1-бөлім Раздел 1 Section 1
Математика Математика Matematics

УДК 517.938

Айсагалиев С.А*., Абенов Б.К., Аязбаева А.М.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
*E-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

К глобальной асимптотической устойчивости динамических систем

Исследуется глобальная асимптотическая устойчивость динамических систем со счетным положением равновесия для двух случаев: 1) когда значение интеграла от периодической функции на периоде равно нулю; 2) когда значение интеграла не равно нулю. Разработан метод выделения области глобальной асимптотической устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы. Эффективность метода показана на двух примерах: задача фазовой синхронизации; движение математического маятника. Предлагаемый метод исследования позволяет выделить более шире область устойчивости в пространстве параметров системы, нежели известные методы. Отличительной особенностью предлагаемого метода от известных методов (частотный, периодической функции Ляпунова) состоит в том, что условия глобальной асимптотической устойчивости следуют из оценок несобственных интегралов вдоль решения системы.

В работе получены следующие результаты: уравнения движения системы с помощью неособого преобразования приведено к специальному виду; получены тождества вдоль решения системы и оценка решений системы; исследованы асимптотические свойства функций, связанных с ограниченностью несобственного интеграла; на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы, доказаны теоремы о глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества динамической системы.

Ключевые слова: глобальная асимптотическая устойчивость, динамическая система, несобственные интегралы.

Aisagaliev S.A., Abenov B.K., Ayazbayeva A.M.

To global asymptotic stability of dynamical systems

We study the global asymptotic stability of dynamical systems with a countable state of equilibrium for two cases: 1) when the value of the integral of a periodic function in a period is equal to zero; 2) when the value of the integral is not equal to zero. A method for selecting an area of the global asymptotic stability in the space of the design parameters of the system is developed. The effectiveness of the method is demonstrated by two examples: the problem of phase synchronization; the motion of a simple pendulum. The proposed method of the study allows highlight a wider area of stability in the parameter space of the system, rather than the known methods.

A distinctive feature of the proposed method by known methods (frequency, periodic Lyapunov functions) is that the conditions for the global asymptotic stability follows from the estimates of improper integrals along the solutions of the system. In the work the following results are obtained: the equations of motion of the system with the help of a smooth transformation is given to a special form; the identity along the solutions of the system and evaluation of solutions of the system; The asymptotic properties of functions with the limitations of the improper integral are studied; based on the evaluation of improper integrals along the solutions of the system, theorems on the global asymptotic stability of stationary set of dynamic systems are proved.
Key words: global asymptotic stability, dynamic system, improper integrals.

Айсағалиев С.Ә., Әбенов Б.Қ., Аязбаева Ә.М.
Динамикалық жүйелердің глобальді ассимптотикалық орнықтылығына

Тепе-теңдік жағдайының саналымды екі: 1) периодты функцияның интегралының мәні периодта нөлге тең; 2) интегралдың мәні нөлге тең емес болған жағдайларында динамикалық жүйелердің глобальді асимптотикалық орнықтылығы зерттелінеді. Жүйенің конструктивті параметрлері кеңістігінде глобальді асимптотикалық орнықтылық облысын ерекшелеу әдісі құрылған. Әдістің тиімділігі келесі екі мысалда көрсетілген: фазалық синхронизация есебі; математикалық маятник қозғалысы есебі. Ұсынылған әдіс белгілі әдістерге қарағанда жүйе параметрлері кеңістігінде орнықтылықтың облысын негүрлым кең ерекшелеуге мүмкіндік береді. Белгілі (жиілік, Ляпуновтың периодты функциялары) әдістерге қарағанда аталған әдістің негізгі ерекшелігі глобальді асимптотикалық орнықтылықтың шарттары жүйенің шешімінің бойында меншіксіз интегралдарын бағалаудан алынады. Жұмыста келесідей негізгі нәтижелер алынған: ерекше емес түрлендірудің көмегімен жүйенің қозғалысы теңдеуі арнайы түрге келтірілген; жүйе шешімі бойында теңдіктер мен жүйе шешімінің бағасы алынған; меншіксіз интегралдары шектелген функцияның асимптоткалық қасиеттері зерттелінген; жүйенің шешімінің бойында меншіксіз интегралдарды бағалау негізінде динамикалық жүйелердің стационар жиынының глобальді асимптотикалық орнықтылығы туралы теоремалар дәлелденген
Түйін сөздер: глобальді асимптотикалық орнықтылық, динамикалық жүйе, меншіксіз интеграл.

Введение

Математической моделью маятниковых систем (связанные маятники, двойные маятники и др.) в механике [1], навигационных систем в радиотехнике [2,3], синхронных машин в электроэнергетике [4], вибрационных систем в технике [5] являются динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством (или просто фазовые системы).

Истоком исследования фазовых систем послужило изучение свойств решений уравнений математического маятника

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \varphi(\theta) = 0, \tag{1}$$

где $\varphi(\theta) = \sin\theta - \gamma$. Благодаря работам Ф. Трикоми [6], Л. Америо [7], Г. Зейферта, получены оценки критического значения $\gamma_{кр}$. Известно, что: 1) в случае $1 > \gamma > \gamma_{кр} = \gamma_{кр}(\alpha)$ для системы (1) существуют как устойчивые так и неустойчивые состояния равновесия; 2) в случае $\gamma < \gamma_{кр}(\alpha)$ любые решения системы (1) при $t \to \infty$ стремится к некоторому состоянию равновесия из счетного множества; 3) в случае $\gamma > 1$ для любого решения системы (1) найдутся числа τ и ε такие, что $\dot{\theta} \geq \varepsilon$ при $t \geq \tau$ (круговое движение).

Следующим этапом развития методов исследования фазовых систем было применение периодических функций Ляпунова [2]. Оригинальным подходом к исследованию фазовых систем являются частотные условия, основанные на процедуре Бакаева-Гужа с последующим применением частотной теоремы В.А. Якубовича. Такой подход впервые предложен в работе Г.А. Леонова [9]. В работах [10, 11] предложен метод сведения фазовых систем высокого порядка к фазовой системе второго порядка (1).

Качественные и количественно численные методы, метод точечных отображений [12], а также методы, основанные на применении периодических функций Ляпунова (включая частотные методы) составляют группу точных методов исследования фазовых систем. Основные недостатки точных методов следующие: а) точные методы, кроме метода периодических функций Ляпунова, применимы для систем второго порядка; б) наиболее общими среди методов, использующих периодические функции Ляпунова, являются частотные методы. Однако частотные условия глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем трудно проверяемы.

Поэтому разработка новых эффективных условий глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем является актуальной проблемой. Один из таких новых подходов к теории глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем изложен в данной статье.

В работе [13] приведена основная идея предлагаемого метода к исследованию устойчивости фазовых систем. Решение более общих проблем (предельные циклы, управляемость, оптимальное управление) фазовых систем изложены в монографии [14]. Исследования динамики сложных фазовых систем содержатся в работах [15, 16].

Данная работа является продолжением научных исследований [17, 18]. В статье [17] содержатся результаты исследования абсолютной устойчивости регулируемых систем с единственным положением равновесия в простом критическом случае, а в [18] – абсолютная устойчивость регулируемых систем в критическом случае.

1. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему с цилиндрическим фазовым пространством, описываемую уравнением следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = Cx + R\varphi(\sigma), \quad x(0) = x_0, \sigma(0) = \sigma_0, \ t \in I = [0, \infty), \tag{2}$$

где A, B, C, R – постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$, 1×1 соответственно. Функция

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) \in C^1(R^1, R^1) | \mu_1 < \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} < \mu_2, \varphi(\sigma) = \varphi(\sigma + \Delta), \forall \sigma, \sigma \in R^1\}, \tag{3}$$

где Δ – период функции $\varphi(\sigma)$, μ_1, μ_2 – заданные числа $|\mu_1| < \infty$, $|\mu_2 < \infty|$. Матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1, n}$, $\lambda_j(A)$ – собственные значения матрицы A.

Положение равновесия системы (2), (3) определяется из решения алгебраических уравнений

$$Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0, \quad Cx_* + R\varphi(\sigma_*) = 0.$$

Поскольку $x_* = -A^{-1}B\varphi(\sigma_*)$, $(R - CA^{-1}B)\varphi(\sigma_* = 0$, то при $R - CA^{-1}B \neq 0$ система (2), (3) имеет стационарное множество

$$\Lambda = \{(x_*, \sigma_*) \in R^{n+1} | x_* = 0, \quad \varphi(\sigma_*) = 0\}.$$

Так как $\varphi(\sigma_*) = \varphi(\sigma_* + k\Delta) = 0$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, то положение равновесия системы (2), (3) является счетным множеством.

