ПОРЯДОК РОСТА НОРМЫ ПРОИЗВОДНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

А.Т.Омарова, Е.С.Смаилов
РГКП «Институт прикладной математики» МОН РК
e-mail: esmailov@mail.ru

Аннотация
В настоящей работе в терминах порядка роста нормы производных алгебраических многочленов наилучшего приближения многих переменных изучаются интегральные и дифференциальные свойства функций.

В работах [1]-[7] в терминах скорости убывания к нулю наилучших приближений периодических функций посредством тригонометрических многочленов исследованы интегральные и дифференциальные свойства функций. Далее, в работе [8] исследованы дифференциальные свойства функций и определены ее структурные свойства в терминах скорости роста нормы производных, приближающих агрегатов этой функций. Впоследствии данная тематика получила развитие в работах [9], [10], [11], [12]. В настоящей работе исследованы интегральные и дифференциальные свойства функций $L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n)$, $1 \le p < +\infty$ из в терминах роста нормы производных алгебраических многочленов наилучшего приближения. В качестве производных выступает дифференциальный оператор Эрмита.

п.1. Определения и вспомогательные предложения.

Пусть $L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n)$, $1 \le p < +\infty$ - пространство измеримых в смысле Лебега на R_n функций $f(\bar{x})$, удовлетворяющих условию: $\|f\|_{p,\rho} = \left\{ \int\limits_{\mathrm{R}_n} |f(\bar{x})\rho(\bar{x})|^p d\bar{x} \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$ Здесь $\bar{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{R}_n$, $|\bar{x}| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\rho(\bar{x}) = e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}}$, $d\bar{x} = \prod\limits_{k=1}^{n} dx_k$, через $T_{h\vec{e}_i}(f;\bar{x})$ - обозначим оператор обобщенного сдвига [13], [14] по переменной x_i :

$$T_{h\vec{e}_i}(f;\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x_1,\dots,x_{i-1}, e^{-h}\left(x_i + y\sqrt{e^{2h}-1} \right), x_{i+1},\dots,x_n \right) e^{-y^2} dy,\ h>0,\ i=1,\dots,n;$$

Величину $\omega_{l_i}^{(i)}(f;\delta)_{p,\rho} = \sup\limits_{|h|\le\delta} \left\| \left(T_{h\vec{e}_i} - I \right)^{l_i} f \right\|_{p,\rho}$ - назовем частным модулем непрерывности порядка l_i, $i=1,\dots,n.$ Здесь I – тождественный оператор; $D_{x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ - дифференциальный оператор Эрмита [15], $i=1,\dots,n.$ Как обычно, $E_{m_1,\dots,m_n}(f)_{p,\rho} = \inf\left\{ \left\| f - P_{k_1,\dots,k_n} \right\|_{p,\rho} : \left\{ P_{k_1,\dots,k_n}(\bar{x}) \right\},\ k_i \le m_i,\ i=1,\dots,n. \right\}$ - есть полное наилучшее приближение функции f в метрике пространства $L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n)$ посредством алгебраических многочленов вида: $P_{k_1,...,k_\nu}(\bar{x}) = \sum\limits_{\nu_1=0}^{k_1-1} ... \sum\limits_{\nu_n=0}^{k_n-1} a_{\nu_1,...,\nu_n} x_1^{\nu_1} ... x_n^{\nu_n}$,

$k_i \le m_i,\ i = 1,...,n;$ N - множество натуральных чисел, Z^+ -множество неотрицательных целых чисел.

Определение 1. *Пусть дана монотонно убывающая к нулю последовательность чисел* $\{\alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$ *и натуральные числа* $l_1,...,l_n$ *такие, что* $\{m^l \alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$ *возрастает при* $m \to +\infty$, *где* $l = \min\{l_1,...,l_n\}$. *Тогда, через* $P_{p,\rho}^{l_1,...,l_n}(\mathrm{R}_n; \alpha)$ *обозначим класс всех функций* $f \in L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n), 1 \le p < +\infty$ *для которых* $m^{-l_i} \left\| D_{x_i}^{l_i} P_{m,...,m} \right\|_{p,\rho} \le \alpha_m,\ \forall m \in \mathrm{N}$ *и* $i = 1,...,n,$ *где* $P_{m,...,m}(\bar{x})$ *- алгебраический многочлен наилучшего приближения функций* $f(\bar{x})$ *в метрике* $L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n)$.

Лемма 1. *[3] Пусть* $s \ge 2$ *и числа* $\delta_{\nu_1}, \delta_{\nu_2}, ..., \delta_{\nu_s}$ *положительны. Тогда имеет место равенство:* $\delta_{\nu_1} \cdot \delta_{\nu_2} ... \cdot \delta_{\nu_s} = \left[\prod\limits_{1 \le i < j \le s} \delta_{\nu_i} \cdot \delta_{\nu_j} \right]^{\frac{1}{s-1}}$.

Лемма 2. *[3] Пусть* $s \ge 2,\ \alpha > 0$ *и* $\theta = \frac{s(s-1)}{2}$, *числа* $\sigma_{\nu_i} > 0,\ i = 1,2,..,s.$ *Тогда имеет место равенство:*

$$\prod_{1 \le i < j \le s} \left[\sigma_{\nu_i}^{\frac{1}{2}} \sigma_{\nu_j}^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{-|\nu_i - \nu_j|}{2} \alpha} \right]^{\frac{1}{\theta}} = \prod_{i=1}^{s} \sigma_{\nu_i}^{\frac{1}{s}} \prod_{j=1}^{s} 2^{-\frac{|\nu_i - \nu_j|}{4} \frac{\alpha}{\theta}}.$$

Лемма 3. *[16] Пусть* $\alpha > 0,\ 1 \le q < +\infty,\ d_s > 0,\ \forall s \in \mathrm{N}.$ *Тогда*

$$\sum_{\nu=\mu}^{+\infty} 2^{\nu\alpha q} \left(\sum_{s=\nu}^{+\infty} d_s \right)^q \le C_{\alpha q} \sum_{\nu=\mu}^{+\infty} 2^{\nu\alpha q} d_\nu^q, \forall \mu \in \mathrm{N}.$$

