О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Н.А. Оршубеков
КазНУ имени аль-Фараби

Аннотация

В данной работе показано, что задача Трикоми для гиперболо-параболического уравнения с многомерным оператором Чаплыгина имеет бесчисленное множество нетривиальных решений

Пусть D-конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,....,x_m,t)$, ограниченная в полупространстве $t>0$ коноидами

$$K_0:|x|=\int_0^t\sqrt{g(\xi)}d\xi,\ K_1:|x|=1-\int_0^t\sqrt{g(\xi)}d\xi,\ 0\le t\le t_0,\ t_0:\frac{1}{2}=\int_0^{t_0}\sqrt{g(\xi)}d\xi,$$

а при $t<0$-цилиндрической поверхностью $\Gamma=\{(x,t):|x|=1\}$, и плоскостью $t=t_1=const$, где $|x|$-длина вектор $x=(x_1,...,x_m)$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полупространствах $t>0$ и $t<0$. Части коноидов K_0,K_1, ограничивающих области D^+, обозначим через S_0,S_1.Пусть $S=\{(x,t):t=0,0<|x|<1\},\ \Gamma_0=\{(x,t):t=0,|x|=1\}$.

В области D рассмотрим модельное смешанно гиперболо-параболическое уравнения с многомерным оператором Чаплыгина

$$0=\begin{cases} g(t)\Delta_x u-u_{tt}+\sum_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u_t+c(x,t)u,\ t>0,\\ \Delta_x u-u_t,\ t<0,\end{cases}\tag{1}$$

где $g(t)>0$ при $t>0, g(0)=0,\ g(t)\in C([0,t_0])\cap C^2((0,t_0))$, Δ_x-оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m,m\ge 2.$

Следуя ([1]) в качестве многомерного аналога задачи Трикоми рассмотрим следующую

Задача Т. Найти решение уравнения (1) в области D при $t\ne 0$, из класса $C(\overline{D}/\Gamma_0)\cap C^1(D)\cap C^2(D^+\cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{S_0}=0,\ u\big|_{\Gamma}=0.\tag{2}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r_1\theta_1,...,\theta_{m-1},\ t,\ r\ge 0,\ 0\le\theta_1<2\pi,\ 0\le\theta_i\le\pi,\ i=2,3,...,m-1.$

Пусть Ω^+-проекция области D^+ на плоскость (r,t) с границами

$$\tilde{S}_0:r=\int_0^t\sqrt{g(\xi)}d\xi,\ \tilde{S}_1:r=1-\int_0^t\sqrt{g(\xi)}d\xi,\ \tilde{S}:t=0,\ 0<r<1;$$

$\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ –система линейно независимых сферических функций порядка n $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2),\ \theta = (\theta_1,...,\theta_{m-1})$, $\ ,W_2^l(S),\ l = 0,1,...$ - пространство Соболева.

Имеет место [3]

Лемма. Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \ge m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него, дифференцированием порядка $p \le l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t),\ a_{in}^k(r,t),\ \tilde{b}_n^k(r,t),\ \tilde{c}_n^k(r,t),\ \rho_n^k,\ \bar{\tau}_n^k(r),\ \bar{\nu}_n^k(r)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций

$$a_i(r,\theta,t)\rho(\theta),\ a_i\frac{x_i}{r}\rho,\ i = 1,...,m,\ b(r,\theta,t)\rho,\ c(r,\theta,t)\rho,\ \rho(\theta),$$
$$\tau(r,\theta) = u(r,\theta,0),\ \nu(r,\theta) = u_t(r,\theta,0),$$

причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H), H$ -единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(x,t),\ b(x,t),\ c(x,t) \in W_2^l(D^+) \subset C(\bar{D}^+),\ i = 1,...,m,\ l \ge m+1$.

Тогда справедлива.