Определение 1 *Стационарное множество Λ системы (2), (3) глобально асимптотически устойчиво, если для любой функции $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ и любого начального состояния $(x_0, \sigma_0) \in R^{n+1}$, $|x_0| < \infty$, $|\sigma_0| < \infty$, решение системы $x(t) = x(t; 0, x_0, \sigma_0, \varphi)$, $\sigma(t) = \sigma(t; 0, x_0, \sigma_0, \varphi)$, $t \in I$ обладает свойством $x(t) \to x_* = 0$, $\sigma(t) \to \sigma_*$ при $t \to \infty$, где $\varphi(\sigma_*) = 0$.*

Определение 2 *Условием глобальной асимптотической устойчивости системы* (2), (3) *называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы* $(A, B, C, R, \mu_1, \mu_2)$, *при выполнении которых стационарное множество Λ глобально асимптотически устойчиво.*

Необходимы исследования в отдельности двух случаев:

1. $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi)d\xi = 0, \forall\sigma, \sigma \in R^1$ (случай "с нулевой" нагрузкой);

2. $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi)d\xi \neq 0, \forall\sigma, \sigma \in R^1$ (случай "с ненулевой" нагрузкой).

Ставятся следующие задачи:

Задача 1 *Найти новое эффективное условие глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества Λ системы (2), (3) для случая, когда*

$$\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi)d\xi = 0, \quad \forall\sigma, \sigma \in R^1.$$

Задача 2 *Найти новое эффективное условие глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества Λ системы (2), (3) для случая, когда*

$$\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi)d\xi = \overline{\alpha} \neq 0, \quad \forall\sigma, \sigma \in R^1.$$

Частным случаем системы (2), (3) является уравнение движения математического маятника (1) с функцией $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $0 < \gamma < 1$.

Задача 3 *Найти значение $\gamma_{\text{кр}} = \gamma_{\text{кр}}(\alpha)$.*

2. Неособое преобразование

Пусть характеристический полином матрицы A имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda^1 + a_0.$$

Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли, $\Delta(A) = 0$. Тогда

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \ldots - a_1 A - a_0 I_n,$$

где I_n – единичная матрица порядка $n \times n$.

Лемма 1 . *Пусть постоянный вектор $\theta^* \in R^n$ такой, что*

$$\theta B = 0,\ \theta AB = 0, \ldots, \theta A^{n-2}B = 0, \theta A^{n-1}B = \kappa \neq 0, \tag{4}$$

где $(*)$ – знак транспонирования, θ – вектор-строка.

Тогда первое уравнение из (2) может быть представлено в виде

$$\begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \ldots, \dot{y}_{n-1} = y_n, \\ \dot{y}_n = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \ldots - a_{n-1} y_n + \theta A^{n-1} B \varphi(\sigma), \end{array} \tag{5}$$

где $y_1 = \theta x$, $y_2 = \theta Ax$, $\ldots$, $y_n = \theta A^{n-1}x$, $x = x(t)$, $y_i = y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ $t \in I$.

Доказательство аналогичной леммы приведено в [17].

Лемма 2 *Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того, ранг матрицы*

$$R = \|\theta^*, A^*\theta^*, \ldots, A^{*n-1}\theta^*\| \tag{6}$$

порядка $n \times n$ равен n. Тогда:

1) существует вектор-строка $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ такой, что

$$\dot{\sigma} = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 + \ldots + \beta_{n-1} y_n + R\varphi(\sigma); \tag{7}$$

2) если $y_1 = \theta x = 0$, $y_2 = \theta Ax = 0, \ldots,$ $y_n = \theta A^{n-1}x = 0$, то $x = 0$:

3) уравнение (2) равносильно системе уравнений

$$\begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \ldots, \dot{y}_{n-1} = y_n, \\ \dot{y}_n = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \ldots - a_{n-1} y_n + \kappa\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 + \ldots + \beta_{n-1} y_n + R\varphi(\sigma), \quad \varphi(\sigma) \in \Phi_0. \end{array} \tag{8}$$

Доказательство аналогичной леммы можно найти в [17].

3. Свойства решений

Представляет интерес исследование общего свойства решения системы (2), (3), а также систем (8).

Теорема 1 . *Пусть матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1,n}$, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ и пусть, кроме того, выполнены равенства (4) и ранг $R = n$. Тогда верны оценки*

$$|x(t)| \leq l_1, \quad \|\dot{x}(t)\| \leq l_2, \quad t \in I = [0, \infty), \tag{9}$$

$$|y_i(t)| \leq m_{i1}, \quad |\dot{y}_i(t)| \leq m_{i2}, i = \overline{1,n} \quad t \in I, \tag{10}$$

$$|\dot{\sigma}(t)| \leq c_0, \quad \forall t, \quad t \in I, \tag{11}$$

где $l_1,\ l_2 = const < \infty$, $m_{i1},\ m_{i2} = const < \infty$, $c_0 = const < \infty$. Кроме того, функции $x(t)$, $y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $\sigma(t)$, $t \in I$ – равномерно непрерывны.

Доказательство. Заметим, что периодическая непрерывно-дифференцируемая функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ ограничена, т.е. $|\varphi(\sigma)| \le \overline{\varphi}$, $0 < \overline{\varphi} < \infty$, $\forall\sigma$, $\sigma \in R^1$. Решение дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}B\varphi(\sigma(\tau))d\tau, t \in I.$$

Отсюда с учетом того, что A – гурвицева матрица и $\|e^{At}\| \le c(\varepsilon)e^{(a+\varepsilon)t}$, $t \in I$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, $a = \max\limits_{1\le j\le n} Re\lambda_j(A) < 0$, $|\varphi(\sigma(t))| \le \overline{\varphi}$, $\forall t$, $t \in I$, получим

$$|x(t)| \le c(\varepsilon)|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + c(\varepsilon)e^{(a+\varepsilon)t}\|B\|\overline{\varphi}\left[-\frac{1}{a+\varepsilon}e^{-(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon}\right] \le l_1,$$

где $l_1 = const$, $0 < l_1 < \infty$. Итак, $|x(t)| \le l_1$, $\forall t, t \in I$, $\forall\varphi$, $\varphi \in \Phi_0$.

Так как $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, то $|\dot{x}| \le \|A\||x| + \|B\||\varphi| \le \|A\|l_1 + \|B\|\overline{\varphi} = l_2$, $\forall t$, $t \in I$. Следовательно, $|\dot{x}(t)| \le l_2$, $\forall t$, $t \in I$, $\forall\varphi$, $\varphi \in \Phi_0$. Итак, верна оценка (9) и функция $x(t)$, $t \in I$ – равномерно непрерывна. Поскольку системы (2) и (8) равносильны, то

$$|y_1| \le \|\theta\||x| \le \|\theta\|l_1 = m_{11}, \ldots, |y_n| \le \|\theta\|\|A^{n-1}\||x| \le m_{n1}.$$

Из (5) следует $|\dot{y}_i(t)| \le m_{i2}$, $i = \overline{1,n}$, $t \in I$. Следовательно, верна оценка (10) и функция $y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t \in I$ – равномерно непрерывна.

Наконец, из (8) следует, что $|\dot{\sigma}| \le |\beta_0||y_1(t)| + \ldots + |\beta_{n-1}||y_n(t)| + \|R\|\overline{\varphi} \le c_0$, $\forall t$, $t \in I$ и функция $\sigma(t)$, $t \in I$ – равномерно непрерывна. Теорема доказана.

Теорема 2 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда вдоль решения системы (8) верны тождества*

$$\varphi(\sigma(t)) = \kappa^{-1}[\omega(t) + a_0y_1(t) + a_1y_2(t) + \ldots + a_{n-1}y_n(t) + y_{n+1}(t)], \quad t \in I, \tag{12}$$

$$\dot{\sigma}(t) = \delta_1y_1(t) + \delta_2y_2(t) + \ldots + \delta_ny_n(t) + \delta_0y_{n+1}(t), \quad t \in I, \tag{13}$$

$$\dot{\varphi}(\sigma(t)) = \frac{d\varphi(\sigma(t))}{dt} = \kappa^{-1}[a_0y_2(t) + a_1y_3(t) + \ldots + a_{n-2}y_n(t) + a_{n-1}y_{n+1}(t) + y_{n+2}(t)], \quad t \in I, \tag{14}$$

$$\ddot{\sigma}(t) = \delta_1y_2(t) + \ldots + \delta_{n-1}y_n(t) + \delta_ny_{n+1}(t) + \delta_0y_{n+2}(t), \quad t \in I, \tag{15}$$

где $\dot{y}_n(t) = y_{n+1}(t)$, $\dot{y}_{n+1}(t) = y_{n+2}(t)$, $t \in I$, $\delta_0 = R\kappa^{-1}$, $\kappa = \theta A^{n-1}B$, $\delta_j = \beta_{j-1} + R\kappa^{-1}a_{j-1}$, $j = \overline{1,n}$.

