

К СИНТЕЗУ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ С ВНУТРЕННИМИ СВЯЗЯМИ ТИПА ВВ

Ю.М. Дракунов

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: drakunov50@mail.ru

При синтезе механизмов приходится решать три основные задачи - воспроизведение заданных передаточных функций, воспроизведение заданных траекторий движения точек и воспроизведение заданных движений твёрдого тела. Для случая большого числа заданных положений механизма N целесообразно при кинематическом синтезе применять методы приближения функций. Пусть на неподвижной плоскости XOY задано движения двух подвижных плоскостей $x_{A_i}y$ и $u_{D_i}v$, связанных с движением входного и выходного звеньев, т.е. заданы координаты и углы поворота для $i=1,2,\dots,N$ положений подвижных плоскостей как функции времени t_i

$$X_{A_i} = X_{A_i}(t_i), \quad Y_{A_i} = Y_{A_i}(t_i), \quad \varphi_i = \varphi_i(t_i), \quad X_{D_i} = X_{D_i}(t_i), \quad Y_{D_i} = Y_{D_i}(t_i), \quad \psi_i = \psi_i(t_i).$$

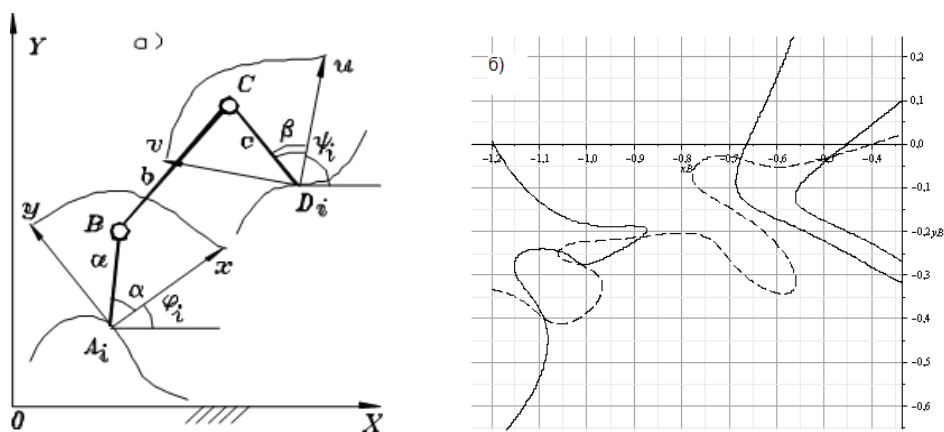


Рис. 1 К синтезу механизмов и решению системы двух уравнений

Для того чтобы получить механизм, нужно на движение плоскостей наложить связи. Для случая связи типа ВВ (вращательная, вращательная) на рис. 1 а) - это звено BC , определению подлежат длины звеньев a, b, c и углы α и β или x_B, y_B, b, u_C, v_C , т.е. пять искомых параметров. Расстояние между точками B_i и C_i должно быть неизменным, поэтому для целевой функции запишем выражение взвешенной разности (отклонения)

$$\Delta_i = (X_{B_i} - X_{C_i})^2 + (Y_{B_i} - Y_{C_i})^2 - b^2 \quad (1)$$

Применяя преобразование координат

$$\begin{cases} X_{B_i} = X_{A_i} + x_B \cos \varphi_i - y_B \sin \varphi_i \\ Y_{B_i} = Y_{A_i} + x_B \sin \varphi_i + y_B \cos \varphi_i \end{cases} \quad \begin{cases} X_{C_i} = X_{D_i} + u_C \cos \psi_i - v_C \sin \psi_i \\ Y_{C_i} = Y_{D_i} + u_C \sin \psi_i + v_C \cos \psi_i \end{cases}, \quad (2)$$

и подставляя (2) в (1), получим выражение для Δ_i , которое зависит от 5 искомым параметров x_B, y_B, b, u_C, v_C . Это выражение представляет собой довольно громоздкий вид и по этим причинам здесь не приводится.

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_i^2 \quad (3)$$

Необходимыми условиями минимума суммы являются равенства нулю частных производных по искомым параметрам

$$\frac{\partial S}{\partial P} = 0, \quad P = x_B, y_B, b, u_C, v_C \quad (4)$$

Задача является нелинейной и может быть сведена к задаче минимизации или решению системы 5 достаточно громоздких уравнений.