Лемма 4. *[17] Пусть* $1 \le p < q \le +\infty$ *и* $P_{\nu_1,...,\nu_n}(\bar{x})$ *- произвольный алгебраический многочлен порядка* $(\nu_k - 1)$ *по переменной* $x_k,\ k = 1,...,n.$ *Тогда справедливо неравенство:*

$$\left\| P_{\nu_1,...,\nu_n} \right\|_{q,\rho} \le C_{pq} \left(\prod_{k=1}^{n} \nu_k \right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \left\| P_{\nu_1,...,\nu_n} \right\|_{p,\rho},$$

где $const = C_{pq} > 0$ *от многочлена* $P_{\nu_1,...,\nu_n}(\bar{x})$ *не зависит.*

Лемма 5. *[17] Пусть* $1 \le p \le +\infty$ *и* $P_{\nu_1,...,\nu_n}(\bar{x})$ *- произвольный алгебраический многочлен порядка* $(\nu_k - 1)$ *по переменной* $x_k,\ k = 1,...,n.$ *Тогда справедливо неравенство:*

$$\left\| D_{x_1}^{r_1} ... D_{x_n}^{r_n} P_{\nu_1,...,\nu_n} \right\|_{p,\rho} \le A_{pr} \left(\prod_{k=1}^{n} \nu_k^{r_k} \right) \left\| P_{\nu_1,...,\nu_n} \right\|_{p,\rho},$$

где $const = A_{pr} > 0$ *не зависит от многочлена* $P_{\nu_1,...,\nu_n}(\overline{x})$, $r_k \in \mathrm{Z}^+$, $\forall k = 1,2,...,n.$

Лемма 6. *[17] Пусть* $f \in L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n)$, $1 \le p \le +\infty$. *Тогда справедливо неравенство:* $E_{\nu_1,...,\nu_n}(f)_{p,\rho} \le B_{pl} \sum_{i=1}^{n} \omega_{l_i}^{(i)}\left(f;\frac{1}{\nu_i}\right)_{p,\rho}$, *где* $const = B_{pl} > 0$ *не зависит от* f *и* $\nu_i \in \mathrm{N}$, $i = 1,...,n.$ $l_1,...,l_n$ *- фиксированные положительные числа.*

Лемма 7. *[17] Пусть для* $f \in L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n)$, $1 \le p \le +\infty$ *существует* $D_{x_i}^{l_i} f \in L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n)$, $i = 1,...,n.$ *Тогда справедливо неравенство:* $\omega_{l_i}^{(i)}(f;\delta)_{p,\rho} \le C_{lp}\left\|D_{x_i}^{l_i} f\right\|_{p,\rho} \cdot \delta^{l_i}$, *где* $\delta > 0$ *и* $const = C_{lp} > 0$ *от* δ *и* f *не зависит,* $i = 1,...,n.$

Лемма 8. *[17] Пусть* $f \in L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n)$ *и* $h > 0$, $\vec{e}_i$ *- единичные координатные вектора,* $i = 1,...,n.$ *Оператор обобщенного сдвига* $T_{h\vec{e}_i} : L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n) \to L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n)$ *ограничен,* $\forall i = 1,...,n.$

Лемма 9. *Пусть* $1 \le q \le +\infty$ *и* $\left\{P_{\nu_1,...,\nu_n}(\overline{x})\right\}$ *алгебраические многочлены. Если при всех* $m = 0,1,...,r_i$ *выполнены условия* $\left\|D_{x_i}^m P_{k_\lambda,...,k_\lambda} - D_{x_i}^m P_{k_\mu,...,k_\mu}\right\|_{q,\rho} \to 0$, *при* $\mu \to +\infty$, $\lambda \to +\infty$, *то существуют предельные функции* $\varphi_{(m),i} \in L_{q,\rho}(\mathrm{R}_m)$ *такие, что для каждого* $m = 0,1,2,...,r_i$: $\left\|\varphi_{(m),i} - D_{x_i}^m P_{k_\mu,...,k_\mu}\right\|_{q,\rho} \to 0$, $\mu \to +\infty$ *и* $\varphi_{(m),i}(\overline{x}) = D_{x_i}^m \varphi_{(o),i}(\overline{x})$, $\forall m = 1,2,...,r_i$, $i = 1,...,n_r$, $\left(\varphi_{(o),i}(\overline{x}) = \varphi(\overline{x})\right)$ *почти для всех* $x \in \mathrm{R}.$

Лемма 10. *Пусть* $f \in L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n)$ *и* $\left\{P_{m_\nu,...,m_\nu}(\overline{x})\right\}$ *ее наилучшие приближения в* $L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n)$. *Тогда справедливо неравенство:*

$$E_{m_\mu,...,m_\mu}(f)_{p,\rho} \le A_{pl} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{+\infty} k_\nu^{-l_j} \left\|D_{x_j}^{l_j} P_{m_{\nu+1},...,m_{\nu+1}}\right\|_{p,\rho}, \ \forall \mu \in \mathrm{N}.$$

Здесь $const = A_{pl} > 0$ *не зависит от* $\mu \in \mathrm{N}$, *а* $\{m_\nu\}$ *- произвольная последовательность натуральных чисел.*

Доказательство данного утверждения проводится так же, как и в одномерном случае [18].

п.2. Основные результаты.