Доказательство. Как следует из второго уравнения (8), производная $\dot{y}_i(t) = y_{n+1}(t) = -a_0y_1(t) - \ldots - a_{n-1}y_n(t) + \kappa\varphi(\sigma(t))$, $\forall t$, $t \in I$. Отсюда следует тождество (12). Подставляя значение $\varphi(\sigma(t))$, $t \in I$ из тождества (12) в правую часть третьего уравнения из (8), получим тождество (13). Дифференцируя по t тождество (12), (13) получим (14), (15) соответственно. Теорема доказана.

Лемма 3 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любой постоянной матрицы Q порядка $(n+2)\times(n+2)$ квадратичная форма $\xi^*(t)Q\xi(t)$, $\xi(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t), y_{n+1}(t), y_{n+2}(t))$, $t \in I$ представима в виде*

$$\begin{aligned}\xi^*(t)Q\xi(t) = q_1y_1^2(t) + q_2y_2^2(t) + \ldots + q_{n+1}y_{n+1}^2(t) + q_{n+2}y_{n+2}^2(t) + \\ + \frac{d}{dt}[\xi^*(t)F\xi(t)], \quad t \in I,\end{aligned} \tag{16}$$

где $q_i = const$, $i = \overline{1, n+2}$, F – постоянная матрица порядка $(n+2)\times(n+2)$.

Доказательство. Легко убедиться в том, что

$$y_{n+2}y_{n+1} = \dot{y}_{n+1}y_{n+1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}y_{n+1}^2\right), \quad y_{n+2}y_n = \dot{y}_{n+1}y_n = \frac{d}{dt}(y_{n+1}y_n) -$$

$$-y_{n+1}\dot{y}_n = \frac{d}{dt}(y_ny_{n+1}) - y_{n+1}^2, \ldots, y_1y_2 = y_1\dot{y}_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y_1^2),$$

$$y_1y_3 = \frac{d}{dt}(y_1y_2) - y_2^2, \ldots.$$

В частности, при $n = 2$ имеем

$$y_4y_3 = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}y_3^2), \quad y_4y_2 = \frac{d}{dt}(y_2y_3) - y_3^2, \quad y_4y_1 = \frac{d}{dt}(y_1y_3 - \frac{1}{2}y_2^2),$$

$$y_3y_2 = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}y_2^2), \quad y_3y_1 = \frac{d}{dt}(y_1y_2) - y_2^2, \quad y_2y_1 = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}y_1^2).$$

Поскольку квадратная форма $\xi^*(t)Q\xi(t)$ содержит слагаемые с постоянными коэффициентами-произведения компонентов вектора $\xi(t)$, то верно представление вида (16). Лемма доказана.

Лемма 4 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любой постоянной матрицы Q_1 порядка $(n+1)\times(n+1)$ несобственный интеграл*

$$\int_0^\infty z^*(t)Q_1z(t) = \int_0^\infty [q_1y_1^2(t) + \ldots + q_{n+1}y_{n+1}^2(t)]dt + \bar{l}_0, \tag{17}$$

$$\bar{l}_0 = \int_0^\infty \frac{d}{dt}[z^*(t)F_1z(t)] = z^*(t)F_1z(t)\Big|_0^\infty, \quad |\bar{l}_0| < \infty, \tag{18}$$

где $z(t) = (y_1(t), \ldots, y_{n+1}(t))$, $t \in I$, F_1 – постоянная матрица порядка $(n+1)\times(n+1)$.

Доказательство. Как следует из формулы (8), функция

$$y_{n+1}(t) = \dot{y}_n(t) = -a_0 y_1(t) - \ldots - a_{n-1} y_n(t) + \kappa\varphi(\sigma(t)), \;\; t \in I,$$

где $|y_i(t)| \leq m_{i1}$, $|\dot{y}_i(t)| \leq m_{i2}$, $i = \overline{1,n}$, $t \in I$, $|\varphi(\sigma(t))| \leq \overline{\varphi}$, $t \in I$. Следовательно, функция $y_{n+1}(t)$, $t \in I$ ограничена. Функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ непрерывна дифференцируема по σ, причем $|\dfrac{d\varphi}{d\sigma}| \leq \mu$, $\mu = \max(|\mu_1|, |\mu_2|)$, $|\mu_1| < \infty$, $|\mu_2| < \infty$. Тогда функция $\varphi(\sigma(t))$, $t \in I$ – ограничена и равномерно непрерывна по t, $t \in I$, в силу того, что функция $\sigma(t)$, $t \in I$ – равномерно непрерывна.

С другой стороны

$$y_{n+2} = \dot{y}_{n+1} = -a_0 y_2(t) - \ldots - a_{n-1} y_{n+1}(t) + \kappa \frac{d\varphi(\sigma(t))}{dt}, \;\; t \in I,$$

где $\dfrac{d\varphi(\sigma(t))}{dt} = \dfrac{d\varphi(\sigma(t))}{d\sigma}\dfrac{d\sigma}{dt}$, $|\dfrac{d\varphi(\sigma(t))}{dt}| \leq |\dfrac{d\varphi}{d\sigma}||\dot{\sigma}(t)| \leq \mu c_0$. Отсюда следует, что функция $y_{n+2}(t)$, $t \in I$ ограничена. Тогда функция $y_{n+1}(t)$, $t \in I$ непрерывно дифференцируема, $|y_{n+1}(t)| \leq m_{n+1,1}$, $|\dot{y}_{n+1}(t)| \leq m_{n+1,2}$, $t \in I$. Следовательно, функция $z(t) = (y_1(t), \ldots, y_{n+1}(t))$, $t \in I$ ограничена, $|z(t)| \leq a$, $t \in I$ и непрерывно дифференцируема, причем $\dot{z}(t) \leq c$, $t \in I$, $0 < a < \infty$, $0 < c < \infty$, верна оценка (18). Интегрируя тождество (16) после замены $\xi(t)$ на $z(t)$, получим равенство (17). Лемма доказана.

Лемма 5 *Пусть выполнены условия леммы 4, и пусть, кроме того:*

1) функция $\varphi(\sigma) \in C^2(R^1, R^1)$;

2) $|\dfrac{d^2\varphi(\sigma)}{d\sigma^2}| \leq \mu_3$, $0 < \mu_3 < \infty$.

Тогда для любой постоянной матрицы Q порядка $(n+2) \times (n+2)$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^\infty \xi^*(t) Q \xi(t) = \int\limits_0^\infty [q_1 y_1^2(t) + \ldots + q_{n+2} y_{n+2}^2(t)] dt + l_0, \tag{19}$$

$$l_0 = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[\xi^*(t) F \xi(t)] = \xi^*(t) F \xi(t)\Big|_0^\infty, \;\; |l_0| < \infty, \tag{20}$$

где $\xi(t) = (y_1(t), \ldots, y_{n+2}(t))$, $t \in I$.

Доказательство. Интегрируя тождество (16), получим соотношения (19), (20). Требуется доказать, что $|l_0| < \infty$. Производная

$$\dot{y}_{n+2} = -a_0 y_3(t) - \ldots - a_{n-1} y_{n+2} + \kappa \frac{d^2\varphi(\sigma(t))}{d\sigma^2}, \;\; t \in I,$$

где $\dfrac{d^2\varphi(\sigma(t))}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\varphi(\sigma(t))}{d\sigma}\right) = \left(\dfrac{d^2\varphi}{d\sigma^2}\right)\dot{\sigma}(t) + \left(\dfrac{d\varphi(\sigma(t))}{d\sigma}\right)\ddot{\sigma}(t), \;\; t \in I$, $|\dfrac{d\varphi(\sigma(t))}{d\sigma}| \leq \mu$, $0 < \mu < \infty$, $|\dfrac{d^2\varphi(\sigma(t))}{d\sigma^2}| \leq \mu_3$, $0 < \mu_3 < \infty$, $|\dot{\sigma}(t)| \leq c_0$, $t \in I$. Поскольку функции

$y_1(t), \dots, y_{n+2}(t)$, $t \in I$ ограничены, то из (15) следует, что $|\ddot{\sigma}(t)| \le c_3$, $0 < c_3 < \infty$, $\forall t$, $t \in I$. Тогда функция $y_{n+2}(t)$, $t \in I$ удовлетворяет условиям $|y_{n+2}(t)| \le m_{n+2,1}$, $|\dot{y}_{n+2}(t)| \le m_{n+2,2}$, $\forall t$, $t \in I$, $0 < m_{n+2,1} < \infty$, $0 < m_{n+2,2} < \infty$. Следовательно, вектор функция $\xi(t)$, $t \in I$ ограничена: $|\xi(t)| \le \overline{a}$, $t \in I$ и непрерывно дифференцируема, причем $|\dot{\xi}(t)| \le \overline{c}$, $t \in I$, $0 < \overline{a} < \infty$, $0 < \overline{c} < \infty$ и верна оценка (20). Лемма доказана.