Сумму (3) можно представить в виде функции, зависящей от двух параметров, например от x_B и y_B . В случае обращенного движения, полагая $\theta_i = \varphi_i - \psi_i$, $X_{O_i} = X_{A_i} - X_{D_i}$ и $Y_{O_i} = Y_{A_i} - Y_{D_i}$, получаем задачу об определении круговых точек. Три искомым параметра можно выразить через остальные

$$u_C = \frac{D_U}{D}, \quad v_C = \frac{D_V}{D}, \quad h = \frac{D_H}{D}, \quad (5)$$

где введены следующие определители

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_4 & A_5 \\ A_3 & A_5 & N \end{vmatrix}, \quad D_U = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} B_1 & A_2 & A_3 \\ B_2 & A_4 & A_5 \\ B_3 & A_5 & N \end{vmatrix}, \quad D_V = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & A_3 \\ A_2 & B_2 & A_5 \\ A_3 & B_3 & N \end{vmatrix}, \quad D_H = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & B_1 \\ A_2 & A_4 & B_2 \\ A_3 & A_5 & B_3 \end{vmatrix} \quad (6)$$

Величина параметра b находится из следующего выражения

$$b = \sqrt{u_C^2 + v_C^2 + 2h}$$

Целевую функцию S после некоторых преобразований можно представить в виде

$$S = \frac{W}{D} = S(x_B, y_B) \quad (7)$$

Здесь W расширенный определитель следующего вида

$$W = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & B_1 \\ A_2 & A_4 & A_5 & B_2 \\ A_3 & A_5 & N & B_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix} \quad (8)$$

В вышеприведенных формулах элементы определителей имеют вид

$$A_1 = \sum_{i=1}^N X_i^2, \quad A_2 = \sum_{i=1}^N X_i Y_i, \quad A_3 = \sum_{i=1}^N X_i, \quad A_4 = \sum_{i=1}^N Y_i^2, \quad A_5 = \sum_{i=1}^N Y_i \quad (9)$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^N R_i^2 X_i, \quad B_2 = \sum_{i=1}^N R_i^2 Y_i, \quad B_3 = \sum_{i=1}^N R_i^2, \quad B_4 = \sum_{i=1}^N R_i^4 \quad (10)$$

В формулах (9) и (10) для простоты введены обозначения

$$\begin{aligned} X_i &= X_{O_i} + x_B \cos \theta_i - y_B \sin \theta_i \\ Y_i &= Y_{O_i} + x_B \sin \theta_i + y_B \cos \theta_i \\ R_i^2 &= X_i^2 + Y_i^2 \end{aligned} \quad (11)$$

После подстановки (11) в (9) и (10) были получены для элементов определителя следующие выражения, которые зависят только от x_B и y_B .

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}(C_1 + N)Z + 2C_2 x_B - C_5 x_B y_B - C_1 y_B^2 - 2C_3 y_B + C_4 \\ A_2 &= \frac{1}{2}C_5 Z + (C_3 + C_6)x_B + C_1 x_B y_B - C_5 y_B^2 + (C_2 - C_8)y_B + C_7 \\ A_3 &= C_9 x_B - C_{11} y_B + C_{10}, \quad A_5 = C_{11} x_B + C_9 y_B + C_{13} \\ A_4 &= \frac{1}{2}(-C_1 + N)Z + 2C_8 x_B + C_5 x_B y_B + C_1 y_B^2 + 2C_6 y_B + C_{12} \\ B_1 &= (C_9 x_B - C_{11} y_B + 2C_{16} + C_{10})Z + (2C_{17} + C_{22})x_B + 2(C_{15} - C_{14})x_B y_B - \\ &\quad - 2(C_{16} + C_{20})y_B^2 + (2C_{19} - C_{18})y_B + C_{21} \\ B_2 &= (C_{11} x_B + C_9 y_B + 2C_{14} + C_{13})Z + (2C_{24} + C_{18})x_B + 2(C_{20} + C_{16})x_B y_B + \\ &\quad + 2(C_{15} - C_{14})y_B^2 + (2C_{23} + C_{22})y_B + C_{25} \\ B_3 &= NZ + 2C_{27} x_B + 2C_{28} y_B + C_{26} \\ B_4 &= NZ^2 + 2(2C_{27} x_B + 2C_{28} y_B + 2C_{33} + C_{26})Z + 4C_{32} x_B + 8C_{34} x_B y_B + \\ &\quad + 4(C_{30} - C_{33})y_B^2 + 4C_{31} y_B + C_{29} \end{aligned} \quad (9')$$

$$(10')$$

В этих формулах $C_j, j=1..34$ известные коэффициенты, представляющие собой всевозможные суммы. Вычисление этих сумм полностью автоматизировано.