Теорема. *Пусть* $f \in L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n)$, $1 \le p < q < +\infty$ *и* $P_{\nu_1,...,\nu_n}(\overline{x})$ *- ее алгебраические многочлены наилучшего приближения в метрике* $L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n)$ *. Если для некоторых* $r_j \in \mathrm{Z}^+$ *и* $l_j \in \mathrm{N}$, *таких, что* $l_j > \frac{n}{2p} - \frac{n}{2q}$, $j = 1,...,n$ *ряды* $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right) - ql_j - 1} \left\|D_{x_j}^{l_j + r_j} P_{k,...,k}\right\|_{p,\rho}^q$ *сходятся при всех* $j = 1,...,n$, *то существует* $D_{x_i}^{r_i}(f) \in L_{q,\rho}(\mathrm{R}_n)$ *и при этом справедливы неравенства:*

$$\left\|D_{x_i}^{r_i} f\right\|_{q,\rho} \le C_{pqrl}\left\{\|f\|_{p,\rho}+\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-ql_j-1}\left\|D_{x_j}^{l_j+r_j} P_{k,\dots,k}\right\|_{p,\rho}^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\},$$

$$\omega_{l_i}^{(i)}\left(D_{x_i}^{r_i} f;\frac{1}{N}\right)_{q,\rho} \le B_{pqrl}\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=N+1}^{+\infty} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-ql_j-1}\left\|D_{x_j}^{l_j+r_j} P_{k,\dots,k}\right\|_{p,\rho}^{q}\right\}^{\frac{1}{q}},\ \forall n\in \mathbb{N}.$$

Здесь константы $C_{pqrl}>0$, $B_{pqrl}>0$ *не зависят от* $P_{k,\dots,k}(\bar{x})$ *и* $N\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Подберем положительное целое число μ : $2^{\mu-1}\le N<2^{\mu}$ и $k_\nu\in\mathbb{N}\cap\left[2^{\nu}+1,2^{\nu+1}\right]$:

$$k_\nu^{-l_i+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|D_{x_i}^{l_i+r_i} P_{k_\nu,\dots,k_\nu}\right\|_{p,\rho} \le k^{-l_i+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|D_{x_i}^{l_i+r_i} P_{k,\dots,k}\right\|_{p,\rho} \tag{1}$$

$\forall k\in\left[2^{\nu}+1,2^{\nu+1}\right]\cap\mathbb{N}$, $i=1,2,\dots,n.$ Пусть $\lambda>\mu$ и $\lambda\in\mathbb{N},\mu\in\mathbb{N}$. Для всех $m=\{0,1,\dots,r_i\}$,

$$D_{x_i}^{m} P_{k_\lambda,\dots,k_\lambda}(\bar{x})-D_{x_i}^{m} P_{k_\mu,\dots,k_\mu}(\bar{x})=\sum_{\nu=\mu}^{\lambda-1}\left(D_{x_i}^{m} P_{k_{\nu+1},\dots,k_{\nu+1}}(\bar{x})-D_{x_i}^{m} P_{k_\nu,\dots,k_\nu}(\bar{x})\right),\ r_i\in\mathbb{N},\ i=1,\dots,n.$$

$$D_{x_i}^{m} P_{k_{\nu+1},\dots,k_{\nu+1}}(\bar{x})-D_{x_i}^{m} P_{k_\nu,\dots,k_\nu}(\bar{x})=\sum_{t=1}^{n}\left[D_{x_i}^{m} P_{\underbrace{k_\nu,\dots,k_\nu}_{t-1},k_{\nu+1},\dots,k_{\nu+1}}(\bar{x})-\right.$$

$$\left.-D_{x_i}^{m} P_{\underbrace{k_\nu,\dots,k_\nu}_{t},k_{\nu+1},\dots,k_{\nu+1}}(\bar{x})\right],\ \text{т.о.},\ D_{x_i}^{m} P_{k_\lambda,\dots,k_\lambda}(\bar{x})-D_{x_i}^{m} P_{k_\mu,\dots,k_\mu}(\bar{x})=\sum_{\nu=\mu}^{\lambda-1}\sum_{t=1}^{n}B_{\nu,t}^{(m)}(\bar{x}),$$

где $B_{\nu,t}^{(m)}(\bar{x})=D_{x_i}^{m} P_{\underbrace{k_\nu,\dots,k_\nu}_{t-1},k_{\nu+1},\dots,k_{\nu+1}}(\bar{x})-D_{x_i}^{m} P_{\underbrace{k_\nu,\dots,k_\nu}_{t},k_{\nu+1},\dots,k_{\nu+1}}(\bar{x}),\ t=1,2,\dots,n,\ i=1,2,\dots,n.$

Тогда

$$\left\|D_{x_i}^{m} P_{k_\lambda,\dots,k_\lambda}-D_{x_i}^{m} P_{k_\mu,\dots,k_\mu}\right\|_{q,\rho}\le\sum_{t=1}^{n}\left\|\sum_{\nu=\mu}^{\lambda-1}B_{\nu,t}^{(m)}\right\|_{q,\rho}. \tag{2}$$

Положим $s=[q]+1$, $\delta_{\nu,t}^{(m)}(\bar{x})=\left|B_{\nu,t}^{(m)}(\bar{x})\right|^{\frac{q}{s}}$, где $[q]$ - целая часть числа q . Будем отдельно рассматривать слагаемые суммы (2) возведенные в степень q :

$$\left\|\sum_{\nu=\mu}^{\lambda-1}B_{\nu,t}^{(m)}\right\|_{q,\rho}^{q}=\int_{\mathbb{R}_n}\left|\sum_{\nu=\mu}^{\lambda-1}B_{\nu,t}^{(m)}(\bar{x})e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}}\right|^{q}d\bar{x}\le\int_{\mathbb{R}_n}\left[\left(\sum_{\nu=\mu}^{\lambda-1}\left|B_{\nu,t}^{(m)}(\bar{x})\right|e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}}\right)^{\frac{q}{s}}\right]^{s}d\bar{x}\le$$

$$\le\left(\frac{q}{s}<1\right)\le\int\limits_{R_n}\left(\sum_{\nu=\mu}^{\lambda-1}\delta_{\nu,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot\frac{q}{s}}\right)^s d\bar{x}=\sum_{\nu_1=\mu}^{\lambda-1}\dots\sum_{\nu_s=\mu}^{\lambda-1}\int\limits_{R_n}\left(\delta_{\nu_1,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\dots\delta_{\nu_n,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\right)e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot q}d\bar{x}=$$

$$=(\textit{лемма } 1)=\sum_{\nu_1=\mu}^{\lambda-1}\dots\sum_{\nu_s=\mu}^{\lambda-1}\int\limits_{R_n}\left[\prod_{1\le\tau<j\le s}\delta_{\nu_\tau,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\delta_{\nu_j,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\right]^{\frac{1}{s-1}}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot q}d\bar{x}.$$