Теорема. Задача Т. Имеет бесчисленное множество нетривиальных решений

Доказательство. В сферических координатах уравнения (1) в области D^+ имеет вид

$$Lu \equiv g(t)u_{rr} + \frac{m-1}{r}g(t)u_r - \frac{g(t)}{r^2}\delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0 \tag{4}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}),\ g_1 = 1,\ g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно [3], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2),\ n = 0,1,...,$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

При $t \to -0$ на S получим функциональное соотношение между $\tau(r,\theta)$ и $\nu(r,\theta)$

$$\tau_{rr} + \frac{m-1}{r}\tau_r - \frac{1}{r^2}\delta\tau = \nu(r,\theta). \tag{5}$$

Искомое решение задачи Т в области D^+ будет искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)$-функции, подлежащие определению.

Подставим (6) в (4), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta)\neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H в E_m, для $\overline{u}_n^k$ получим ([4,5])

$$\begin{aligned}&g(t)\rho_0^1\overline{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\overline{u}_{0tt}^1+(\frac{m-1}{r}g(t)\rho_0^1+\sum_{i=1}^m a_{i0}^1)\overline{u}_{0r}^1+\tilde{b}_0^1\overline{u}_{0t}^1+\tilde{c}_0^1\overline{u}_0^1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\{g(t)\rho_n^k\overline{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\overline{u}_{ntt}^k+\\&+(\frac{m-1}{r}g(t)\rho_n^k+\sum_{i=1}^m a_{in}^k)\overline{u}_{nr}^k+\tilde{b}_n^k\overline{u}_{nt}^k+[\tilde{c}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k g(t)}{r^2}+\sum_{i=1}^m(\tilde{a}_{in-1}^k-na_n^k)\overline{u}_n^k]\}=0\end{aligned}\tag{7}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$g(t)\rho_0^1\overline{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\overline{u}_{0tt}^1+\frac{m-1}{r}g(t)\rho_0^1\overline{u}_{0r}^1=0\tag{8}$$

$$\begin{aligned}&g(t)\rho_1^k\overline{u}_{1rr}^k-\rho_1^k\overline{u}_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}t^p\rho_1^k\overline{u}_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}g(t)\rho_1^k\overline{u}_1^k=-\frac{1}{k_1}(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1\overline{u}_{0r}^1+\tilde{b}_0^1\overline{u}_{0t}^1+\tilde{c}_0^1u_0^1),\\&n=1,\ k=\overline{1,k_1},\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&g(t)\rho_n^k\overline{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\overline{u}_{ntt}^k+\frac{(m-1)}{r}g(t)\rho_n^k\overline{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}g(t)\rho_n^k\overline{u}_n^k=-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\{\sum_{i=1}^m a_{in-1}^k\overline{u}_{n-1r}^k+\tilde{b}_{n-1}^k\overline{u}_{n-1t}^k+\\&+[\tilde{c}_{n-1}^k+\sum_{i=1}^m(\tilde{a}_{in-2}^k-(n-1)a_{in-1}^k)\overline{u}_{n-1}^k\},\ k=\overline{1,k_n},\ \ n=2,3,...\end{aligned}\tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что если $\{\overline{u}_n^k\},\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...$-решение системы (8)-(10), то оно является и решением уравнения (7)

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)-(10) можно представить в виде

$$g(t)\overline{u}_{nrr}^k-\overline{u}_{ntt}^k+\frac{(m-1)}{r}g(t)\overline{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}g(t)\overline{u}_n^k=f_n^k(r,t),\tag{11}$$

где $f_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r,t)\equiv 0$.

Далее, учитывая ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([3]), из (5) и из первого условия краевого условия (2) в силу (6) будем иметь

$$\overline{\tau}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\overline{\tau}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\overline{\tau}_n^k=\overline{\nu}_n^k(r),\ 0<r<1,\tag{12}$$

$$\overline{u}_n^k(r,t)\Big|_{\tilde{S}_0}=0,\ \ k=\overline{1,k_n},\ \ n=0,1,...\tag{13}$$

В (11), (12) произведя, замену переменных $\overline{u}_n^k(r,t)=r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)$ и положив, затем

$$r = r, y = \left(\frac{3}{2}\int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi\right)^{2/3},$$