Лемма 6 *Пусть выполнены условия леммы 4, и пусть, кроме того:*

1) скалярная функция $V(z)$ положительна, непрерывна при любом $z \in R^{n+1}$, $z \neq 0$ и $V(0) = 0$;

2) $\int\limits_0^\infty V(z(t))dt < \infty$.

Тогда $\lim\limits_{t \to \infty} z(t) = 0$, $z(t) = (y_1(t), \dots, y_{n+1}(t))$, $t \in I$.

Доказательство аналогичной леммы приведено в [17].

Лемма 7 *Пусть выполнены условия леммы 5, и пусть, кроме того:*

1) скалярная функция $G(\xi)$ положительна, непрерывна при любом $\xi \in R^{n+2}$, $\xi \neq 0$ и $G(0) = 0$;

2) $\int\limits_0^\infty G(\xi(t))dt < \infty$.

Тогда $\lim\limits_{t \to \infty} \xi(t) = 0$, $\xi(t) = (y_1(t), \dots, y_{n+2}(t))$, $t \in I$.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 6.

4. Несобственные интегралы

На основе тождеств (12)-(15), оценки (9)-(11), а также лемм 4, 5 могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (8).

Теорема 3 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, 5 матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любой величины $\tau_1 > 0$ вдоль решения системы (8) несобственный интеграл*

$$I_1 = \int\limits_0^\infty [\mu_1 \dot{\sigma}(t) - \dot{\varphi}(\sigma(t))]\tau_1[\dot{\varphi}(\sigma(t)) - \mu_2 \dot{\sigma}(t)]dt = \int\limits_0^\infty [M_0 y_{n+2}^2(t) + M_1 y_{n+1}^2(t) + \\ + M_2 y_1^2(t) + \dots + M_{n+1} y_n^2(t)]dt + l_1 \ge 0, \tag{21}$$

$$l_1 = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[\xi^*(t) F_1 \xi(t)]dt = \xi^*(t) F_1 \xi(t)\Big|_0^\infty, \quad |l_1| < \infty, \tag{22}$$

где $\xi(t) = (y_1(t), \dots, y_{n+2}(t))$, $t \in I$, $|\mu_1| < \infty$, $|\mu_2| < \infty$, $\varphi(\sigma) \in C^2(R^1, R^1)$, $|\dfrac{d^2\varphi}{d\sigma^2}| \le \mu_3$, $0 < \mu_3 < \infty$.

Доказательство. Из включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ следует, что

$$(\mu_1 - \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\sigma}})(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\sigma}} - \mu_2) \geq 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi(\sigma(t))}{dt}, \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma}(t), \quad t \in I, \tag{23}$$

где $\dfrac{d\varphi(\sigma(t))}{dt} = \dfrac{\frac{d\varphi(\sigma(t))}{dt}}{\frac{d\sigma}{dt}} = \dfrac{\dot{\varphi}}{\dot{\sigma}}$, $\dot{\varphi}(t) = \dfrac{d\varphi(\sigma(t))}{dt}$.

Умножая тождество (23) на $\dot{\sigma}^2(t)$, получим

$$[\mu_1\dot{\sigma}(t) - \dot{\varphi}(t)]\tau_1[\dot{\varphi}(t) - \mu_2\dot{\sigma}(t)] \geq 0, \quad \forall t, \quad t \in I,$$

где $\tau_1 > 0$ – некоторое число. Как следует из тождеств (13), (14) верны тождества

$$\mu_1\dot{\sigma}() - \dot{\varphi}(t) = -\kappa^{-1}y_{n+2}(t) + (\delta_0\mu_1 - \kappa^{-1}a_{n-1})y_{n+1} + \mu_1\delta_1 y_1(t) + \ldots + (\mu_1\delta_n - \kappa^{-1}a_{n-2})y_n, \quad t \in I,$$

$$\dot{\varphi}(t) - \mu_2\dot{\sigma}(t) = \kappa^{-1}y_{n+2}(t) + (\kappa^{-1}a_{n-1} - \mu_1\delta_0)y_{n+1} - \mu_2\delta_1 y_1(t) + \ldots + (\kappa^{-1}a_{n-2} - \mu_2\delta_n)y_n, \quad t \in I.$$

Легко убедиться в том, что произведение (23) является квадратичной формой относительно переменной $\xi = (y_1, y, \ldots, y_{n+1}, y_{n+2})$. Тогда несобственный интеграл

$$I_1 = \int_0^\infty \xi^*(t)Q\xi(t)dt \geq 0,$$

где $\xi^*(t)Q\xi(t) = [\mu_1\dot{\sigma}(t) - \dot{\varphi}(t)]\tau_1[\dot{\varphi}(t) - \mu_2\dot{\sigma}(t)]$, $t \in I$. Поскольку выполнены все условия леммы 5, то верны соотношения (21), (22). Теорема доказана.

Теорема 4 *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для любых величин* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}$, *вдоль решения системы (8) несобственный интеграл*

$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^\infty [\gamma_0 y_{n+2}(t) + \gamma_1 y_{n+1}(t) + \gamma_2 y_1(t) + \ldots + \gamma_{n+1}y_n(t)]^2 dt = \\ \int_0^\infty [\Gamma_0 y_{n+2}^2(t) + \Gamma_1 y_{n+1}^2(t) + \Gamma_2 y_1^2(t) + \ldots + \Gamma_{n+1}y_n^2(t)]dt + l_2 \geq 0, \end{aligned} \tag{24}$$

$$l_2 = \int_0^\infty \frac{d}{dt}[\xi^*(t)F_2\xi(t)]dt = \xi^*(t)F_2\xi(t)\Big|_0^\infty, \quad |l_2| < \infty, \tag{25}$$

где F_2 *– постоянная матрица порядка* $(n+2) \times (n+2)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Теорема 5 *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для любых величин* h_0, h_1, h_2, *вдоль решения (8) несобственный интеграл*

$$\begin{aligned} I_3 = \int_0^\infty [h_0\ddot{\sigma}(t) + h_1\dot{\sigma}(t) + h_2\varphi(\sigma(t))]^2 dt = \int_0^\infty [H_0 y_{n+2}^2(t) + H_1 y_{n+1}^2(t) + \\ + H_2 y_1^2(t) + \ldots + H_{n+1}y_n^2(t)]dt + l_3 \geq 0, \end{aligned} \tag{26}$$

$$l_3 = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[\xi^*(t)F_3\xi(t)]dt = \xi^*(t)F_3\xi(t)\Big|_0^\infty, \ \ |l_3| < \infty, \tag{27}$$

где F_3 – постоянная матрица порядка $(n+2)\times(n+2)$.

Доказательство. Поскольку $\ddot{\sigma}$, $\dot{\sigma}$, $\varphi(\sigma(t))$, $t \in I$ определяется тождествами (15), (13), (12) соответственно, то

$$\xi^*(t)Q\xi(t) = [h_0\ddot{\sigma}(t) + h_1\dot{\sigma}(t) + h_2\varphi(\sigma(t))]^2, \ \ t \in I.$$

Далее, повторяя доказательства теоремы 3, получим соотношения (26), (27). Теорема доказана.

А. Рассмотрим случай, когда

$$l_3 = \int\limits_\sigma^{\sigma+\Delta} \varphi(\eta)d\eta = 0, \ \ \forall\sigma, \ \ \sigma \in R^1. \tag{28}$$

Теорема 6 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, 4, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ и верно равенство (28). Тогда для любой величины τ_2, вдоль решения системы (8) несобственный интеграл*

$$\begin{aligned} I_4 = \int\limits_0^\infty \varphi(\sigma(t))\tau_2\dot{\sigma}(t)dt = \int\limits_0^\infty [N_1y_{n+1}^2(t) + N_2y_1^2(t) + \ldots + N_{n+1}y_n^2(t)]dt + l_4 = \\ = \int\limits_{\sigma 0}^{\sigma(\infty)} \varphi(\sigma)\tau_2 d\sigma < \infty, \end{aligned} \tag{29}$$

$$l_4 = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[z^*(t)F_4z(t)]dt = z^*(t)F_4z(t)\Big|_0^\infty, \ \ |l_4| < \infty, \tag{30}$$

где F_4 – постоянная матрица порядка $(n+1)\times(n+1)$, $z(t) = (y_1(t), \ldots, y_{n+1}(t))$, $t \in I$.

