АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Дауылбаев М.К.
КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы, РК

Аннотация

Для построения асимптотического разложения решений начальных и краевых задач необходимо исследование асимптотического поведения решения и его производных в точке разрыва при $\varepsilon \to 0$. С этой целью в работе [1] для линейных интегро-дифференциальных уравнений $n-$го порядка с малым параметром при старшей производной, в которых интегрирование ведется по промежутку [0,1], исследована задача Коши с явлением начального скачка $(n-2)-$го порядка в точке $t=0$, а в работе [2] – с явлением начального скачка любого порядка.

В настоящей работе рассматривается задача Коши для сингулярно возмущенных линейных интегро-дифференциальных уравнений произвольного порядка, но с промежутком интегрирования $[a,1]$, где $0<a<1$.

Рассмотрим на [0,1] линейное дифференциальное уравнение:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon\, y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + A_n(t)y = F(t) \tag{1}$$

с начальными условиями во внутренней точке $t_0 \in (0,1)$:

$$y(t_0,\varepsilon)=\alpha_0, \quad y'(t_0,\varepsilon)=\alpha_1,\ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0,\varepsilon)=\alpha_{n-1}, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0-$ малый параметр, $\alpha_i, i=\overline{0,n-1}-$ известные постоянные.

Пусть выполнены следующие условия:

I. Функции $A_i(t), i=\overline{1,n},\ F(t)$ на отрезке [0,1] являются непрерывно дифференцируемыми до $(n-1)-$го порядка включительно.

II. $A_1(t) \geq \gamma = const > 0,\ \ 0 \leq t \leq 1$.

Решение дифференциальной задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ стремится на $t_0 \leq t \leq 1$ к конечному пределу, являющемуся решением обычной вырожденной задачи $L_0\bar{y}=F(t), \bar{y}^{(i)}(t_0)=\alpha_i, i=\overline{0,n-2}$, а в полуинтервале $0 \leq t < t_0$ стремится к бесконечности и, следовательно, не имеет конечного предела.

Добавим, теперь, в дифференциальное уравнение (1) интегральные члены $\int\limits_a^1 [H_0(t,x)y(x,\varepsilon)+H_1(t,x)y'(x,\varepsilon)+\ldots+H_{n-1}(t,x)y^{(n-1)}(x,\varepsilon)]dx$, где $0<a<t_0<1$ и, тем самым, вместо дифференциального уравнения (1) получаем интегро-дифференциальное уравнение:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon\, y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + A_n(t)y = F(t) + \tag{3}$$

$$+\int_a^1 [H_0(t,x)y(x,\varepsilon)+H_1(t,x)y'(x,\varepsilon)+...+H_{n-1}(t,x)y^{(n-1)}(x,\varepsilon)]dx$$

В настоящей работе исследуется вопрос: асимптотическое поведение решения интегро-дифференциальной задачи (3), (2) аналогично ли вышеуказанному асимптотическому поведению решения дифференциальной задачи (1), (2)?

Для дальнейших исследований предположим выполнение следующих условий:

III. $H_i(t,x)\in C(D), i=\overline{0,n-1}, D=(0\le t\le 1, a\le x\le 1)$ и $H_{n-1}(t,a)\ne 0, \forall t\in[0,1]$

IV. Число $\lambda=1$ при достаточно малых ε не является собственным значением ядра

$$K_\varepsilon(t,s)=K(t,s)-\frac{H_{n-1}(t,1)}{A_1(1)}\exp\left(\int_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^1 A_1(x)dx\right)+O(\varepsilon),$$

где

$$K(t,s)=\frac{1}{A_1(s)}\left[H_{n-1}(t,s)+\frac{1}{\overline{W}(s)}\int_s^1\sum_{j=0}^{n-1}H_j(t,x)\overline{W}_{n-1}^{(j)}(x,s)dx\right].$$

Здесь $\overline{W}(t)-$вронскиан фундаментальной системы решений $\overline{y}_1(t),...,\overline{y}_{n-1}(t)$ вырожденного однородного дифференциального уравнения $L_0\overline{y}=0$, а $\overline{W}_{n-1}^{(j)}(t,s)-$определитель, получаемый из вронскиана $\overline{W}(s)$ заменой его $(n-1)-$ой строки строкой $\overline{y}_1^{(j)}(t),...,\overline{y}_{n-1}^{(j)}(t)$.