Таким образом, пока мы установили неравенство:

$$\left\|\sum_{\nu=\mu}^{\lambda-1}B_{\nu,t}^{(m)}\right\|_{q,\rho}^{q}\le\sum_{\nu_1=\mu}^{\lambda-1}\dots\sum_{\nu_s=\mu}^{\lambda-1}\int\limits_{R_n}\left[\prod_{1\le\tau<j\le s}\delta_{\nu_\tau,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\delta_{\nu_j,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\right]^{\frac{1}{s-1}}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot q}d\bar{x}. \tag{3}$$

а) Сначала рассмотрим случай $q\ge 2$. Положим $\theta=\frac{s(s-1)}{2}$, где $s=[q]+1\ge 3$, $s-1=[q]\ge 2$, поэтому $\theta\ge 3>1$. Применим неравенство Гельдера с показателем θ :

$$\int\limits_{R_n}\left[\prod_{1\le\tau<j\le s}\delta_{\nu_\tau,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\delta_{\nu_j,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\right]^{\frac{1}{s-1}}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot q}d\bar{x}=\int\limits_{R_n}\left[\prod_{1\le\tau<j\le s}\delta_{\nu_\tau,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\delta_{\nu_j,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\right]^{\frac{1}{s-1}}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot q\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta'}\right)}d\bar{x}\le$$

$$\le\prod_{1\le\tau<j\le s}\left\{\int\limits_{R_n}\left(\delta_{\nu_\tau,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\delta_{\nu_j,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\right)^{\frac{s}{2}}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot q}d\bar{x}\right\}^{\frac{1}{\theta}}\cdot\left\{\int\limits_{R_n}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot q}d\bar{x}\right\}^{\frac{1}{\theta'}}=$$

$$=C_q\cdot\prod_{1\le\tau<j\le s}\left\{\int\limits_{R_n}\left(\delta_{\nu_\tau,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\delta_{\nu_j,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\right)^{\frac{s}{2}}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot q}d\bar{x}\right\}^{\frac{1}{\theta}}=C_q\prod_{1\le\tau<j\le s}\left\{\int\limits_{R_n}\left|B_{\nu_\tau,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\right|^{\frac{q}{2}}\left|B_{\nu_j,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\right|^{\frac{q}{2}}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot q}d\bar{x}\right\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{4}$$

Оценим интеграл:

$$A_{\tau,j}^{(m)}=\int\limits_{R_n}\left|B_{\nu_\tau,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\right|^{\frac{q}{2}}\left|B_{\nu_j,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\right|^{\frac{q}{2}}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot q}d\bar{x}\le$$

$$\le\left(\textit{применяем неравенство Гелдера с показателями}: r=\frac{p+q}{p},\ r'=\frac{p+q}{q}\right)\le$$

$$\le\left\{\int\limits_{R_n}\left|B_{\nu_\tau,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\right|^{\frac{q}{2}r}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot\frac{q}{2}r}d\bar{x}\right\}^{\frac{1}{r}}\cdot\left\{\int\limits_{R_n}\left|B_{\nu_j,t}^{(m)}\left(\bar{x}\right)\right|^{\frac{q}{2}r'}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot\frac{q}{2}r'}d\bar{x}\right\}^{\frac{1}{r'}}=\left\|B_{\nu_\tau,t}^{(m)}\right\|_{q\frac{r}{2},\rho}^{\frac{q}{2}}\cdot\left\|B_{\nu_j,t}^{(m)}\right\|_{q\frac{r'}{2},\rho}^{\frac{q}{2}}. \tag{5}$$

При этом будем считать, что в степень r' возвели тот сомножитель, у которого индекс больше, т.е будем считать, что $\nu_\tau<\nu_j$. Так как $\frac{qr}{2}>p,\ \frac{qr'}{2}>p$, то применяя неравенство разных метрик (лемма 4), соотношение (5) продолжим следующим образом:

$$A^{(m)}_{\tau,j,t} \le C_{pq}\left\{k_{\nu_\tau+1}^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|B^{(m)}_{\nu_\tau,t}\right\|^q_{p,\rho}\cdot k_{\nu_j+1}^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|B^{(m)}_{\nu_j,t}\right\|^q_{p,\rho}\right\}^{\frac{1}{2}} k_{\nu_\tau+1}^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)} k_{\nu_j+1}^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)},$$ потому что

$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{qr}\right)\frac{q}{2}=\frac{n}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\right]$; $\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{qr'}\right)\frac{q}{2}=\frac{n}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r'}\right)\right]=$

$=\frac{n}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)\right]$. По определению $2^{\nu}<k_\nu\le 2^{\nu+1}$ и $r>2$, то $k_{\nu_\tau+1}\le 2^{\nu_\tau+2}$,

$k_{\nu_j+1}>2^{\nu_j+1}$ и $k_{\nu_\tau+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)} k_{\nu_j+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)}\le 2^{(\nu_\tau+2)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}2^{\nu_j\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)} = 2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}.$

$\cdot 2^{\nu_\tau\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}2^{\nu_j\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)}=2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}\cdot 2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)|\nu_j-\nu_\tau|}$. Таким образом, оценку величины $A^{(i)}_{\tau,j}$ продолжим следующим образом:

$$A^{(m)}_{\tau,j;t}\le C'_{pqn}\left\{k_{\nu_\tau+1}^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|B^{(m)}_{\nu_\tau;t}\right\|^q_{p,\rho} k_{\nu_j+1}^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|B^{(m)}_{\nu_j;t}\right\|^q_{p,\rho}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)|\nu_j-\nu_\tau|}. \tag{6}$$