Доказательство. Для решения системы (8) верны тождества (12), (13). Произведение $\varphi(\sigma(t))\tau_2\dot{\sigma}(t) = z^*(t)Qz(t)$, $t \in I$. Далее, применяя лемму 4, получим соотношения (29), (30). Так как

$$\int\limits_0^\infty \varphi(\sigma(t))\tau_2\dot{\sigma}(t)dt = \int\limits_{\sigma 0}^{\sigma(\infty)} \varphi(\sigma)\tau_2 d\sigma, \ \ \int\limits_\sigma^{\sigma+\Delta} \varphi(\eta)\tau_2 d\eta = 0, \ \ \forall\sigma, \ \ \sigma \in R^1,$$

для любого τ_2, то

$$\int\limits_{\sigma 0}^{\sigma(\infty)} \varphi(\sigma)\tau_2 d\sigma < \infty.$$

Теорема доказана.

Б. Рассмотрим случай, когда

$$\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\eta)d\eta = \overline{\alpha} \neq 0, \ \ \forall\sigma, \ \ \sigma \in R^1. \tag{31}$$

Пусть величины ν, $\overline{\beta}$ такие, что $\overline{\beta} = \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} |\varphi(\eta)|d\eta$, $\nu = \overline{\alpha}/\overline{\beta}$.

Теорема 7 *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, 4, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ и верно равенство (31), величины $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ такие, что $\overline{\alpha} - \nu\overline{\beta} = 0$. Тогда для любых величин τ_3, $\tau_4 > 0$, $\tau_5 > 0$ таких, что $4\tau_4\tau_5 - \nu^2\tau_3^2 > 0$, вдоль решения системы (8) несобственный интеграл*

$$I_5 = \int\limits_0^\infty [\varphi(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t) - \tau_4\varphi^2(\sigma(t)) - \tau_5\dot{\sigma}^2(t)]dt = \int\limits_0^\infty [P_1 y_{n+1}^2(t) + P_2 y_1^2(t) + \ldots \\ \ldots + P_{n+1}y_n^2(t)]dt + l_5 < \infty, \tag{32}$$

$$l_5 = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[z^*(t)F_5 z(t)]dt = z^*(t)F_5 z(t)\Big|_0^\infty, \ \ |l_5| < \infty, \tag{33}$$

где F_5 – постоянная матрица порядка $(n+1)\times(n+1)$, $z(t) = (y_1, \ldots, y_{n+1})$.

Доказательство. Обозначим через $\Phi(\sigma) = \varphi(\sigma) - \nu|\varphi(\sigma)|$. Функция $\Phi(\sigma)$ обладает свойством

$$\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \Phi(\eta)d\eta = \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\eta)d\eta - \nu \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} |\varphi(\eta)|d\eta = \overline{\alpha} - \nu\overline{\beta} = 0,$$

для любого σ, $\sigma \in R^1$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^\infty [\varphi(\sigma(t)) - \nu|\varphi(\sigma(t))|]\tau_3\dot{\sigma}(t)dt = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \Phi(\sigma)\tau_3 d\sigma < \infty \tag{34}$$

для любого числа τ_3. Рассмотрим функцию

$$S(t) = \varphi(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t) - \tau_4\varphi^2(\sigma(t)) - \tau_5\dot{\sigma}(t) - \Phi(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t) =$$

$$= -\left[\sqrt{\tau_5}\dot{\sigma} - \frac{\nu\tau_4}{2\sqrt{\tau_5}}|\varphi|\right]^2 + \left(\frac{\nu^2\tau_3^2}{4\tau_5} - \tau_4\right)\varphi^2, \ \ \forall t, \ \ t \in I.$$

Заметим, что $S(t) \leq 0$, $\forall t$, $t \in I$ при $4\tau_4\tau_5 - \nu^2\tau_3^2 \geq 0$. Тогда

$$\varphi(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t) - \tau_4\varphi^2(\sigma(t)) - \tau_5\dot{\sigma}^2(t) \leq \Phi(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t), \ \ \forall t, \ \ t \in I.$$

Следовательно, несобственный интеграл

$$I_5 = \int\limits_0^\infty [\varphi(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t) - \tau_4\varphi^2(\sigma(t)) - \tau_5\dot{\sigma}^2(t)]dt \leq \int\limits_0^\infty \Phi(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t)dt =$$
$$= \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \Phi(\sigma)\tau_3 d\sigma < \infty, \qquad (35)$$

в силу неравенства (34). Поскольку вдоль решения системы (8) верны тождества (12), (13), то

$$z^*(t)Q_1z(t) = \varphi(\sigma(t))\tau_3\dot{(\sigma)}(t) - \tau_4\varphi^2(\sigma(t)) - \tau_5\dot{\sigma}^2(t), \;\; t \in I.$$

Далее, применяя лемму 4, получим соотношения (32), (33). Теорема доказана.

Теорема 8 *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для любых величин* $\delta_1 > 0$, δ_2, δ_3 *вдоль решения системы (8) несобственный интеграл*

$$I_6 = \int\limits_0^\infty \left[-\delta_1\varphi^2 - \frac{\delta_2^2}{\delta_1}\dot{\sigma}^2 - \frac{\delta_3^2\nu^2}{\delta_1}\varphi^2 - 2\delta_2\dot{\varphi}\dot{\sigma} + \frac{2\delta_2\delta_3}{\delta_1}\varphi\dot{\sigma}\right]dt =$$
$$= \int\limits_0^\infty [L_0y_{n+2}^2 + L_1y_{n+1}^2 + L_2y_1^2 + \ldots + L_{n+1}y_n^2]dt + l_6 < \infty, \qquad (36)$$

$$l_6 = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[\xi^*(t)F_6\xi(t)]dt = \xi^*(t)F_6\xi(t)\Big|_0^\infty, \;\; |l_6| < \infty, \qquad (37)$$

где $\overline{\alpha} - \nu\overline{\beta} = 0$, *верно равенство (31).*

Доказательство. Вдоль решения системы (8) верно неравенство

$$\pi = \left[\sqrt{\delta_1}\dot{\varphi} + \frac{\delta_2}{\sqrt{\delta_1}}\dot{\sigma} - \frac{\delta_3\nu}{\sqrt{\delta_1}}|\varphi|\right]^2 \geq 0.$$

Отсюда следует, что

$$-2\delta_3\nu\dot{\varphi}|\varphi| + \frac{2\delta_2\delta_3}{\delta_1}[\varphi - \nu|\varphi|]\dot{\sigma} \geq -\delta_1\varphi^2 - \frac{\delta_2^2}{\delta_1}\dot{\sigma}^2 -$$
$$-\frac{\delta_3^2\nu^2}{\delta_1}\varphi^2 - 2\delta_2\sigma_2\dot{\varphi}\dot{\sigma} + \frac{2\delta_2\delta_3}{\delta_1}\dot{\sigma}\varphi.$$

Тогда несобственный интеграл

$$I_6 = \int\limits_0^\infty \left[-\delta_1\varphi^2 - \frac{\delta_2^2}{\delta_1}\dot{\sigma}^2 - \frac{\delta_3^2\nu^2}{\delta_1}\varphi^2 - 2\delta_2\dot{\varphi}\dot{\sigma} + \frac{2\delta_2\delta_3}{\delta_1}\dot{\sigma}\varphi\right]dt \leq$$

$$\int_0^\infty (-2\delta_3\nu)\dot{\varphi}|\varphi|dt + \int_0^\infty \frac{2\delta_2\delta_3}{\delta_1}[\varphi - \nu|\varphi|]\dot{\sigma}dt,$$

где $\int_0^\infty (-2\delta_3\nu)\dot{\varphi}|\varphi|dt < \infty$, $\int_0^\infty \frac{2\delta_2\delta_3}{\delta_1}[\varphi - \nu|\varphi|]\dot{\sigma}dt < \infty$.

Далее, используя (12)-(14), получим оценки (36), (37). Теорема доказана.

5. Глобальная асимптотическая устойчивость

На основе результатов изложенных выше, могут быть сформулированы критерии глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества Λ системы (2), (3) для двух случаев:

$$\text{а)} \int_\sigma^{\sigma+\Delta} \varphi(\eta)d\eta = 0; \quad \text{б)} \int_\sigma^{\sigma+\Delta} \varphi(\eta)d\eta = \overline{\alpha} \neq 0,$$

в отдельности.

Теорема 9 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) матрица A – гурвицева, $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$;

2) существует вектор $\theta^* \in R^n$ такой, что

$$\theta B = 0, \theta AB = 0, \dots, \theta A^{n-2}B = 0, \kappa = \theta A^{n-1}B \neq 0;$$

3) ранг матрицы $P = \|\theta^*, A\theta^*, \dots, A^{*n-1}\theta^*\|$ равен n;

4) $\int_\sigma^{\sigma+\Delta} \varphi(\eta)d\eta = 0$;

5) $N_i - \Gamma_i > 0$, $i = \overline{1, n+1}$, $\gamma_0 = 0$.

Тогда стационарное множество Λ системы (2), (3) глобально асимптотически устойчиво.

