Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка для задачи Ионкина - Самарского

Б.Е. Кангужин, К.Д. Абдибекова
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы
Kanbalta@mail.ru, ak_nur@mail.ru

Аннотация

Исследуются спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов на примере решения задачи Ионкина-Самарского.

Пусть $b < \infty$. В гильбертовом пространстве $L_2[0,b]$ рассмотрим дифференциальный оператор C, который представляет сдвинутое двукратное дифференцирование

$$Cy = -y''(x) + \frac{1}{4}y(x), \tag{1}$$

с условиями Ионкина-Самарского

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = y'(2\pi).$$

Впервые задача (1), (2) детально исследовалась в работе [1].

Покажем, что краевые условия оператора C можно записать в виде

$$\begin{aligned} D(C) = \Bigg\{ y(x) \in W_2^2[0,b] :\ y(0) = \int\limits_0^b \left(-y''(x) + \frac{1}{4}y(x)\right)\sigma_1(x)dx, y'(0) = \\ = \int\limits_0^b \left(-y''(x) + \frac{1}{4}y(x)\right)\sigma_2(x)dx \Bigg\} \end{aligned} \tag{2}$$

при соответствующем выборе $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ из пространства $L_2[0,2\pi]$.

Учитывая краевые условия задачи Ионкина-Самарского, находим, что $\sigma_1(x) = 0$.

При выборе функции $\sigma_2(x)$ рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{2\pi} \left(-y''(x) + \frac{1}{4}y(x)\right)\overline{\sigma_2(x)}dx = -y'(2\pi)\overline{\sigma_2(2\pi)} + y'(0)\overline{\sigma_2(0)} + \\ + y(2\pi)\overline{\sigma_2'(2\pi)} - y(0)\overline{\sigma_2'(0)} + \int\limits_0^{2\pi} y(x)\left(-\sigma_2''(x) + \tfrac{1}{4}\sigma_2(x)\right)dx \end{aligned}$$

и выберем функцию $\sigma_2(x)$, как удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$-\sigma_2''(x) + \frac{1}{4}\sigma_2(x) = 0, \qquad 0 < x < 2\pi,$$

а также краевым условиям

$$\begin{cases} \sigma_2'(2\pi) = 0, \\ \sigma_2(0) - \sigma_2(2\pi) = 1, \end{cases}$$

то есть $\sigma_2(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{2}x} + e^{2\pi - \frac{1}{2}x}}{(1-e^{\pi})^2}$.

Тогда разность

$$U_2(y) = y'(0) - \int\limits_0^{2\pi} \left(-y''(x) + \frac{1}{4}y(x)\right)\overline{\sigma_2(x)}$$

примет вид

$$U_2(y) = y'(0) - (-y'(2\pi)\overline{\sigma_2(2\pi)} + \overline{\sigma_2(2\pi)}y'(0) + y'(0)) = \overline{\sigma_2(2\pi)}(y'(2\pi) - y'(0)).$$

Поэтому второе краевое условие из (2) можно записать в виде

$$\overline{\sigma_2(2\pi)}(y'(2\pi) - y'(0)) = 0.$$

Утверждение 1. *При всех $\lambda \in \rho(C)$ справедливо представление*

$$(C{-}\lambda I)^{-1}f(x) = (K-\lambda I)^{-1}f(x) + \sum_{j=1}^{2} C(C-\lambda I)^{-1}\varphi_j < f_i \cdot K^*(K^* - \overline{\lambda I})^{-1}\sigma_j >, \quad (3)$$

для всех f из $L_2[0,b]$, где $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ - фундаментальная система решений уравнения $-y''(x) + \frac{1}{4}y(x) = 0$ с условиями $\varphi_j^{(i-1)}(0) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Здесь δ_{ij}- символ Кронекера. Также отметим, что $\langle .,. \rangle$ означает скалярное произведение в $L_2[0,b]$. Оператор K соответствует задаче Коши с нулевыми условиями в нуле.

Поскольку $(K-\lambda I)^{-1}$ — целая операторная функция от λ, то выражения $\left\langle f;\ K^*(K^* - \overline{\lambda I})^{-1}\sigma_j \right\rangle$ также представляют целые функции от λ. Известно, что полюса резольвенты $(C-\lambda I)^{-1}$ представляют собственные значения оператора C. Тогда из формулы (4) вытекает, что собственные значения находятся как полюса мероморфных функций $\psi_j(x,\lambda) = \varphi_j(x) + \lambda(C-\lambda I)^{-1}\varphi_j(x)$, $j = 1, 2$. Нетрудно понять, что

$$\begin{aligned} C_{\max}\psi_j(x,\lambda) &= C_{\max}\varphi_j(x) + \lambda C(C-\lambda I)^{-1}\varphi_j(x) = \\ &= \lambda\big[(C-\lambda I)(C-\lambda I)^{-1}\varphi_j + \lambda(C-\lambda I)^{-1}\varphi_j\big] = \\ &= \lambda\big[\varphi_j + \lambda(C-\lambda I)^{-1}\varphi_j\big] = \lambda\psi_j(x,\lambda), \quad 0 < x < b. \end{aligned}$$