Теперь из (4), (5) и (6) имеем: $\int\limits_{R_n}\left[\prod\limits_{1\le\tau<j\le s}\delta^{(m)}_{\nu_\tau,t}(\bar{x})\delta^{(m)}_{\nu_j,t}(\bar{x})\right]^{\frac{1}{s-1}}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot q}d\bar{x}\le$

$$\le C''_{pqn}\prod_{1\le\tau<j\le s}\left[\left\{k_{\nu_\tau+1}^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|B^{(m)}_{\nu_\tau;t}\right\|^q_{p,\rho} k_{\nu_j+1}^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|B^{(m)}_{\nu_j;t}\right\|^q_{p,\rho}\right\}2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)|\nu_j-\nu_\tau|}\right]^{\frac{1}{\theta}}. \tag{7}$$

б) Пусть теперь $1\le p<q\le 2$. Тогда $s=2,\ \theta=\frac{s(s-1)}{2}=1$. И в этом случае $r=\frac{p+q}{p},\ r'=\frac{p+q}{q}$, поэтому $\frac{qr}{2}>p,\ \frac{qr'}{2}>p$. Повторяем все предыдущие действия:

$$\int\limits_{R_n}\left[\prod_{1\le\tau<j\le 2}\delta^{(m)}_{\nu_\tau,t}(\bar{x})\delta^{(m)}_{\nu_j,t}(\bar{x})\right]e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot q}d\bar{x}=\prod_{1\le\tau<j\le 2}\int\limits_{R_n}\left|B^{(m)}_{\nu_\tau,t}(\bar{x})\right|^{\frac{q}{2}}\left|B^{(m)}_{\nu_j,t}(\bar{x})\right|^{\frac{q}{2}}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot q}d\bar{x}\le$$

$$\le\left\{\int\limits_{R_n}\left|B^{(m)}_{\nu_\tau,t}(\bar{x})\right|^{\frac{q}{2}r}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot\frac{q}{2}r}d\bar{x}\right\}^{\frac{1}{r}}\left\{\int\limits_{R_n}\left|B^{(m)}_{\nu_\tau,t}(\bar{x})\right|^{\frac{q}{2}r'}e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}\cdot\frac{q}{2}r'}d\bar{x}\right\}^{\frac{1}{r'}}=\left\|B^{(m)}_{\nu_1,t}\right\|^{\frac{q}{2}}_{q\frac{r}{2},\rho}\left\|B^{(m)}_{\nu_2,t}\right\|^{\frac{q}{2}}_{q\frac{r'}{2},\rho}\le(\textit{лемма}\ 4)$$

$$\le C''_{pqn}\left\{k_{\nu_1+1}^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|B^{(m)}_{\nu_1,t}\right\|^q_{p,\rho}\cdot k_{\nu_2+1}^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|B^{(m)}_{\nu_2,t}\right\|^q_{p,\rho}\right\}^{\frac{1}{2}} k_{\nu_1+1}^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)} k_{\nu_2+1}^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)}\le$$

$$\le C'''_{pqn}\left\{k_{\nu_1+1}^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|B^{(m)}_{\nu_1,t}\right\|^q_{p,\rho}\cdot k_{\nu_2+1}^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|B^{(m)}_{\nu_2,t}\right\|^q_{p,\rho}\right\}^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)|\nu_1-\nu_2|}. \tag{8}$$

Положим $\sigma^{(m)}_{\nu_j,t} = k_{\nu_j}^{\frac{n}{2}\left(\frac{p}{q}-1\right)} \left\| B^{(m)}_{\nu_j,t} \right\|^q_{p,\rho}$, $j = 1,2$. Теперь из (2), (3), (7) и (8), выводим:

$$\left\| D^m_{x_i} P_{k_\lambda,\dots,k_\lambda} - D^m_{x_i} P_{k_\mu,\dots,k_\mu} \right\|^q_{q,\rho} \le C_{n,pq} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu_1=\mu}^{\lambda-1} \dots \sum_{\nu_s=\mu}^{\lambda-1} \prod_{1\le\tau<j\le s} \left(2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)|\nu_j-\nu_\tau|} \left(\sigma^{(m)}_{\nu_\tau;t} \sigma^{(m)}_{\nu_j;t} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\textit{полагая} \quad \alpha = \frac{n}{2} - \frac{n}{r}, \textit{ применяем лемму } 2 \right) =$$

$$= \overline{C}_{pqn} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu_i=\mu}^{\lambda-1} \dots \sum_{\nu_s=\mu}^{\lambda-1} \prod_{j=1}^{s} \left(\sigma^{(m)}_{\nu_j,t} \right)^{\frac{1}{s}} \prod_{\tau=1}^{s} 2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{2\theta}} \le$$

$$\le \left(\textit{применим неравенство Гелдера для кратной суммы} \right) \le$$

$$\le \overline{\overline{C}}_{pqn} \sum_{t=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \left[\sum_{\nu_1=\mu}^{\lambda-1} \dots \sum_{\nu_s=\mu}^{\lambda-1} \sigma^{(m)}_{\nu_j,t} \prod_{\tau=1}^{s} 2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_\tau|}{s-1}} \right]^{\frac{1}{s}}. \qquad (9)$$