Доказательство. При выполнении условий 1)-5) теоремы, верны утверждения теорем 4, 6 для переменных $y_{n+1}, y_1, \dots, y_n$. В частности, из теоремы 4 при $\gamma_0 = 0$ неравенства (26), (27) запишутся так

$$-I_2 = \int_0^\infty [-\Gamma_1 y_{n+1}^2(t) - \Gamma_2 y_1^2(t) - \ldots - \Gamma_{n+1})y_n^2(t)]dt - \bar{l}_2 \leq 0,$$

$$\bar{l}_2 = \int_0^\infty \frac{d}{dt}[z^*(t)\overline{F}_2 z(t)]dt = z^*(t)\overline{F}_2 z(t)\Big|_0^\infty, \quad |\bar{l}_2| < \infty,$$

где $z(t) = (y_1(t), \dots, y_{n+1}(t))$, $t \in I$. Отсюда следует, что

$$\int_0^\infty [-\Gamma_1 y_{n+1}^2(t) - \Gamma_2 y_1^2(t) - \ldots - \Gamma_{n+1})y_n^2(t)]dt \leq \bar{l}_2 < \infty. \tag{38}$$

Как следует из теоремы 6, верна оценка (см. (29), (30))

$$\int_0^\infty [N_1 y_{n+1}^2(t) + N_2 y_1^2(t) + \ldots + N_{n+1}) y_n^2(t)] dt < \infty. \quad (39)$$

Из (38), (39) имеем

$$\begin{gathered}\int_0^\infty V(z(t))dt = \int_0^\infty [(N_1 - \Gamma_1) y_{n+1}^2(t) + (N_2 - \Gamma_2) y_1^2(t) + \ldots + \\ +(N_{n+1} - \Gamma_{n+1}) y_n^2(t)] dt < \infty, \quad V(0) = 0, \quad V(z) > 0, \quad z \neq 0.\end{gathered} \quad (40)$$

Далее, применяя лемму 6 из оценки (40), получим $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t) = 0$, $i = \overline{1, n+1}$ в силу условия 5) теоремы. Заметим, что функция $z(t)$, $t \in I$ удовлетворяет условиям $|z(t)| \leq a$, $|\dot{z}(t)| \leq c$, $t \in I$. Как следует из леммы 2, если $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t) = 0$, $i = \overline{1, n}$, то $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Согласно утверждению теоремы 2, $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{\sigma}(t) = 0$. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma(t) = \sigma_*$, $\varphi(\sigma(t)) \to \varphi(\sigma_*)$ при $t \to \infty$, где $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(\sigma(t)) = \varphi(\sigma_*) = 0$. Пара $(x_* = 0, \sigma_*) \in \Lambda$. Теорема доказана.

Теорема 10 . *Пусть выполнены условия 1) - 4) теоремы 9, и пусть, кроме того:*

$$1)\varphi(\sigma) \in C^2(R^1, R^1), \quad |\frac{d^2\varphi(\sigma)}{d\sigma^2}| \leq \mu_3, \quad 0 < \mu_3 < \infty;$$

$$2) - M_0 - \Gamma_0 > 0, \quad N_i - M_i - \Gamma_i > 0, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Тогда стационарное множество Λ системы (2), (3) глобально асимптотически устойчиво.

Доказательство. При выполнении условия теоремы, верны утверждения теорем 3, 4, 6. Как следует из формул (21), (22), (24), (25), (29), (30) верны соотношения

$$-I_1 = \int_0^\infty [-M_1 y_{n+1}^2(t) - M_2 y_1^2(t) - \ldots - M_{n+1}) y_n^2(t)] dt - l_1 \leq 0,$$

$$-I_2 = \int_0^\infty [-\Gamma_1 y_{n+1}^2(t) - \Gamma_2 y_1^2(t) - \ldots - \Gamma_{n+1} y_n^2(t)] dt - l_2 \leq 0,$$

$$I_4 = \int_0^\infty [N_1 y_{n+1}^2(t) + N_2 y_1^2(t) + \ldots + N_{n+1}) y_n^2(t)] dt - l_4 < infty,$$

где $|l_1| < \infty$, $|l_2| < \infty$, $|l_4| < \infty$. Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\int_0^\infty [(-M_0 - \Gamma_0) y_{n+2}^2(t) + (N_1 - M_1 - \Gamma_1) y_{n+1}^2(t) + (N_2 - M_2 - \Gamma_2) y_1^2(t) + \ldots + \\ +(N_{n+1} - M_{n+1} - \Gamma_{n+1}) y_n^2(t)] dt \leq l_1 + l_2 - l_4 < \infty,\end{gathered} \quad (41)$$

где $-M_0-\Gamma_0>0$, $N_i-M_i-\Gamma_i>0$, $i=\overline{1n+1}$. Скалярная функция $G(\xi(t))=(-M_0-\Gamma_0)y_{n+2}^2(t)+(N_1-M_1-\Gamma_1)y_{n+1}^2(t)+(N_2-M_2-\Gamma_2)y_1^2(t)+\ldots+(N_{n+1}-M_{n+1}-\Gamma_{n+1})y_n^2(t)$, $\xi(t)=(y_1(t),\ldots,y_{n+2}(t))$, $t\in I$. Далее, применяя лемму 7, с учетом того, что $G(\xi)>0$, $\forall\xi$, $\xi\in R^{n+2}$, $G(0)=0$, $\int\limits_0^\infty G(\xi(t))dt<\infty$, в силу неравенства (41), получим $\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t)=0$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\dot\sigma(t)=0$, $\sigma(t)\to\sigma_*$, $\varphi(\sigma(t))\to\varphi(\sigma_*)$ при $t\to\infty$. Теорема доказана.

Теорема 11 . *Пусть выполнены условия 1) - 4) теоремы 9, и пусть, кроме того:*
1) выполнены условия теорем 3-5;
2) $M_0+H_0+\Gamma_0=0$, $M_i+H_i+\Gamma_i=N_i$, $i=\overline{1,n+1}$;
Тогда

$$h_0\ddot\sigma(t)+h_1\dot\sigma+h_2\varphi(\sigma(t))=0 \ \textit{при}\ t\to\infty. \tag{42}$$

Если, кроме того, решение системы второго порядка

$$h_0\ddot\theta+h_1\dot\theta+h_2\varphi(\theta)=0,\quad t\in I \tag{43}$$

глобально асимптотически устойчиво, то стационарное множество Λ *системы (2), (3) глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Суммы несобственных интегралов

$$I_1+I_2+I_3=\int\limits_0^\infty[(M_0+H_0+\Gamma_0)y_{n+2}^2(t)+(M_1+H_1+\Gamma_1)y_{n+1}^2(t)+(M_2+H_2+\Gamma_2)y_1^2(t)+\ldots$$

$$\ldots+(M_{n+1}+H_{n+1}+\Gamma_{n+1})y_n^2(t)]dt+l_1+l_2+l_3,\quad |l_i|<\infty,\quad i=1,2,3.$$

$$I_4+R^1=\int\limits_0^\infty[N_1y_{n+1}^2(t)+N_2y_1^2(t)+\ldots+N_{n+1}y_n^2(t)]dt+l_4+R^1,\quad R_1=l_1+l_2+l_3-l_4.$$

Заметим, что $I_4+R^1<\infty$, $|l_4|<\infty$. При выполнении условия 2) теоремы верно равенство $I_1+I_2+I_3=I_4+R_1<\infty$, где $I_1\geq0$, $I_2\geq0$, $I_3\geq0$, $|R_1|<\infty$. Тогда $I_3\leq I_1+I_2+I_3=I_4+R_1<\infty$. Следовательно,

$$I_3=\int\limits_0^\infty[h_0\ddot\sigma(t)+h_1\dot\sigma+h_2\varphi(\sigma(t))]^2dt+l_3\leq I_4+R_1<\infty,$$

где $|l_3|<\infty$, функция $f(t)=h_0\ddot\sigma(t)+h_1\dot\sigma+h_2\varphi(\sigma(t))$, $t\in I$ – равномерно непрерывна. Отсюда следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=0$, т.е. верно равенство (42).

Пусть $\theta(t)$, $t\in I$ – решение дифференциального уравнения (43). Тогда $\sigma(t)=\theta(t)$ при $t\to\infty$. По условию теоремы решение уравнения (43) глобально асимптотически устойчиво. Следовательно, $\theta(t)\to\theta_*$ при $t\to\infty$, где $\varphi(\theta_*)=0$. Тогда $\sigma(t)\to\sigma_*$ при $t\to\infty$, $\varphi(\theta_*)=\varphi(\sigma_*)=0$. Рассмотрим автономную систему $\dot x=Ax+B\varphi(\sigma(t))$, где $\varphi(\sigma)\to0$ при $t\to\infty$. Так как матрица A – гурвицева, то $x(t)\to x_*=0$ при $t\to\infty$. Итак, пара $(x_*,\sigma_*)\in\Lambda$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда $\int\limits_\sigma^{\sigma+\Delta}\varphi(\eta)d\eta=\overline{\alpha}\neq0$.