С другой стороны, вычислим при $\nu = 1,\ 2$.

$$U_\nu(\psi_j(x,\lambda)) = \varphi_j^{(\nu-1)}(0) - \langle C_{\max}\varphi_j(x);\ \sigma_\nu \rangle + \lambda U_\nu((C-\lambda I)^{-1}\varphi_j) = \delta_{j\nu}.$$

Таким образом, функции $\psi_j(x,\lambda)$ представляют решения краевых задач

$$-\psi_j(x) + \frac{1}{4}\psi_j(x) = \lambda\psi_j, \quad U_\nu(\psi_j) = \delta_{j\nu}, \quad \nu = 1, 2. \qquad (4)$$

Из (4) непосредственно следует

$$\psi_j(x,\lambda) = \frac{\kappa_j(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

где $\Delta(\lambda) = \det\left[U_\nu(y_j(x,\lambda))\right]$,

$$\kappa_1(x,\lambda) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix}; \quad \kappa_2(x,\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_2(y_2) \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

$$\overrightarrow{y}^T(x,\lambda) = (y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)),$$

Здесь $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)$ произвольная фундаментальная система решений уравнения $-y''(x) + \frac{1}{4}y(x) = \lambda y$, $0 < x < b$. В частности, такую фундаментальную систему решений можно выбрать состоящей из целых функций от λ. Тогда из представления (3) следует, что спектр оператора B состоит только из нормальных (изолированных, конечной кратности) собственных значений, которые определяются как нули целой функции $\Delta(\lambda)$. Отметим, что $\Delta(0)$ совпадает с вронскианом фундаментальной системы решений $y_1(x,0)$, $y_2(x,0)$ и поэтому $\Delta(0) \neq 0$.

Для произвольной функции $f(x) \in L_2[0,b]$ составим частичные суммы спектрального разложения соответствующие оператору C

$$S_R(x,f) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=R} (C - \lambda I)^{-1} f(x) d\lambda =$$

$$= -\sum_{\substack{\lambda_m \in \sigma(C) \\ |\lambda_m| < R}} \sum_{j=1}^{2} \underset{\lambda_m}{res}\left[\frac{\kappa_j(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \ \left\langle f; K^*(K^* - \overline{\lambda} I)^{-1}\sigma_j\right\rangle\right]. \qquad (5)$$

Здесь $\sigma(C)$означает спектр оператора C и окружность $|\lambda| = R$ выбрана так, что на ней нет точек спектра оператора C.

Пусть λ_m - собственное значение алгебраической кратности k_m оператора C, то есть $\Delta(\lambda_m) = 0$, $\Delta'(\lambda_m) = 0$, ... , $\Delta^{(k_m-1)}(\lambda_m) = 0$, $\Delta^{(k_m)}(\lambda_m) \neq 0$.

Выпишем значение вычета согласно формуле (5)

$$\underset{\lambda_m}{res}\left[\frac{\kappa_j(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \cdot \left\langle f; K^*(K^* - \overline{\lambda} I)^{-1}\sigma_j\right\rangle\right] =$$
$$= \tfrac{1}{(k_m-1)!}\lim_{\lambda \to \lambda_m} \frac{d^{k_m-1}}{d\lambda^{k_m-1}}\left[\frac{(\lambda-\lambda_m)^{k_m}}{\Delta(\lambda)} \cdot \kappa_j(x,\lambda) \cdot \left\langle f; K^*(K^* - \overline{\lambda} I)^{-1}\sigma_j\right\rangle\right] =$$
$$= \sum_{r=0}^{k_m-1}\frac{1}{r!}\left.\frac{d^r \kappa_j(x,\lambda)}{d\lambda^r}\right|_{\lambda=\lambda_m} \cdot \sum_{q=0}^{k_m-1-r}\left\langle f; \frac{1}{q!}\frac{d^q}{d\overline{\lambda}^q}(\sigma_j + \overline{\lambda}(K^* - \overline{\lambda} I)^{-1}\sigma_j)|_{\overline{\lambda_m}}\right\rangle \cdot d_{m,k_n-1-r-q},$$

где

$$d_{m,j} = \frac{1}{j!} \cdot \frac{d^j}{d\lambda^j}\left(\frac{(\lambda-\lambda_m)^{k_m}}{\Delta(\lambda)}\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_m}. \qquad (6)$$