V.

$$\overline{\omega}(t_0)=\begin{vmatrix} T_1(t_0) & ... & T_{n-1}(t_0) & \overline{H}_n(t_0) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ T_1^{(n-2)}(t_0) & ... & T_{n-1}^{(n-2)}(t_0) & \overline{H}_n^{(n-2)}(t_0) \\ \overline{T}_1^{(n-1)}(t_0) & ... & \overline{T}_{n-1}^{(n-1)}(t_0) & \overline{\overline{H}}_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}\ne 0, \qquad (4)$$

где $\overline{T}_i^{(n-1)}(t)\equiv T_i^{(n-1)}(t)+S_i(t),\ i=\overline{1,n-1},\ \overline{\overline{H}}_n^{(n-1)}(t)\equiv \overline{H}_n^{(n-1)}(t)+\tilde{H}_n(t),$ а функций $T_i^{(j)}(t),\overline{H}_n^{(j)}(t),S_i(t),\tilde{H}_n(t),i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{0,n-1}$ определенным образом выражаются через коэффициенты уравнения (3).

Отметим, что решение дифференциального уравнения (1) с начальными условиями в левой точке $t=0$:

$$y(0,\varepsilon)=\alpha_0,\quad y'(0,\varepsilon)=\alpha_1,...,\quad y^{(n-1)}(0,\varepsilon)=\alpha_{n-1}$$

выражается формулой (Касымов К.А.):

$$y(t,\varepsilon)=\alpha_0 K_1(t,0,\varepsilon)+...+\alpha_{n-1}K_n(t,0,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_n(t,s,\varepsilon)F(s)ds\,,$$

где $K_i(t,s,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ - начальные функции, имеющие асимптотические оценки:

$$\left|K_i^{(j)}(t,s,\varepsilon)\right|\le K,\quad i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{0,n-1},$$
$$\left|K_n^{(j)}(t,s,\varepsilon)\right|\le K\varepsilon,\qquad j=\overline{0,n-2},$$
$$\left|K_n^{(n-1)}(t,s,\varepsilon)\right|\le K\left(\varepsilon+\exp\left(-\gamma\frac{t-s}{\varepsilon}\right)\right),$$

Вернемся к исходной задаче (3), (2) и исследуем ее решение на отрезке $a\le t\le 1$. Решение однородного интегро-дифференциального уравнения

$$L_\varepsilon y=\int_a^1[H_0(t,x)y(x,\varepsilon)+...+H_{n-1}(t,x)y^{(n-1)}(x,\varepsilon)]dx \tag{5}$$

с начальными условиями в точке $t=a$:

$$y^{(j)}(a,\varepsilon)=\delta_{i-1,\,j},\quad i=\overline{1,n};\ \ j=\overline{0,n-1} \tag{6}$$

обозначим через $Q_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}$, а решение того же однородного интегро-дифференциального уравнения (5), но с начальными условиями:

$$y^{(j)}(t_0,\varepsilon)=\delta_{i-1,\,j},\quad i=\overline{1,n};\ \ j=\overline{0,n-1} \tag{7}$$

обозначим через $\Phi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}$. Решения $Q_i(t,\varepsilon),\Phi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ задач (5), (6) и (5), (7) назовем граничными функциями задачи (3), (2).

Лемма 1. Пусть выполнены условия I-IV. Тогда граничные функции $Q_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ на отрезке $a\le t\le 1$ существуют, единственны и представимы в виде:

$$Q_i(t,\varepsilon)=K_i(t,a,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t K_n(t,s,\varepsilon)[h_i(s,a,\varepsilon)+\int_a^1 R_\varepsilon(s,p)h_i(p,a,\varepsilon)dp]ds,$$

где $K_i(t,s,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ – начальные функции,

$$h_i(t,s,\varepsilon)=\int_s^1\sum_{j=0}^{n-1}H_j(t,x)K_i^{(j)}(x,s,\varepsilon)dx,\quad i=\overline{1,n},$$

а $R_\varepsilon(t,s)$ – резольвента ядра $K_\varepsilon(t,s)=\frac{1}{\varepsilon}h_n(t,s,\varepsilon)$.

Лемма 2. Если выполнены условия I-V, то граничные функции $\Phi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ на отрезке $a\le t\le 1$ существуют, единственны и выражаются формулой:

$$\Phi_i(t,\varepsilon)=\frac{\omega_i(t,t_0,\varepsilon)}{\omega(t_0,\varepsilon)},\quad i=\overline{1,n}, \tag{8}$$

где

$$\omega(t_0,\varepsilon)=\begin{vmatrix} Q_1(t_0,\varepsilon) & Q_2(t_0,\varepsilon) & \ldots & Q_n(t_0,\varepsilon) \\ Q_1'(t_0,\varepsilon) & Q_2'(t_0,\varepsilon) & \ldots & Q_n'(t_0,\varepsilon) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_1^{(n-1)}(t_0,\varepsilon) & Q_2^{(n-1)}(t_0,\varepsilon) & \ldots & Q_n^{(n-1)}(t_0,\varepsilon) \end{vmatrix},$$

а $\omega_i(t,t_0,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ – определитель, получаемый из $\omega(t_0,\varepsilon)$ заменой его i – ой строки строкой $Q_1(t,\varepsilon),\ldots,Q_n(t,\varepsilon)$.