Теорема 12 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) матрица A – гурвицева, $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$;

2) $\theta B = 0, \theta AB = 0, \ldots, \theta A^{n-2}B = 0, \theta A^{n-1}B = \kappa \neq 0$;

3) ранг матрицы $P = n$;

4) $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\eta) d\eta = \overline{\alpha} \neq 0$;

5) выполнены условия теорем 4, 7, и пусть, кроме того:

$$P_i - \Gamma_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad \gamma_0 = 0.$$

Тогда стационарное множество Λ системы (2), (3) глобально асимптотически устойчиво.

Доказательство. Из неравенств (24), (25) при $\gamma_0 = 0$, имеем

$$-I_2 = \int\limits_0^\infty [-\Gamma_1 y_{n+1}^2(t) - \Gamma_2 y_1^2(t) - \ldots - \Gamma_{n+1} y_n^2(t)]dt - \bar{l}_2 \leq 0.$$

Из (32), (33) следует, что

$$I_5 = \int\limits_0^\infty [P_1 y_{n+1}^2(t) + P_2 y_1^2(t) + \ldots + P_{n+1}) y_n^2(t)]dt - l_5 < \infty.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty [(P_1 - \Gamma_1) y_{n+1}^2(t) + (P_2 - \Gamma_2) y_1^2(t) + \ldots + (P_{n+1} - \Gamma_{n+1}) y_n^2(t)]dt \leq \bar{l}_2 - l_5 < \infty,$$

где $|\bar{l}_2| < \infty$, $|l_5| < \infty$. Далее, применяя лемму 6, получим $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t) = 0$, $i = \overline{1, n+1}$. Теорема доказана.

Теорема 13 *Пусть выполнены условия 1) – 4) теоремы 12, и пусть, кроме того:*

1. выполнены условия теорем 3, 4, 7;

2. $-M_0 - \Gamma_0 > 0$, $P_i - M_i - \Gamma_i > 0$, $i = \overline{1, n+1}$.

Тогда стационарное множество Λ системы (2), (3) глобально асимптотически устойчиво.

Доказательство. Так как $-I_1 \leq 0$, $-I_2 \leq 0$, $I_5 < \infty$, то $-I_1 - I_2 + I_5 < \infty$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^\infty [(-M_0 - \Gamma_0) y_{n+2}^2 + (P_1 - M_1 - \Gamma_1) y_{n+1}^2 + (P_2 - M_2 - \Gamma_2) y_1^2 + \ldots + (P_{n+1} - M_{n+1} - \Gamma_{n+1}) y_n^2]dt < \infty.$$

Далее, применяя лемму 7, получим $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t) = 0$, $i = \overline{1, n+2}$. Теорема доказана.

Теорема 14 *Пусть выполнены условия 1) – 4) теоремы 12, и пусть, кроме того:*
1. выполнены условия теорем 3, 4, 8;
2. $L_0 - M_0 - \Gamma_0 > 0$, $L_i - M_i - \Gamma_i > 0$, $i = \overline{1, n+1}$.
Тогда стационарное множество Λ *системы (2), (3) глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из неравенства $-I_1 - I_2 + I_6 < \infty$. следует, что

$$\int\limits_0^\infty [(L_0-M_0-\Gamma_0)y_{n+2}^2+(L_1-M_1-\Gamma_1)y_{n+1}^2+(L_2-M_2-\Gamma_2)y_1^2+\ldots+(L_{n+1}-M_{n+1}-\Gamma_{n+1})y_n^2]dt < \infty.$$

Тогда утверждение теоремы следует из леммы 7. Теорема доказана.

Теорема 15 *Пусть выполнены условия 1) – 4) теоремы 12, и пусть, кроме того:*
1. выполнены условия теорем 3-5, 7;
2. $M_0 + H_0 + \Gamma_0 = 0$, $M_i + H_i + \Gamma_i = P_i$, $i = \overline{1, n+1}$.
Тогда

$$h_0\ddot{\sigma}(t) + h_1\dot{\sigma}(t) + h_2\varphi(\sigma(t)) = 0 \ \ \text{при} \ \ t \to \infty$$

Если, кроме того, решение системы второго порядка

$$h_0\ddot{z} + h_1\dot{z} + h_2\varphi(z) = 0, t \in I$$

глобально асимптотически устойчиво, то стационарное множество Λ *системы (2), (3) глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 11.

Теорема 16 *Пусть выполнены условия 1) – 4) теоремы 12, и пусть, кроме того:*
1. выполнены условия теорем 3-5, 8;
2. $M_0 + H_0 + \Gamma_0 = 0$, $M_i + H_i + \Gamma_i = P_i$, $i = \overline{1, n+1}$.
Тогда

$$h_0\ddot{\sigma}(t) + h_1\dot{\sigma}(t) + h_2\varphi(\sigma(t)) = 0 \ \ \text{при} \ \ t \to \infty$$

Если, кроме того, решение системы второго порядка

$$h_0\ddot{z} + h_1\dot{z} + h_2\varphi(z) = 0, t \in I$$

глобально асимптотически устойчиво, то стационарное множество Λ *системы (2), (3) глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство теоремы следует из равенства $I_1+I_2+I_3 = I_6+R_3$, $R_3 = l_1+l_2+l_3-l_6$, где $I_1 \geq 0$, $I_2 \geq 0$, $I_3 \geq 0$, $I_6 + R_3 < \infty$.

6. Задача фазовой синхронизации

Уравнения движения системы фазовой подстройки частоты с пропорционально интегрирующим фильтром в автономном случае имеет вид [19]:

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + (\beta - 1)\varphi(\sigma), \ \ \dot{\sigma} = x - \beta T\varphi(\sigma), \ \ t \in I = [0, \infty), \tag{44}$$

где

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \big\{\varphi(\sigma) \in C^1(R^1, R^1) \,|\, -1 \le \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \le 1,\ \varphi(\sigma) = \varphi(\sigma + \Delta)\big\}. \tag{45}$$

Для данного примера $A = -\frac{1}{T}$, $B = \beta - 1$, $R = -\beta T$, $C = 1$, где $T >$, $\beta \in (0,1)$, $n = 1$, $m = 1$, $x = y_1$.

1 случай. Для определенности выберем функцию $\varphi(\sigma) = \sin\sigma$. В этом случае $\Delta = 2\pi$, $R - CA^{-1}B = -T \ne 0$. Стационарное множество $\Lambda = \{(x_*, \sigma_*) \in R^2 | x_* = 0 \quad \sigma_* = \pm k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots\}$ – счетное множество. Так как $\frac{d\varphi}{d\sigma} = \cos\sigma$, $\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} = -\sin\sigma$, $|\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}| \le 1$, $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 1$, матрица $A = -\frac{1}{T} < 0$ – гурвицева.

Как следует из теоремы 2, верны тождества

$$\varphi(\sigma(t)) = \frac{1}{\beta - 1}(y_2 + \frac{1}{T}y_1),\ \dot\sigma(t) = -\frac{\beta T}{\beta - 1}y_2 - \frac{1}{\beta - 1}y_1,$$

$$\dot\varphi(t) = \frac{1}{\beta - 1}(y_3 + \frac{1}{T}y_2),\ \ddot\sigma(t) = -\frac{\beta T}{\beta - 1}y_3 - \frac{1}{\beta - 1}y_2,$$

где $\dot y_1 = \dot x = \dot y_1$, $\varphi(t) = \frac{d\varphi(\sigma(t))}{dt}$.

Несобственные интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^\infty [M_0 y_3^2 + M_1 y_2^2 + M_2 y_1^2] dt + l_1 \ge 0,$$

$$M_0 = -\frac{\tau_1}{(\beta - 1)^2},\ \ M_1 = \frac{\beta^2 T^4 - 1}{T^2(\beta - 1)^2}\tau_1, M_2 = \frac{\tau_1}{(\beta - 1)^2},\ \ |l_1| < \infty;$$

$$I_2 = \int\limits_0^\infty [\Gamma_0 y_3^2 + \Gamma_1 y_2^2 + \Gamma_2 y_1^2] dt + l_2 \ge 0,$$

$$\Gamma_0 = \gamma_0^2,\ \ \Gamma_1 = \gamma_1^2 - 2\gamma_0\gamma_2,\ \ \Gamma_2 = \gamma_2^2;$$

$$I_4 = \int\limits_0^\infty [N_1 y_2^2 + N_2 y_1^2] dt + l_4 < \infty,\ \ N_1 = -\frac{\beta T \tau_2}{(\beta - 1)^2},\ \ N_2 = -\frac{\tau_2}{T(\beta - 1)^2},$$

$z(t) = (y_1(t), y_2(t))$, $t \in I$, τ_2 – любые числа, $\tau_1 > 0$, $|l_2| < \infty$, $|l_4| < \infty$.