При каждом фиксированном j имеет место равенство:

$$\sum_{\nu_1=\mu}^{\lambda-1} \dots \sum_{\nu_s=\mu}^{\lambda-1} \sigma^{(m)}_{\nu_j,t} \prod_{\tau=1}^{s} 2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_\tau|}{s-1}} = \left(2^{-\frac{|\nu_j-\nu_j|}{s-1}} = 1, \ \forall j = 1,2,\dots,s \right) =$$

$$= \sum_{\nu_j=\mu}^{\lambda-1} \sigma^{(m)}_{\nu_j,t} \sum_{\nu_1=\mu}^{\lambda-1} \dots \sum_{\nu_{j-1}=\mu}^{\lambda-1} \sum_{\nu_{j+1}=\mu}^{\lambda-1} \dots \sum_{\nu_s=\mu}^{\lambda-1} \prod_{\tau\ne j} 2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_\tau|}{s-1}} =$$

$$= \sum_{\nu_j=\mu}^{\lambda-1} \sigma^{(m)}_{\nu_j,t} \left\{ \sum_{\nu_1=\mu}^{\lambda-1} 2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_\tau|}{s-1}} \right\} \dots \left\{ \sum_{\nu_{j-1}=\mu}^{\lambda-1} 2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_\tau|}{s-1}} \right\} \left\{ \sum_{\nu_{j+1}=\mu}^{\lambda-1} 2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_\tau|}{s-1}} \right\} \dots$$

$$\dots \left\{ \sum_{\nu_s=\mu}^{\lambda-1} 2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_\tau|}{s-1}} \right\} = \sum_{\nu_j=\mu}^{\lambda-1} \sigma^{(m)}_{\nu_j,t} \left\{ \sum_{t=\mu}^{\lambda-1} 2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_t|}{s-1}} \right\}^{s-1} \le$$

$$\le \sum_{\nu_j=\mu}^{\lambda-1} \sigma^{(m)}_{\nu_j,t} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|k|}{s-1}} \right\}^{s-1}. \qquad (10)$$

Ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|k|}{s-1}}$ сходится, потому что, по определению $r > 2,\ s \ge 2$. Тогда из (9) и (10) получим:

$$\left\| D_{x_i}^m P_{k_l,\dots,k_l} - D_{x_i}^m P_{k_\mu,\dots,k_\mu} \right\|_{q,\rho}^q \le \overline{\overline{C}}_{pqn} \sum_{t=1}^{n} \prod_{j=1}^{s} \left\{ \sum_{\nu_j=\mu}^{\lambda-1} \sigma_{\nu_j;t}^{(m)} \right\}^{\frac{1}{s}} = \overline{\overline{C}}_{pqn} \sum_{t=1}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{\lambda-1} \sigma_{\nu;t}^{(m)} =$$

$$= \overline{\overline{C}}_{pqn} \sum_{t=1}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{\lambda-1} k_\nu^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)} \left\| B_{\nu;t}^{(m)} \right\|_{p,\rho}^q =$$

$$= \overline{\overline{C}}_{pqn} \sum_{t=1}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{\lambda-1} k_\nu^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)} \left\| D_{x_i}^m P_{\underbrace{k_\nu,\dots,k_\nu}_{t-1},k_{\nu+1},\dots,k_{\nu+1}} - D_{x_i}^m P_{\underbrace{k_\nu,\dots,k_\nu}_{t},k_{\nu+1},\dots,k_{\nu+1}} \right\|_{p,\rho}^q \le$$

$$\le (\textit{лемма } 5) \le \overline{\overline{C}}_{pqnm} \sum_{t=1}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{\lambda-1} k_\nu^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)} \cdot k_{\nu+1}^{mq} \left\| P_{\underbrace{k_\nu,\dots,k_\nu}_{t-1},k_{\nu+1},\dots,k_{\nu+1}} - P_{\underbrace{k_\nu,\dots,k_\nu}_{t},k_{\nu+1},\dots,k_{\nu+1}} \right\|_{p,\rho}^q \le$$

$\le \Big($*вспомним, что многочлены* $P_{k_\nu,\dots,k_\nu}(\overline{x})$ *– многочлены наилучшего приближения функции*

$$f \in L_{p,\rho}(\mathrm{R}_n)\Big) \le \overline{\overline{\overline{C}}}_{pqnr} \sum_{\nu=\mu}^{\lambda-1} k_\nu^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)+mq} \cdot E_{k_\nu,\dots,k_\nu}^q (f)_{p,\rho}^{(n)},\ \ \forall m = 0,1,\dots,r_i,\ \ i = 1,\dots,n. \qquad (11)$$

Здесь мы учли, что по определению $k_\nu \in \left[2^\nu + 1, 2^{\nu+1}\right]$, поэтому $1 \le \frac{k_{\nu+1}}{k_\nu} \le 4,\ \forall \nu \in \mathrm{N}$. Согласно лемме 10, имеем:

$$E_{k_\nu,\dots,k_\nu}(f)_{p,\rho}^{(n)} \le C_{prl} \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=\nu}^{+\infty} k_s^{-r_j-l_j} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k_{s+1},\dots,k_{s+1}} \right\|_{p,\rho}, \qquad (12)$$

то последнее соотношение можем продолжить следующим образом:

$$\left\| D_{x_i}^m P_{k_\lambda,\dots,k_\lambda} - D_{x_i}^m P_{k_\mu,\dots,k_\mu} \right\|_{q,\rho}^q \le C_{pqnr} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{+\infty} 2^{\nu\left(\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)+r_j q\right)} \left[\sum_{s=\nu}^{+\infty} k_s^{-r_j-l_j} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k_{s+1},\dots,k_{s+1}} \right\|_{p,\rho} \right]^q \le$$

$$\le (\textit{лемма } 3) \le C'_{pqnr} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{+\infty} 2^{\nu\left(\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-l_j q\right)} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k_{\nu+1},\dots,k_{\nu+1}} \right\|_{p,\rho}^q =$$

$$= C''_{pqnr} \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=\mu+1}^{+\infty} 2^{s\left(\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-l_j q\right)} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k_s,\dots,k_s} \right\|_{p,\rho}^q \le$$

$$\le C''_{pqnr} \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=\mu}^{+\infty} 2^{s\left(\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-l_j q\right)} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k_s,\dots,k_s} \right\|_{p,\rho}^q \le$$

$$\leq C'''_{pqnr} \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=\mu}^{+\infty} k_s^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-l_j q} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k_s,..,k_s} \right\|_{p,\rho}^{q}, \ \forall l \in \mathrm{N} : \ \mu < l, \ \forall m = 0,1,...,r_i, \ i = 1,...,n. \quad (13)$$