Для определителя $\omega(t_0,\varepsilon)$ справедливо асимптотическое при $\varepsilon\to 0$ представление:

$$\omega(t_0,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{A_1(0)}\left[\overline{\omega}(t_0)+O(\varepsilon)\right],$$

где $\overline{\omega}(t_0)$ имеет вид (4) и в силу условия V отличен от нуля.

Лемма 3. Пусть выполнены условия I-V. Тогда для функций $\Phi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ при $a\le t\le 1$ справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon\to 0$ представления:

$$\Phi_i^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{\overline{\omega}_i^{(j)}(t,t_0)}{\overline{\omega}(t_0)}+O(\varepsilon),\ j=\overline{0,n-3},$$

$$\Phi_i^{(n-2)}(t,\varepsilon)=\frac{\overline{\omega}_i^{(n-2)}(t,t_0)}{\overline{\omega}(t_0)}-\frac{A_1(0)}{A_1(t)}\cdot\frac{A_{i,n}}{\overline{\omega}(t_0)}\exp\left(\int_a^t\frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t\overline{\mu}(x)dx\right)+O(\varepsilon),$$

$$\Phi_i^{(n-1)}(t,\varepsilon)=\frac{\overline{\omega}_i^{(n-1)}(t,t_0)}{\overline{\omega}(t_0)}-\frac{A_1(0)}{\varepsilon}\cdot\frac{A_{i,n}}{\overline{\omega}(t_0)}\exp\left(\int_a^t\frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t\overline{\mu}(x)dx\right)+ \tag{9}$$

$$+O\left(\varepsilon+\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t\overline{\mu}(x)dx\right)\right),\qquad \overline{\mu}(t)=-A_1(t),$$

где $\overline{\omega}_i^{(j)}(t,t_0), i=\overline{1,n}, j=\overline{0,n-1}$ – определитель, получаемый из $\overline{\omega}(t_0)$ заменой его i – ой строки строкой из элементов $T_1^{(j)}(t),\ldots,T_{n-1}^{(j)}(t),\overline{H}_n^{(j)}(t)$ для $j=\overline{0,n-2}$ и строкой

$\overline{T}_1^{(n-1)}(t),...,\overline{T}_{n-1}^{(n-1)}(t),\overline{\overline{H}}_n^{(n-1)}(t)$ для $j=n-1$, а $A_{i,n}$ – алгебраическое дополнение i – го элемента последнего столбца определителя $\overline{\omega}(t_0)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия I-V. Тогда решение задачи (3), (2) на отрезке $a \le t \le 1$ существует, единственно и выражается формулой

$$y(t,\varepsilon) = (\alpha_0 - P(t_0,\varepsilon))\Phi_1(t,\varepsilon) + ... + (\alpha_{n-1} - P^{(n-1)}(t_0,\varepsilon))\Phi_n(t,\varepsilon) + P(t,\varepsilon), \tag{10}$$

где функции $\Phi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ являются решениями однородной интегро-дифференциальной задачи (5), (7) и представимы в виде (8), а функция $P(t,\varepsilon)$ является решением неоднородного интегро-дифференциального уравнения (3) с нулевыми начальными условиями в точке $t=a$, и имеет вид

$$P(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_a^t K_n(t,s,\varepsilon)[F(s) + \int_a^1 R_\varepsilon(s,p)F(p)dp]ds. \tag{11}$$

Определение. Будем говорить, что решение интегро-дифференциальной задачи (3), (2) обладает явлением начального скачка $m-$ го порядка в точке $t=a$, если оно в этой точке имеет следующий порядок роста:

$$y^{(i)}(a,\varepsilon) = O(1), \quad i=\overline{0,m}, \qquad y^{(m+1)}(a,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{12}$$
$$y^{(m+2)}(a,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \; ... \; , y^{(n-1)}(a,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1-m}}\right), \quad \varepsilon \to 0.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия I-V. Тогда на отрезке $a \le t \le 1$ для решения $y(t,\varepsilon)$ задачи (3), (2) справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon \to 0$ оценки:

$$\left|y^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le \frac{K}{\overline{\omega}(t_0)}(|\alpha_0| + ... + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|), \qquad i=\overline{0,n-3},$$
$$\left|y^{(n-2)}(t,\varepsilon)\right| \le \frac{K}{\overline{\omega}(t_0)}\left(1 + \exp\left(-\gamma\frac{t-a}{\varepsilon}\right)\right)(|\alpha_0| + ... + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|), \tag{13}$$
$$\left|y^{(n-1)}(t,\varepsilon)\right| \le \frac{K}{\overline{\omega}(t_0)}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\gamma\frac{t-a}{\varepsilon}\right)\right)(|\alpha_0| + ... + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|),$$

где $\overline{\omega}(t_0)$ имеет вид (4), $K>0, \gamma>0-$ постоянные, не зависящие от ε.