В формуле (6) фигурируют выражения

$$u_{j,m,r}(x) \equiv \frac{1}{r!} \cdot \left.\frac{d^r \kappa_j(x,\lambda)}{d\lambda^r}\right|_{\lambda=\lambda_m}, \quad 0 \leq r \leq k_m - 1,$$

которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$-u''_{j,m,r}+\frac{1}{4}u_{j,m,r}=\lambda_m\cdot u_{j,m,r}+u_{j,m,r-1},$$

$$U_\nu(u_{j,m,r})=0,\qquad \nu=1,\dots,n.$$

Таким образом, если обозначить через $t_{jm}=\min\{r:u_{j,m,r}(x)\neq 0\}$, то $u_{j,m,r}(x)$ при $r=t_{jm}$ представляют собственную функцию соответствующую собственному значению λ_m оператора C, а $u_{j,m,r+1}(x)$, $u_{j,m,r+2}(x)$, ... , $u_{j,m,k_m-1}(x)$ - цепочку присоединенных функций порожденных собственной функцией $u_{j,m,r}(r=t_{jm})$.

В нашем случае

$$\Delta(\lambda)=-4\begin{vmatrix}\sigma_1(0) & -\sigma_1'(2\pi)\\ -\sigma_2(2\pi) & \sigma_2'(2\pi)\end{vmatrix}\sin^2\pi\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}.$$

Отсюда находим собственные значения $\lambda_m=m^2+\frac{1}{4}$ и их кратность $k_m=2$.

Непосредственные вычисления приводят к формулам:

$$\kappa_1(x,\lambda)=\begin{vmatrix}\cos\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}x & \frac{\sin\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}}x\\ -\sigma_2(2\pi)\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}\sin 2\pi\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}} & \left(\cos 2\pi\sqrt{\lambda}-1\right)\sigma_2(2\pi)\end{vmatrix}=$$

$$=\sigma_2(2\pi)\Big[\cos\sqrt{\lambda-\tfrac{1}{4}}(2\pi-x)-\cos\sqrt{\lambda-\tfrac{1}{4}}x\Big];$$

$$\kappa_2(x,\lambda)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \cos\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}x & \frac{\sin\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}}x\end{vmatrix}=\frac{\sin\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}x}{\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}};$$

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -\sigma_2(2\pi)\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}\sin 2\pi\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}} & \left(\cos 2\pi\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}-1\right)\sigma_2(2\pi)\end{vmatrix}=$$

$$=-\sigma_2(2\pi)\left(1-\cos 2\pi\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}\right);$$

$$\frac{\partial\kappa_1}{\partial\lambda}=\sigma_2(2\pi)\left\{\frac{-1}{2\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}}(2\pi-x)\sin\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}(2\pi-x)+\frac{1}{2\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}}x\sin\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}x\right\};$$

$$\frac{\partial\kappa_2}{\partial\lambda}=\frac{\frac{x}{2\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}}\cos\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}x-\frac{1}{2\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}}\sin\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}x}{\lambda-\frac{1}{4}}\,.$$

Отсюда

$$u_{1,m,0} = \sigma_2(2\pi)\{\cos m(2\pi - x) - \cos mx\} = 0;$$

$$u_{1,m,1} = \sigma_2(2\pi)\left\{-\frac{1}{2m}(2\pi - x)\sin mx + \frac{1}{2m}x\sin mx\right\};$$

$$u_{2,m,0} = \frac{\sin mx}{m};$$

$$u_{2,m,1} = \frac{x\cos mx - \sin mx}{2m^3};$$

Вычисляем сопряженные функции

$$M_1(t,\lambda) = K^*(K^* - \lambda I)^{-1}\sigma_1(t) = 0.$$

Соответственно, $\dfrac{\partial M_1}{\partial \lambda} = 0.$

$$M_2(t,\lambda) = \sigma_2(2\pi)\cos\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}(x - 2\pi);$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \lambda} = \frac{x - 2\pi}{2\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}}\sin\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}x\sigma_2(2\pi);$$

$$u_{2,m,0} = \cos mx\sigma_2(2\pi);$$

$$u_{2,m,1} = \frac{x - 2\pi}{2m}\sin mx\sigma_2(2\pi).$$

Литература

[1] *Ионкин Н.И.* // Дифференциальные уравнения. Т.13. N 3, 1977.

[2] *Кангужин Б.Е.* Обратная задача спектрального анализа для дифференциальных операторов высших порядков // Тезисы докладов междунар. науч. конф., посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения». 28 мая – 2 июня 2007 г. НГУ, РАН СО. Новосибирск. 2007. – С. 185-186.