соответственно получим

$$yu^k_{nrr} - u^k_{nyy} + \frac{\bar{\lambda}_n y}{r^2}u^k_n - b(y)u^k_{ny} = \bar{f}^k_n(r,y), \tag{14}$$

$$\tau^k_{nrr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\tau^k_n = \nu^k_n(r),\ 0 < r < 1, \tag{15}$$

$$\bar{\lambda}_n = ((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)/4,\ b(y) = \frac{1}{2g}\left[\frac{dg}{dy} - \frac{g}{y}\right],\ \bar{f}^k_n(r,y) = r^{(m-1)/2}\frac{f^k_n(r,t)}{y},$$

$$\tau^k_n(r) = r^{(1-m)/2}\bar{\tau}^k_n(r),\quad \nu^k_n(r) = r^{(1-m)/2}\bar{\nu}^k_n(r),\quad k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,...$$

Пологая $u^k_n = \omega^k_n \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^y b(\xi)d\xi\right]$б уравнение (14) приводим к виду

$$y\omega^k_{nrr} - \omega^k_{nyy} + \frac{\bar{\lambda}_n y}{r^2}\omega^k_n = c(y)\omega^k_n + \tilde{f}^k_n(r,y), \tag{16}$$

$$c(y) = -\frac{1}{4y}(b^2 + 2b'_y) \in C(y > 0),\qquad \tilde{f}^k_n(r,y) = \bar{f}^k_n(r,y)\exp[\frac{1}{2}\int_0^y b(\xi)d\xi].$$

Уравнение (16), в свою очередь, с помощью замены переменных $r = r, x_0 = \frac{2}{3}y^{3/2}$ переходит в уравнение

$$\omega^k_{nrr} - \omega^k_{nx_0x_0} - \frac{1}{3x_0}\omega^k_{nx_0} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\omega^k_n = g^k_n(r,x_0), \tag{17}$$

$$g(r,x_0) = (\frac{3x_0}{2})^{-2/3}\{\bar{f}^k_n[r,(\frac{3x_0}{2})^{\frac{2}{3}}] + c\left[(\frac{3x_0}{2})^{2/3}\right]\omega^k_n\left[r,(\frac{3x_0}{2})^{2/3}\right]\}.$$

При этом краевое условие (13) примет вид

$$\omega^k_n(r,r) = 0,\ 0 \le r \le \frac{1}{2},\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,.... \tag{13}$$

Наряду с уравнением (17) рассмотрим уравнения

$$L_\alpha \omega^k_{\alpha,n} \equiv \omega^k_{\alpha,nrr} - \omega^k_{\alpha,nx_0x_0} - \frac{\alpha}{x_0}\omega^k_{\alpha,nx_0} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\omega^k_{\alpha,n} = g^k_{\alpha,n}(r,x_0), \tag{19_α}$$

$$L_0 \omega^k_{0,n} \equiv \omega^k_{0,nrr} - \omega^k_{0,nx_0x_0} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\omega^k_{0,n} = g^k_{0,n}(r,x_0), \tag{19_0}$$

$$g^k_{\alpha,n}(r,x_0) = \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha}\left\{\tilde{f}^k_n[r,(\frac{x_0}{1-\alpha})^{1-\alpha}] + c\left[\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]\omega^k_{\alpha,n}\left[r,\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]\right\},$$

$$g^k_{0,n}(r,x_0) = \tilde{f}^k_n(r,x_0) + c(x_0)\omega^k_{0,n}(r,x_0), \quad 0 < \alpha = const < 1.$$

Отметим, что уравнение (17) совпадает с уравнением (19_α) при $\alpha = \frac{1}{3}$.

Как показано в [4,5] существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (19_α) и (19_0).