Стационарные точки можно получить после дифференцирования (7) по двум параметрам

$$\frac{\partial S(x_B, y_B)}{\partial x_B} = 0, \quad \frac{\partial S(x_B, y_B)}{\partial y_B} = 0 \quad (12)$$

В интегрированной среде Maple 12 разработана программа аналитического получения системы двух окончательных уравнений 9 степени следующего вида

$$F_j(x_B, y_B) = A_1^{(j)} Z^4 + A_2^{(j)} Z^3 + A_4^{(j)} Z^2 + A_5^{(j)} Z + A_6^{(j)} = 0, \quad j=1,2 \quad (13)$$

здесь $Z = x_B^2 + y_B^2$, $A_k^{(j)}$ - полиномы k -го порядка относительно x_B и y_B .

Полиномы $A_k^{(j)}$ здесь не приводятся в силу их громоздкости.

Таким образом, имеем $9 \times 9 = 81$ общих точек этих кривых из которых максимум 25 точек являются вещественными. Разработанный алгоритм позволяет применить эту методику для проектирования простых и сложных плоских рычажных механизмов.

Пример 1. Спроектировать четырехзвенный перемещающий механизм, приближенно воспроизводящий 10 положений шатунной плоскости. На рис. 1 б) для этого конкретного примера, взятого из монографии [1] (стр. 101), показаны функции $F_1(x_B, y_B) = 0$ и $F_2(x_B, y_B) = 0$. Как мы видим, что кривые пересекаются в 5 точках, и таким образом мы можем спроектировать десять различных схем механизмов. На рисунке 2 изображены 10 положений плоскости и показано решение задачи синтеза по определению круговых квадратических точек, а так же построена одна круговая точка и точка, лежащая близко к прямой. На рисунке 3 показан график, отображающий точность решения данной задачи синтеза, т.е. зависимость отклонения Δ_i от номера точки. На рисунке 4 слева показан вид целевой функции S применительно так же к задаче рассмотренной Ю.Л. Саркисяном.

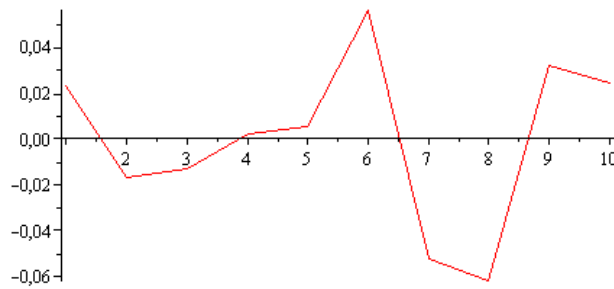
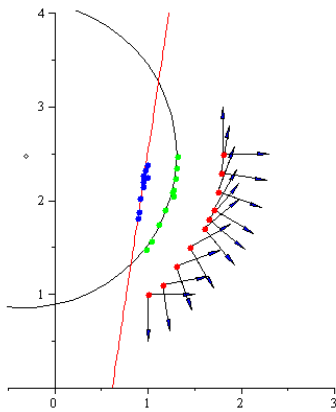