В силу соотношения (1):

$$\sum_{k=2^s+1}^{2^{s+1}} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-ql_j-1} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k,..,k} \right\|_{p,\rho}^{q} \geq k_s^{-ql_j+\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k_s,..,k_s} \right\|_{p,\rho}^{q} \sum_{k=2^s+1}^{2^{s+1}} k^{-1} \geq$$

$$\geq k_s^{-ql_j+\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k_s,..,k_s} \right\|_{p,\rho}^{q} 2^{-s-1} 2^{s} = \frac{1}{2} k_s^{-ql_j+\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k_s,..,k_s} \right\|_{p,\rho}^{q}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получим

$$\left\| D_{x_i}^{m} P_{k_\lambda,...,k_\lambda} - D_{x_i}^{m} P_{k_\mu,...,k_\mu} \right\|_{q,\rho}^{q} \leq C_{pqnr}^{IV} \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=\mu}^{+\infty} \sum_{k=2^s+1}^{2^{s+1}} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-ql_j-1} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k,...,k} \right\|_{p,\rho}^{q} =$$

$$= C_{pqnr}^{IV} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^\mu+1}^{+\infty} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-ql_j-1} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k,...,k} \right\|_{p,\rho}^{q}, \ \forall l \in N : \mu < l, \forall m = 0,1,...,r_i, i = 1,...,n. \quad (15)$$

По условию теоремы $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-ql_j-1} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k,...,k} \right\|_{p,\rho}^{q} < +\infty$, поэтому $\forall \varepsilon > 0$ найдется $N_\varepsilon \in \mathrm{N}$ такое, что $\forall \mu > N_\varepsilon$: $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=2^\mu+1}^{+\infty} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-ql_j-1} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k,...,k} \right\|_{p,\rho}^{q} < \varepsilon.$

Следовательно, по лемме 9, существует $\varphi_m \in L_{q,\rho}(\mathrm{R}_n)$: $\left\| \varphi_{(m)} - D_{x_i}^{m} P_{k_\nu,...,k_\nu} \right\|_{q,\rho} \to 0,$ при $\nu \to +\infty$ и $D_{x_i}^{m} \varphi_{(o)}(\bar{x}) = \varphi_{(m)}(\bar{x})$ $m = 0,1,2,...,r_i$, $i = 1,...,n.$ С другой стороны, по определению многочленов $\left\{P_{k,...,k}(\bar{x})\right\}_{k=1}^{+\infty}$: $E_{k,...,k}(f)_{p,\rho} = \left\| f - P_{k,...,k} \right\|_{p,\rho}$ и $E_{k,...,k}(f)_{p,\rho} \to 0$ при $k \to +\infty$. Следовательно, $\varphi_{(o)}(\bar{x}) \sim f(\bar{x})$ и $D_{x_i}^{m} f(\bar{x}) \sim D_{x_i} \varphi_{(m-1)}(\bar{x})$, $m = 1,2,...,r_i$, $i = 1,2,...,n$ на R_n. При этом, в силу того, что $\varphi_{(m)} \in L_{q,\rho}(\mathrm{R}_n)$ так же и $D_{x_i}^{m} f \in L_{q,\rho}(\mathrm{R}_n)$,

$m = 0,1,2,...,r_i$, $i = 1,...,n.$ Теперь в неравенстве (15) при $m = r_i$, $i = 1,2,...,n$, переходя к пределу при $\lambda \to +\infty$, получим:

$$\left\| D_{x_i}^{r_i} f - D_{x_i}^{r_i} P_{k_\mu,...,k_\mu} \right\|_{q,\rho}^{q} \leq C_{pqnr}^{IV} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^\mu+1}^{+\infty} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-ql_j-1} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k,...,k} \right\|_{p,\rho}^{q} \leq$$

$$\leq \left(\mu : \ 2^{\mu-1} < N \leq 2^{\mu}\right) \leq C_{pqnr}^{IV} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=N+1}^{+\infty} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-ql_j-1} \left\| D_{x_j}^{r_j+l_j} P_{k,...,k} \right\|_{p,\rho}^{q}. \quad (16)$$

На основании свойств модуля гладкости по обобщенному сдвигу:

$$\omega_{l_i}^{(i)}\left(D_{x_i}^{r_i} f;\frac{1}{N}\right)_{q,\rho} \le \omega_{l_i}^{(i)}\left(D_{x_i}^{r_i} f - D_{x_i}^{r_i} P_{k_\mu,\dots,k_\mu};\frac{1}{N}\right)_{q,\rho} + \omega_{l_i}^{(i)}\left(D_{x_i}^{r_i} P_{k_\mu,\dots,k_\mu};\frac{1}{N}\right)_{q,\rho} \le$$

$$\le 2^{r_i}\left\|D_{x_i}^{r_i} f - D_{x_i}^{r_i} P_{k_\mu,\dots,k_\mu}\right\|_{q,\rho} + \frac{1}{N^{l_i}}\left\|D_{x_i}^{l_i+r_i} P_{k_\mu,\dots,k_\mu}\right\|_{q,\rho}. \qquad (17)$$