Утверждение 1. Если $\omega^{k,1}_{0,n}(r,x_0)$ решение задачи Коши для уравнения (19_0), удовлетворяющее условию

$$\omega^{k,1}_{0,n}(r,0) = \tau^k_n(r), \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\omega^{k,1}_{0,n}(r,0) = 0, \tag{15}$$

то функция

$$\omega^{k,1}_{\alpha,n}(r,x_0) = \gamma_\alpha \int_0^1 \omega^{k,1}_{0,n}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\xi \equiv \frac{\gamma_\alpha}{2}\Gamma(\frac{\alpha}{2}) D^{-\frac{\alpha}{2}}_{0x_0^2}\left[\frac{\omega^k_{0,n}(r,x_0)}{x_0^2}\right]. \tag{16}$$

при $\alpha > 0$ является решением уравнения (19_α) с условием (20).

Утверждение 2 . Если $u^{k,1}_{0,n}(r,x_0)$-решение задачи Коши для уравнения (19_0), удовлетворяющее условию

$$\omega^{k,n}_{0,n}(r,0) = \frac{\nu^k_n(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)}, \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\omega^{k,1}_{0,n}(r,0) = 0,$$

то при $0 < \alpha < 1$ функция

$$\begin{aligned}\omega^{k,2}_{\alpha,n}(r,x_0) &= \gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q \left[x_0^{1-\alpha+2q}\int_0^1 \omega^{k,1}_{0,n}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}} d\xi\right] \equiv \\ &\equiv \gamma_{2-k+2q} 2^{q-1}\Gamma(q-\frac{\alpha}{2}+1) D^{\frac{\alpha}{2}-1}_{0x_0^2}\left[\frac{\omega^{k,1}_{0,n}(r,x_0)}{x_0}\right]\end{aligned} \tag{22}$$

является решением уравнения (19_α) с начальными данными

$$\omega^{k,2}_{\alpha,n}(r,0) = 0, \lim_{x_0\to 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0}\omega^{k,2}_{\alpha,n} = \nu^k_n(r),$$

где $\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\gamma_\alpha = 2\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})$, $\Gamma(z)$-гамма-функция, D^α_{0t}-оператор Римана-Лиувилля ([6]), а $q \geq 0$-наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2-\alpha+2q \geq m-1$.

При этом функция $g^k_{\alpha,n}(r,x_0)$, $g^k_{0,n}(r,x_0)$ связаны формулами (21) в случае утверждения 1 и формулами (22) в случае утверждения 2.

Теперь рассмотрим задачу (19_α),(18) для которого имеет место соотношение (15). Ее решение будем искать в виде $\omega^k_{\alpha,n}(r,x_0) = \omega^{k,1}_{\alpha,n} + \omega^{k,2}_{\alpha,n}$, где $\omega^{k,1}_{\alpha,n}(r,x_0)$-решение ($19_\alpha$) с данными

$$\omega^{k,1}_{\alpha,nx_0}(r,0) = 0, \; 0 < r < 1, \; \omega^{k,1}_{\alpha,n}(r,r) = 0, \; 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \; k = \overline{1,k_n}, \; n = 0,1,... , \tag{23}$$

а $\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ решение краевой задачи для уравнения

$$L_\alpha \omega_{\alpha,n}^{k,2} = 0 \tag{24_α}$$

с условием

$$\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0, \quad 0 \le r \le 1, \quad \omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,r) = 0, \; 0 \le r \le \frac{1}{2}, \; k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,... \tag{25}$$

Учитывая формулы (21), (22), а также обратимость оператора D_{0t}^{α} ([6]), задачи (19_α),(23) и (24_α), (25), соответственно сводим к задаче для (19_0) с условием

$$\omega_{0,nx_0}^{k,1}(r,0) = 0, \;\; 0 < r < 1, \; \omega_{0,n}^{k,1}(r,r) = 0, \; 0 \le r \le \frac{1}{2}, \; k = \overline{1,k_n}, \;\; n = 0,1,... \tag{26}$$

И к задаче для (24_0) с данными (26), при этом $\omega_{0,n}^{k,1}(r,0) = \tau_n^k(r)$ в случая задачи (19_α),(23) и $\omega_{0,n}^{k,n}(r,0) = \dfrac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)}$ в случае задачи (24_α),(25).