Рис. 2 Круговая и прямолинейная точки

Рис. 3 Отклонение Δ_i от точного решения

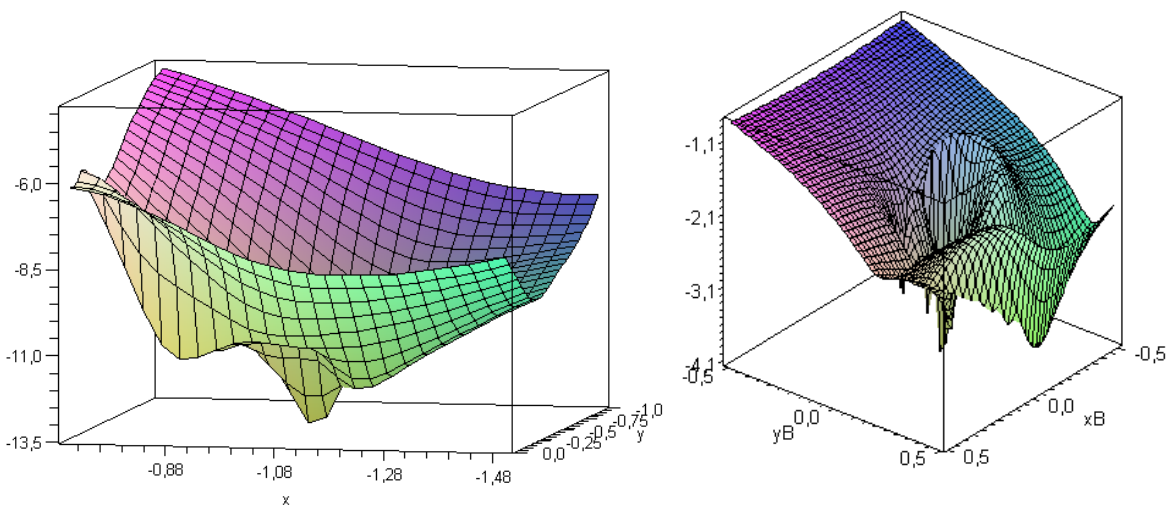


Рис. 4 Целевые функции в логарифмическом масштабе

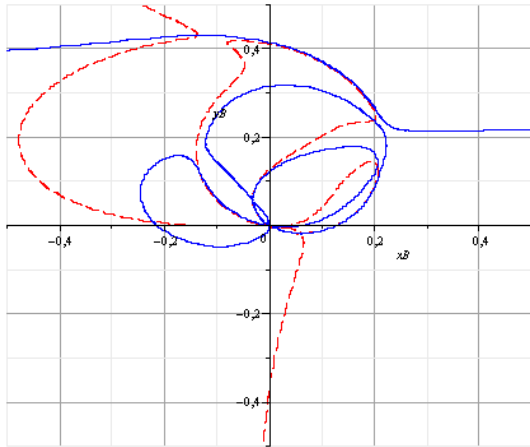


Рис. 6 К решению системы двух уравнений

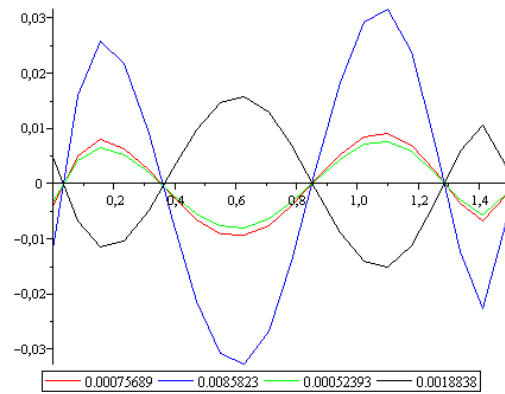


Рис. 7 Отклонение Δ_i

Пример 2. Спроектировать кинематическую цепь, обеспечивающую заданное движение двух плоскостей. Закон движения этих плоскостей задавался в функциональном виде.

$$\begin{aligned} \varphi_i &= (i-1)\Delta\varphi, \quad \psi_i = \psi_{\max} \cos \varphi_i, \quad i = 1..N \\ X_{Ai} &= 0.5 + (i-1)\Delta\varphi, \quad Y_{Ai} = \sin \varphi_i \\ Y_{Di} &= -0.5 + (i-1)\Delta\varphi, \quad X_{Di} = -0.5 + \sin \varphi_i \end{aligned}$$

