4)=$$

$$=|x|^2-2(x,y)+|y|^2-\frac{|x|^2|y|^2}{r^2}+2(x,y)-r^2=|x|^2-\frac{|x|^2|y|^2}{r^2}-r^2+|y|^2=$$

$$=|x|^2(1-\frac{|y|^2}{r^2})-r^2(1-\frac{|y|^2}{r^2})=(1-\frac{|y|^2}{r^2})(|x|^2-r^2)=-r^2(1-\frac{|x|^2}{r^2})(1-\frac{|y|^2}{r^2})=-Z^2.$$

Так как $\dfrac{Z^2}{Y^2}\le 1$ при $x\neq y$, то в пространстве нечетной размерности и в пространстве четной размерности при $2m<n$ фундаментальное решение уравнения (1) разлагаем в бесконечный ряд:

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y)=c_{2m,n}X^{2m-n}=c_{2m,n}Y^{2m-n}\left(1-\frac{Z^2}{Y^2}\right)^{\frac{2m-n}{2}}=$$

$$=c_{2m,n}Y^{2m-n}\left(1+(-1)\frac{(2m-n)}{2}\frac{Z^2}{Y^2}+\frac{(-1)^2}{2!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2m-n-2)}{2}\left(\frac{Z^2}{Y^2}\right)^2+\ldots+\right.$$

$$+\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{(2m-n)}{2}\ldots\left(\frac{2m-n}{2}-m+1+1\right)\left(\frac{Z^2}{Y^2}\right)^{m-1}+$$

$$+\frac{(-1)^{m}}{m!}\frac{(2m-n)}{2}\ldots\left(\frac{2m-n}{2}-m+1\right)\left(\frac{Z^2}{Y^2}\right)^{m}+$$

$$\left.+\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\frac{(2m-n)}{2}\ldots\left(\frac{2m-n}{2}-m+1\right)\left(\frac{2m-n}{2}-m\right)\left(\frac{Z^2}{Y^2}\right)^{m+1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right).$$

Поскольку функции

$$g^k_{2m,n}(x,y)=c_k\left[\left|\frac{y}{r}\right|x-\frac{y}{|y|^2}r^2\right|\right]^{2(m-k)-n}\cdot(1-\left|\tfrac{y}{r}\right|^2)^k\,(1-\left|\tfrac{x}{r}\right|^2)^k\,r^{2k}\quad,$$

где $c_k=\dfrac{1}{(-2)^k k!}c_{2m,n}(2m-n)(2(m-1)-n)\ldots(2(m-k+1)-n)$, $(k=1,\ldots,m-1)$

являются решениями однородного полигармонического уравнения (7):

$$\Delta^m_x\,g^j_{2m,n}(x,y)=0,$$

то функция Грина имеет вид:

$$G_{2m,n}(x,y)=c_{2m,n}\,|\,x-y\,|^{2m-n}-c_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{r}\right|x-\frac{y}{|y|^2}r^2\right|\right]^{2m-n}-$$

$$-\sum_{j=1}^{m-1}c_j\left[\left|\frac{y}{r}\right|x-\frac{y}{|y|^2}r^2\right|\right]^{2(m-j)-n}\cdot(1-\left|\tfrac{y}{r}\right|^2)^j\,(1-\left|\tfrac{x}{r}\right|^2)^j\,r^{2j}=$$

$$=c_{2m,n}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(2m-n)(2(m-1)-n)\ldots(2(m-k+1)-n)}{2^k}\left[\left|\frac{y}{r}\right|x-\frac{y}{|y|^2}r^2\right|\right]^{2(m-k)-n}$$

$$(1-\left|\tfrac{y}{r}\right|^2)^k\,(1-\left|\tfrac{x}{r}\right|^2)^k\,r^{2k}\,. \tag{10}$$

На основании равенства (10) для функции Грина выполняются краевые условия (2):

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial n_x^i}G_{2m,n}(x,y)\right|_{|x|=r}=0,\ \ i=0,1,...,m-1\ .$$

Утверждения лемм 2 и 3 дают доказательство теоремы 1.

Согласно теореме 1 функция Грина Задачи Дирихле (1)-(2) в случае нечетной размерности пространства и в случае четной размерности пространства при $2m<n$ представляется по формуле

$$G_{2m,n}(x,y)=d_{2m,n}\,|\,x-y\,|^{2m-n}-d_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{r}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}r^2\right|\right]^{2m-n}-$$

$$-\sum_{j=1}^{m-1}d_j\left[\left|\frac{y}{r}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}r^2\right|\right]^{2(m-j)-n}\cdot(1-\left|\tfrac{y}{r}\right|^2)^j\,(1-\left|\tfrac{x}{r}\right|^2)^j\,r^{2j}=$$

$$=d_{2m,n}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-k+1)-n)}{2^k}\left[\left|\frac{y}{r}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}r^2\right|\right]^{2(m-k)-n}$$

$$(1-\left|\tfrac{y}{r}\right|^2)^k\,(1-\left|\tfrac{x}{r}\right|^2)^k\,r^{2k}\,. \tag{11}$$

Из (11) следует

$$G_{2m,n}(x,y)=d_{2m,n}\,\frac{(-1)^m}{m!}\frac{(2m-n)(2(m-1)-n)...(2-n)}{2^m}\left(\frac{Z^2}{Y^2}\right)^m Y^{2m-n}\times$$

$$\times\cdot\left(1+\frac{(-1)\left(-\frac{n}{2}\right)}{m+1}\left(\frac{Z^2}{Y^2}\right)+\frac{(-1)^2\left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n}{2}-1\right)}{(m+1)(m+2)}\left(\frac{Z^2}{Y^2}\right)^2+...\right)=$$

$$=d_{2m,n}\,\frac{(-1)^m}{m!}\frac{(2m-n)(2(m-1)-n)...(2-n)}{2^m}\frac{Z^{2m}}{Y^n}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)...\left(\frac{n}{2}+i-1\right)}{(m+1)...(m+i)}\left(\frac{Z^2}{Y^2}\right)^i\right)=$$

$$=\frac{(-1)^m\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(m-1)!\,m!\,2^{2m}\,\pi^{\frac{n}{2}}}\frac{Z^{2m}}{Y^n}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)...\left(\frac{n}{2}+i-1\right)}{(m+1)...(m+i)}\left(\frac{Z^2}{Y^2}\right)^i\right). \tag{12}$$

Таким образом, на основании формулы (12) верна следующая

Теорема 2. Функция Грина Задачи Дирихле (1)-(2) в случае нечетной размерности пространства и в случае четной размерности пространства при $2m < n$ положительно определена при четном m и отрицательно определена при нечетном m (m- показатель степени оператора Лапласа полигармонического уравнения).

Замечания.

Явное представление функции Грина задачи Неймана для неоднородного полигармонического уравнения в комплексной плоскости имеются в работе [4]. Методика настоящей работы позволяет строить функцию Грина для полигармонических уравнений не только для шара, но для полуплоскости и других канонических областях [5]. Отметим, что отдельные результаты работы могут быть обобщены на эллиптические уравнения с постоянными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частыми производными. М.: Мир, 1966.
2. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
3. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1985.
4. Begehr H., Vanegas C.J., Iterated Neumann problem for the higher order Poisson equation. Math. Nachr. 279 (2006), p.38-57.
5. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Искакова У.А. Структура спектра краевых задач для дифференциальных уравнений, Препринт, Алматы, 2005, 54с.
6. Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., M.Y. Nemchenko Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere. Complex variables and Elliptic equations, volume 53 number 2, February 2008