В [5,7] доказано, что задача (19_0),(26) сводится к интегральному уравнению Вольтера второго рода

$$\begin{aligned} \omega_{0,n}^{k,1}(r,x_0) = \int\limits_{1/2}^{(r+x_0)/2}\int\limits_{0}^{(r-x_0)/2} c(\xi_1-\eta_1)\omega_{0,n}^{k}(\xi_1,\eta_1)P_\lambda(z)d\xi_1 d\eta_1 + p_n^k(r,x_0) + \\ + \int\limits_{1/2}^{(r+x_0)/2}\int\limits_{0}^{(r-x_0)/2} \tilde{f}_n^k(\xi_1+\eta_1,\xi_1-\eta_1)P_\lambda(z)d\xi_1 d\eta_1 + p_n^k(r,x_0), \end{aligned} \tag{27}$$

$$p_n^k(r,x_0) = \frac{1}{2}\left[(\frac{r+x_0}{2})^{\beta} + (\frac{r-x_0}{2})^{\beta}\right] - \frac{x_0}{2r}\int\limits_{(r-x_0)/2}^{(r+x_0)/2} \xi_1^{\beta-1}P_\lambda^{'}\left(\frac{r^2-x_0^2+4\xi_1^2}{4r\xi_1}\right)d\xi_1,$$

$$z = \frac{2x_0(\xi_1-\eta_1)-4\xi_1\eta_1+r^2-x_0^2}{2r(\xi_1-\eta_1)}, P_\lambda(z) \text{-функция Лежандра,}$$
$$\lambda = n+(m-3)/2, \quad \beta = \lambda - 2s > 1, \quad s = 0,1,...,$$

а в [4] показано, что задача (24_0),(26) имеет нетривиальное решение

$$\omega_{0,n}^{k,1}(r,x_0) = p_n^k(r,x_0). \tag{28}$$

Известно, что уравнения вида (27) обратимо [8]. Это, означает, что задача (19_0),(26) имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Далее, используя утверждение 1 и 2, устанавливаются, что задачи (19_α),(23) и (24_α),(25) (также (19_α),(18)) имеют ненулевые решения, при этом учитывая соотношения (15) и (27),(28) будем иметь

$$\tau_n^k(r) = \xi^\beta, \nu_n^k(r) = c_1 \cdot r^{\beta-2},$$
$$c_1(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha) = \beta(\beta-1) + \bar{\lambda}_n, \quad s = 1,2,... .$$

Следовательно, сначала решив задачу (8),(13)(n=0), а затем (9),(13)(n=1) и т.д. найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r,t),\ \ k=\overline{1,k_n},\ \ n=0,1,\ldots$.

Итак, в области D^+, показано, что

$$\int_H \rho(\theta) Lu dH = 0 \tag{29}$$

Пусть $f(r,\theta,t)=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$-плотна в $L_2((\int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi, 1-\int_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi))$, $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$-плотна в $L_2(H)$, а $T(t)\in V_1$-плотна в $L_2((0,t_0))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in V,\ V=V_0\otimes H\otimes V_1$-плотна в $L_2(D^+)$([9]).

Отсюда и из (29), следует, что

$$\int_{D^+} f(r,\theta,t) Lu dD^+ = 0 \qquad \text{и} \qquad Lu=0,\ \forall (r,\theta,t)\in D^+.$$

Из оценок ([10])

$$k_n \le c_2 n^{m-2},\quad \left|\frac{\partial^p}{\partial\theta_j^p} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \le c_2\cdot n^{\frac{m}{2}+p-1},\quad c_2=const,$$
$$j=\overline{1,m-1},\quad p=0,1,\ldots$$

-нетрудно показать, что ряд

$$\tau(r,\theta)=r^{\beta+(1-m)/2}Y_{0,m}^1(\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{\beta+(1-m)/2} Y_{n,m}^k(\theta) \tag{30}$$

сходятся абсолютно и равномерно, если $l>\frac{3m}{2},\ \ \beta>(m-1)/2.$ Таким образом, функция

$$u(r,\theta,t)=r^{(1-m)/2}u_0^1(r,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{(1-m)/2} u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta) \tag{31}$$

является решением задачи (4),(2),(30) в области D^+, где функций $u_n^k(r,t)$ определяется из двумерных задач и принадлежит классу $C(\overline{D}^+)\cap C^1(D^+\cup S)\cap C^2(D^+)$.