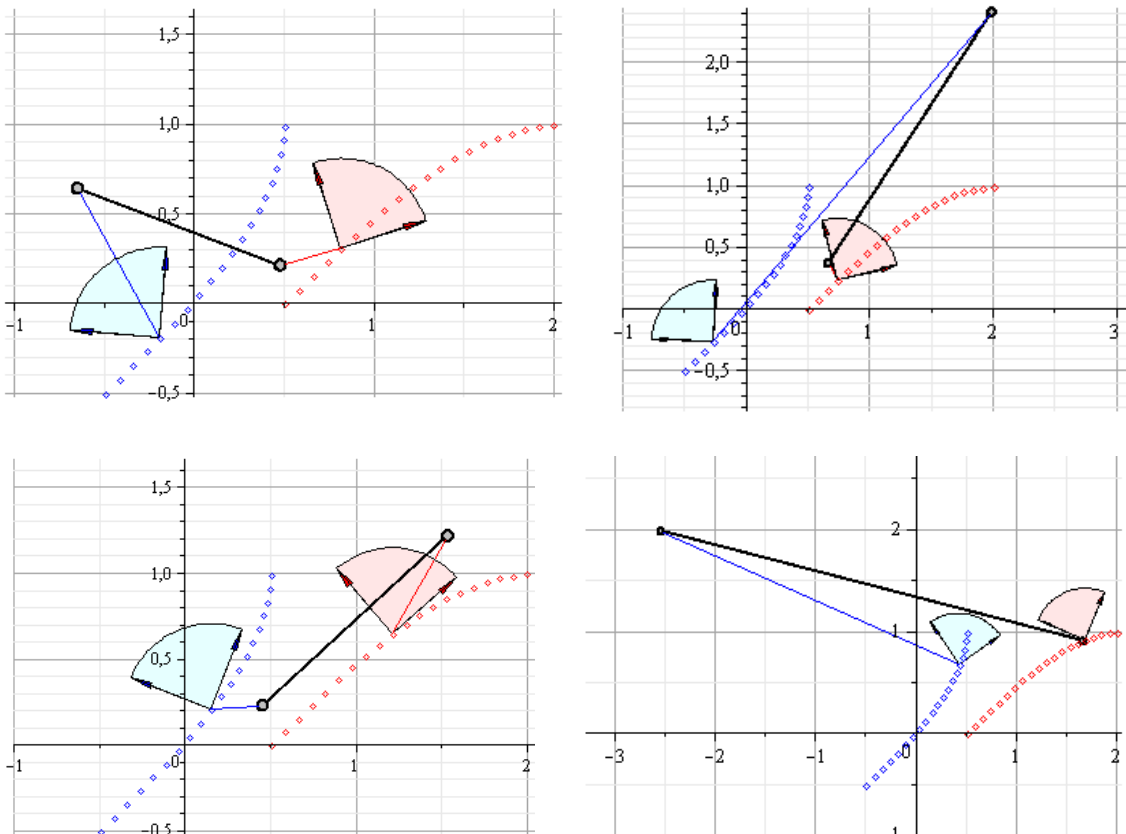


Рис. 8 Различные варианты решения задачи синтеза по заданному движению двух плоскостей

На рисунке 4 справа изображена в логарифмическом масштабе целевая функция S для данной задачи. Как мы видим, данная функция имеет достаточно сложную структуру и использование методов поиска минимумов этой функции представляет собой большую проблему. Для 20 положений двух подвижных плоскостей xA_iy и uD_iv ($N = 20$) и $\varphi_{\max} = 90^\circ$, $\psi_{\max} = 90^\circ$, $\Delta\varphi = \varphi_{\max} / N$ найдены 9 стационарных точек (рис. 6). Поиск корней проводился в системе Maple с помощью функции `fsolve`. Эта функция не всегда находит все корни уравнений (13). Поэтому имеется возможность диалогового режима поиска решений системы двух уравнений. Для этого используются визуальные средства программирования системы аналитических вычислений Maple 12. На графике функций с помощью курсора указывается точка пересечения графиков и эта точка принимается в качестве начального приближения для функции `fsolve`. С помощью перебора всех точек пересечения можно построить все решения задачи синтеза кинематической цепи типа ВВ. На рисунке 7 показаны характерные графики приближения полученного движения к заданному. На рисунке 8 приведены 4 наиболее характерные схемы из 9, которые воспроизводят заданные движения двух плоскостей. В системе Maple построена анимационная картина согласованного движения входного и выходного звеньев, связанных с этими плоскостями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян Ю.Л. Аппроксимационный синтез механизмов.- М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982.- 304с.
2. Дракунов Ю.М. Синтез пространственных рычажных механизмов на основе движения двух тел. - Материалы международной конференции «Состояние и перспективы развития механики и машиностроения в Казахстане», Алматы, 2007, т.2, с.113-121.
3. Дракунов Ю.М. К синтезу плоских направляющих механизмов.- Вестник НИА РК, 2008, №1, с.57-62.