Доказательство теоремы 2 следует из (9), (10).

Из теоремы 2 следует, что асимптотическое поведение решения интегро-дифференциальной задачи (3), (2) качественно отличается от поведения решений чисто дифференциальной задачи (1), (2), т.е. при $\varepsilon \to 0$ не уходит на бесконечность на всем промежутке $0 \le t < 1$, а только на $0 \le t < a$. На $a < t \le 1$ решение интегро-дифференциальной задачи (3), (2) имеет конечный предел при $\varepsilon \to 0$. При $a=1$ интегро-дифференциальное уравнение (3) обращается в дифференциальное уравнение (1) и его решение, как известно, стремится к бесконечности на всем промежутке $0 \le t < 1$.

Из теоремы 2 также следует, что значения $y^{(i)}(a,\varepsilon), i = \overline{0, n-2}$ ограничены при $\varepsilon \to 0$, а значение $y^{(n-1)}(a,\varepsilon)$ является бесконечно большим порядка $O\left(1/\varepsilon\right)$. Следовательно, решение исходной интегро-дифференциальной задачи (3), (2) в точке $t = a$ обладает явлением начального скачка $(n-2)-$го порядка.

Пусть $\bar{y}(t)$ является решением измененного вырожденного уравнения:

$$L_0 \bar{y} = F(t) + \int_a^1 [H_0(t,x)\bar{y}(x) + H_1(t,x)\bar{y}'(x) + ... + H_{n-1}(t,x)\bar{y}^{(n-1)}(x)]dx + \Delta(t) \tag{14}$$

с начальными условиями:

$$\bar{y}(1) = \alpha_0, \quad \bar{y}'(1) = \alpha_1, \quad ..., \quad \bar{y}^{(n-2)}(1) = \alpha_{n-2}, \tag{15}$$

где дополнительное слагаемое $\Delta(t)$, называемое начальным скачком интегральных членов, выражается формулой:

$$\Delta(t) = \frac{\overline{\omega}_n(t_0)}{\overline{\omega}(t_0)} H_{n-1}(t,a),$$

причем $\overline{\omega}(t_0)$ имеет вид (4), а $\overline{\omega}_n(t_0)-$определитель, получаемый из определителя $\overline{\omega}(t_0)$ заменой его $n-$го столбца столбцом из элементов $(\alpha_0 - P(t_0), ..., \alpha_{n-1} - P^{(n-1)}(t_0))'$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия I-V. Тогда для разности между решением $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной (3), (2) и решением $\bar{y}(t)$ невозмущенной задачи (14), (15) на отрезке $a \le t \le 1$ справедливы следующие оценки:

$$\left| y^{(i)}(t,\varepsilon) - \bar{y}^{(i)}(t) \right| \le K\varepsilon, i = \overline{0, n-3},$$

$$\left| y^{(n-2)}(t,\varepsilon) - \bar{y}^{(n-2)}(t) \right| \le K\varepsilon + K \exp\left(-\gamma \frac{t-a}{\varepsilon} \right),$$

$$\left| y^{(n-1)}(t,\varepsilon) - \bar{y}^{(n-1)}(t) \right| \le K\varepsilon + \frac{K}{\varepsilon} \exp\left(-\gamma \frac{t-a}{\varepsilon} \right),$$

где $K > 0, \gamma > 0-$некоторые постоянные, не зависящие от ε.

Из теоремы 3 получаем, что для решения $y(t,\varepsilon)$ интегро-дифференциальной задачи (3), (2) имеет место предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y^{(i)}(t,\varepsilon) = \begin{cases} \bar{y}^{(i)}(t), & i = \overline{0, n-3}, \quad a \le t \le 1, \\ \bar{y}^{(i)}(t), & i = n-2, n-1, \quad a < t \le 1. \end{cases}$$

Полученные результаты позволяют построить с любой степенью точности по малому параметру асимптотические разложения решений не только линейных, но и нелинейных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Касымов К.А., Дауылбаев М.К. Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. Москва – Минск, 1999. – Т. 35, № 6. – С. 822 – 830.
2. Касымов К.А., Дауылбаев М.К. Сингулярно возмущенные линейные интегро-дифференциальные уравнения с начальными скачками любого порядка // Известия вузов. Математика. - Казань, 2003.- № 7(494).- С. 70-74.
3. Дауылбаев М.К., Касымов К.А. Задача Коши с начальными скачками для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений / Ред. Сиб.мат.журн. Сиб.отд. РАН - Новосибирск, 2003.- 20 с. (Деп.в ВИНИТИ, 13.03.2003, № 449-В 2003).
4. Дауылбаев М.К. Линейные интегро-дифференциальные уравнения с малым параметром. Алматы. Изд. Қазақ университеті. - 2009. - 190 с.