Следовательно, мы пришли в области D^- к первой краевой задаче для уравнения

$$\Delta_x u - u_t = 0 \tag{32}$$

с условиями

$$u|_s=\tau(r,\theta),\quad u|_\Gamma=0 \tag{33}$$

Решение задачи (32), (33) будем искать в виде (6). Подставляя (6) в (32) будем иметь

$$u_{nrr}^k - u_{nt}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} u_n^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, n = 1,2,..., \tag{34}$$

при этом краевое условие (33) запишется в виде

$$u_n^k(r,0) = n^{-l} r^{\beta}, \; u_n^k(1,t) = 0, \;\; k = \overline{1, k_n}, \; n = 1,2,... \tag{35}$$

Решение задачи (34),(35) будет искать в виде

$$u_n^k(r,t) = R_n^k(r) T_n^k(t). \tag{36}$$

Подставляя (36) в (34) с учетом (35) получим

$$R_{nrr}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} R_n^k + \mu R_n^k = 0, \;\; 0 < r < 1, \tag{37}$$

$$R_n^k(0) = 0, \;\; R_n^k(1) = 0, \tag{38}$$

$$T_{nt}^k + \mu T_n^k = 0. \tag{39}$$

Ограниченным решением задачи (37),(38) является функция ([11])

$$R_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} a_s J_\nu(\mu_s^\nu r), \; 0 < r < 1, \tag{40}$$

$\nu = n + (m-2)/2$, $J_\nu(z)$-функция Бесселя, μ_s^ν-ее нули, $\mu = (\mu_s^\nu)^2$, а решением уравнения (35) является

$$T_{n,s}^k(t) = \exp(-(\mu_s^\nu)^2 t). \tag{41}$$

Далее из (36) ,(40), с учетом (35) имеем

$$n^{-l} r^{\beta - \frac{1}{2}} = \sum_{s=1}^{\infty} a_s J_\nu(\mu_s^\nu r), \quad 0 < r < 1. \tag{42}$$

Разлагая функцию $r^{\beta - \frac{1}{2}}$ в ряд Фурье-Бесселя ([12]) из (42) найдем коэффициенты a_s

$$a_s = \frac{2n^{-l}}{\left[J_{\nu+1}(\mu_s^\nu)\right]^2} \int_0^1 \xi^{\beta + \frac{1}{2}} J_\nu(\mu_s^\nu \xi) d\xi, \tag{43}$$

при этом μ_s^ν –положительные нули функции Бесселя, расположенные в порядке возрастания.

Таким образом, из (36),(40),(41) следует, что решением задачи (32),(33) в области D^- является функция

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{s=1}^{\infty}a_s r^{(2-m)/2}J_\nu(\mu_s^\nu r)\exp(-(\mu_s^\nu)^2 t)Y_{n,m}^k(\theta), \quad (44)$$

и принадлежит классу $C(\overline{D}^-/\Gamma_0)\cap C^1(D^-\cup S)\cap C^2(D^-)$, где a_s определяется из (43).

Следовательно, задача Т ***бесчисленное*** множество нетривиальных решений вида (31) и (44).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных, М.: Наука, 2006-287с.
2. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, Новосибирск: НГУ, 1983-84с.
3. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М.: Физматгиз, 1962-254с.
4. Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений, Алматы: Гылым, 1990-170с.
5. Алдашев С.А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения, Орал: ЗКАТУ, 2007-139с.
6. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии, М.: Высшая школа, 1985-301с.
7. Алдашев С.А.\\Укр.матем.журнал,2003, т.55, №1-с.100-107
8. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа, М.: Изд-во АН СССР, 1959-164с.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.:Наука,1976-543с.
10. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функций, т.1, М.: Наука, 1973-294с.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: Наука, 1965-703с.
12. Бейтмен Г.,Эрдейн А.Высшая трансцендентные функций, т.2,М.:Наука,1974-295с.