Так как $2^{\mu-1} < N \le 2^{\mu}$, $2^{\mu}+1 \le k_\mu \le 2^{\mu+1}$, то

$$\frac{1}{N^{l_i}}\left\|D_{x_i}^{l_i+r_i} P_{k_\mu,\dots,k_\mu}\right\|_{q,\rho} \le \frac{2^{2l_i}}{2^{(\mu+1)l_i}}\left\|D_{x_i}^{l_i+r_i} P_{k_\mu,\dots,k_\mu}\right\|_{q,\rho} \le \frac{2^{2l_i}}{k_\mu^{l_i}}\left\|D_{x_i}^{l_i+r_i} P_{k_\mu,\dots,k_\mu}\right\|_{q,\rho} \le$$

$$\le \frac{C_{pql_j}}{k_\mu^{l_j}} k_\mu^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|D_{x_i}^{l_i+r_i} P_{k_\mu,\dots,k_\mu}\right\|_{p,\rho} \le (14) \le C'_{pql_ir_i}\left\{\sum_{k=2^{\mu}+1}^{2^{\mu+1}} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-ql_i-1}\left\|D_{x_i}^{l_i+r_i} P_{k,\dots,k}\right\|_{p,\rho}^{q}\right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C'_{qpl_ir_i}\left\{\sum_{k=N+1}^{+\infty} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-ql_j-1}\left\|D_{x_i}^{l_i+r_i} P_{k,\dots,k}\right\|_{p,\rho}^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}. \qquad (18)$$

С учетом (16), (17), (18) окончательно будем иметь:

$$\omega_{l_i}^{(i)}\left(D_{x_i}^{r_i} f;\frac{1}{N}\right)_{q,\rho} \le C'_{qpl_ir_i}\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=N+1}^{+\infty} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-ql_j-1}\left\|D_{x_j}^{l_j+r_j} P_{k,\dots,k}\right\|_{p,\rho}^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}, \quad \forall N \in \mathrm{N},$$

$const = C'_{qpl_ir_i} > 0$ не зависит от f и $N \in \mathrm{N}$, $\forall i = 1,\dots,n$. Далее,

$$\left\|D_{x_i}^{r_i} f\right\|_{q,\rho} \le \left\|D_{x_i}^{r_i} f - D_{x_i}^{r_i} P_{k_1,\dots,k_1}\right\|_{q,\rho} + \left\|D_{x_i}^{r_i} P_{k_1,\dots,k_1}\right\|_{q,\rho} \le (16) \le$$

$$\le A_{qpl_ir_i}\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=3}^{+\infty} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-ql_j-1}\left\|D_{x_j}^{l_j+r_j} P_{k,\dots,k}\right\|_{p,\rho}^{q}\right\}^{\frac{1}{q}} + A_{pqr_i} k_1^{r_i+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|P_{k_1,\dots,k_1}\right\|_{p,\rho}, \ i = 1,\dots,n. \qquad (19)$$

$$\left\|P_{k_1,\dots,k_1}\right\|_{p,\rho} \le \left\|f - P_{k_1,\dots,k_1}\right\|_{p,\rho} + \|f\|_{p,\rho} \le E_{k_1,\dots,k_1}(f)_{p,\rho} + \|f\|_{p,\rho} \le 2\|f\|_{p,\rho}, \ i = 1,\dots,n. \qquad (20)$$

Исходя из неравенств (19) и (20), получим требуемое неравенство:

$$\left\|D_{x_i}^{r_i} f\right\|_{q,\rho} \le B_{pqr_il_i}\left\{\|f\|_{p,\rho} + \left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{n}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)-ql_j-1}\left\|D_{x_j}^{l_j+r_j} P_{k,\dots,k}\right\|_{p,\rho}^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}, \quad i = 1,\dots,n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров В.М. Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева-Эрмита // Изв. ВУЗов., матем., 1984, №6. - С.55-63. 2.
2. Алексеев Д.В. Приближение полиномами с весом Чебышева-Эрмита на действительной оси. // Вестник Моск. ун-та . Сер.1., Математика. Механика. - 1997. №6. - С.68-71.
3. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. - ФМ.- М., 1963. -358 с.
4. Конюшков А.А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье. // Матем. сб. -Т.44(86). -1. -1958. - С.53-84.
5. Ульянов П.Л. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках. // Матем. сб. -Т.81(123). -1.
6. Тиман М.Ф. О вложении $L_p^{(k)}$ классов функций. // Изв.вузов. Математика. - 1974. - С.61-74.
7. Стороженко Э.А. Теоремы вложения и наилучшие приближения.. // Матем. сб., 1975, 97 (139), 2, - С.230-241.
8. Коляда В.И. Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений. // Матем.сб. Т. 102(144), 2,С. 195-215.
9. Потапов М.К. Теоремы вложения в смешанной метрике. // Труды МИАН СССР, 1980, 156, - С.143-156.
10. Смаилов Е.С. Мультипликаторы Фурье, теоремы вложения и смежные с ними вопросы. // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Караганда - 1997, 250с.
11. Акишев Г.А. Об условиях вложения классов функции многих переменных в пространство Лоренца и их приложения: Дис.... канд. физ. - мат. наук.-Караганда, 1982. -113с.
12. Коляда В.И. *О* некоторых обобщениях теоремы Харди-Литтльвуда-Пэли. // Матем. заметки. Т.51. вып.3. 1992 С.24-35.
13. Алексеев Д.В. Приближение функций одной и нескольких действительных переменных с весом Чебышева-Эрмита: Дис.... канд. физ. - мат. наук., М.: МГУ им. М.В.Ломоносова, 2006.
14. Жук В.В., Натансон Г.И. Свойства функций и рост производных приближающих полиномов//ДАН СССР. -1973. - Т.212. -С. 19-22.
15. Бокаев Н.А. Об интегральных и дифференциальных свойствах функций //Математические исследования. Караганда: Изд. КарГУ. 1976. -Вып.3. -С.14-20.
16. Каримов С.К. Порядок роста нормы производных частичных сумм ряда Фурье и теоремы вложения: Дис. ... физ.-мат.наук. Алма-Ата. 1978. - 95с.
17. Есмаганбетов М.Г. Об оценках модулей гладкости положительного порядка функций из L_p, $1 < p < \infty$, и их приложениях: Дис. ... физ.-мат.наук. Алма-Ата. 1983. -111 с.
18. Омарова А.Т. Порядок роста нормы производных многочлена наилучшего приближения и теорема типа А.А.Конюшкова // Вестник КарГУ. Серия Математика. №2(50)2008.-С.42-46.