Ниже приведены результаты применения теоремы 10:

$$-M_0 - \Gamma_0 > 0: \qquad \frac{\tau_1}{(\beta - 1)^2} - \gamma_0^2 > 0; \tag{46}$$

$$N_1 - M_1 - \Gamma_1 > 0: \qquad -\frac{\beta T}{(\beta - 1)^2}\tau_2 - \frac{\beta^2 T^4 - 1}{T^2(\beta - 1)^2}\tau_1 - \gamma_1^2 + 2\gamma_0\gamma_2 > 0; \tag{47}$$

$$N_2 - M_2 - \Gamma_2 > 0: \qquad -\frac{\tau_2}{T(\beta - 1)} - \frac{\tau_1}{(\beta - 1)^2} - \gamma_2^2 > 0. \tag{48}$$

Из (46) - (48) следует

$$\frac{1+\beta T^4(1-\beta)}{T^2}\gamma_0^2+\beta T^2\gamma_2^2-\gamma_1^2+2\gamma_0\gamma_2>0. \tag{49}$$

Неравенство (49) выполнено для любого $\gamma_0>0,\ \gamma_1=0,\ \gamma_2>0,\ \beta\in(0,1)$. Следовательно, стационарное множество Λ системы (44), (45) при $\varphi(\sigma)=\sin\sigma$ глобально асимптотически устойчиво для любых $T>0,\ \beta\in(0,1)$.

2 случай. Пусть $\varphi(\sigma)=\sin\sigma-\gamma,\ \gamma\in(0,1)$. В этом случае, величины

$$\alpha=\int\limits_{\sigma}^{\sigma+2\pi}\varphi(\eta)d\eta=-2\pi\gamma,\ \ \overline{\beta}=\int\limits_{\sigma}^{\sigma+2\pi}|\varphi(\eta)|d\eta=4(\gamma\arcsin\gamma+\sqrt{1-\gamma^2}),$$

$$\nu=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\overline{\beta}}}=\frac{-0,5\pi\gamma}{\gamma\arcsin\gamma+\sqrt{1-\gamma^2}}.$$

Проверим условия теоремы 12. Несобственный интеграл

$$I_5=\int\limits_0^\infty[P_1y_2^2+P_2y_1^2]dt+l_5<\infty,\ \ P_1=-\frac{\beta T}{(\beta-1)^2}\tau_3-\frac{\tau_4}{(\beta-1)^2}-\frac{\beta^2T^2}{(\beta-1)^2}\tau_5,$$

$$P_2=-\frac{\tau_3}{T(\beta-1)^2}-\frac{\tau_4}{T^2(\beta-1)^2}-\frac{\tau_5}{(\beta-1)^2},\ \ z(t)=(y_1(t),y_2(t)),\ \ t\in I,$$

Ниже приведены результаты применения теоремы 13:

$$-M_0-\Gamma_0>0:\qquad \frac{\tau_1}{(\beta-1)^2}-\gamma_0^2>0; \tag{50}$$

$$P_1-M_1-\Gamma_1>0:\qquad -\frac{\beta T}{(\beta-1)^2}\tau_3-\frac{\tau_4}{(\beta-1)^2}-\frac{\beta^2T^2}{(\beta-1)^2}\tau_5-\frac{\beta^2T^4-1}{T^2(\beta-1)^2}\tau_1-\gamma_1^2+2\gamma_0\gamma_2>0; \tag{51}$$

$$P_2-M_2-\Gamma_2>0:\qquad -\frac{\tau_3}{T(\beta-1)^2}-\frac{\tau_4}{T^2(\beta-1)^2}-\frac{\tau_5}{(\beta-1)^2}-\frac{\tau_1}{(\beta-1)^2}-\gamma_2^2>0. \tag{52}$$

Из (50) - (52) имеем

$$|\nu|\le\frac{2\sqrt{(1-\beta)\{\frac{1+\beta T^4(1-\beta)}{T^2}\gamma_0^2-\gamma_1^2+2\gamma_0\gamma_2+\beta T^2\gamma_2^2\}\tau_5+\beta T^2\tau_5^2}}{\gamma_0^2[\frac{1-\beta}{T^3}+T(1-\beta)^2(1+\beta)]+T(1-\beta)\gamma_2^2-\frac{1-\beta}{T}\gamma_1^2+2\gamma_0\gamma_2\frac{1-\beta}{T}+T(1+\beta)\tau_5}. \tag{53}$$

В частности, при $\gamma_0=\gamma_1=\gamma_2=0$ из (53), получим

$$|\nu|\le\frac{0,5\pi\gamma}{\gamma\arcsin\gamma+\sqrt{1-\gamma^2}}\le\frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta},\ \ \forall T,\ \ T>0.$$

В работе [19] для системы (44), (45) на основе частотного метода был получен такой же результат.

В общем случае, величины $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \tau_5 > 0$ необходимо выбрать из решения оптимизационной задачи

$$|\nu| \le \max_{\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2} \{\text{правая часть (53)}\}.$$

Из (53), в частности, при $\beta = 0$ получим

$$|\nu| \le \frac{2\sqrt{(\frac{1}{T^2}\gamma_0^2 - \gamma_1^2 + 2\gamma_0\gamma_2)\tau_5}}{\frac{1+T^4}{T^3}\gamma_0^2 + T\gamma_2^2 - \frac{1}{T}\gamma_1^2 + \frac{2\gamma_0\gamma_2}{T} + T\tau_5}.$$

Отсюда при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$ имеем

$$|\nu| \le \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma \arcsin\gamma + \sqrt{1-\gamma^2}} \le \frac{2\sqrt{\frac{1}{T^2}\gamma_0^2\tau_5}}{\gamma_0^2(\frac{1+T^4}{T^3}) + T\tau_5}.$$

На основе численных расчетов при $\beta = 0$ для построения зависимости γ от T получены: $T = 1$, $\gamma = 0,6$, $|\nu| = 0,8$; $T = 10$, $\gamma = 0,1$, $|\nu| = 0,1$; $T = 0,5$, $\gamma = 0,8$, $|\nu| = 0,95$. Эти результаты близки к результатам из [20], полученных качественно-численными методами.

7. Математический маятник

Рассмотрим уравнения движения математического маятника (1). Необходимо найти $\gamma_{кр} = \gamma_{кр}(\alpha)$. Уравнение (1) может быть представлено в виде

$$\dot\sigma = x, \;\; \dot x = -\alpha x - \varphi(\sigma), \tag{54}$$

где $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\gamma \in (0,1)$. Обозначая $x = y_1$, получим тождества

$$\varphi(\sigma(t)) = -\alpha y_1 - y_2, \;\; \dot\varphi = -\alpha y_2 - y_3, \;\; \dot\sigma(t) = y_1(t), \;\; t \in I,$$

где $\dot y_1 = y_2$, $\dot y_2 = y_3$. В результате применения теоремы 13, имеем

$$-M_0 - \Gamma_0 > 0: \qquad \tau_1 - \gamma_0^2 > 0, \tag{55}$$

$$P_1 - M_1 - \Gamma_1 > 0: \qquad \tau_1\alpha^2 - \tau_4 - \gamma_1^2 + 2\gamma_0\gamma_2 > 0, \tag{56}$$

$$P_2 - M_2 - \Gamma_2 > 0: \qquad -\tau_1 - \alpha\tau_3 - \alpha^2\tau_4 - \tau_5 + \gamma_2^2 > 0. \tag{57}$$

Из (50) - (52) следует, что

$$|\nu| \le \frac{0,5\pi\gamma}{\gamma\arcsin\gamma + \sqrt{1-\gamma^2}} \le \frac{2\sqrt{(\alpha^2\gamma_0^2 - \gamma_1^2 + 2\gamma_0\gamma_2)\tau_5}}{(\frac{1}{\alpha} + \alpha^3)\gamma_0^2 + \frac{1}{\alpha}\tau_5 + \alpha\gamma_2^2 - \alpha\gamma_1^2 + 2\alpha\gamma_0\gamma_2}.$$

Величины $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \tau_5 > 0$ определяются из решения оптимизационной задачи

$$\max_{\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\tau_5} \frac{2\sqrt{(\alpha^2\gamma_0^2 - \gamma_1^2 + 2\gamma_0\gamma_2)\tau_5}}{(\frac{1}{\alpha} + \alpha^3)\gamma_0^2 + \frac{1}{\alpha}\tau_5 + \alpha\gamma_2^2 - \alpha\gamma_1^2 + 2\alpha\gamma_0\gamma_2}, \;\; tau_5 > 0.$$

В частности при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_0 = \gamma_2$, имеем

$$|nu| \le \frac{2\sqrt{\tau_4\tau_5}}{|\tau_3|} = \frac{2\alpha\gamma_0\sqrt{2+\alpha^2}\sqrt{\tau_5}}{(2+2\alpha^2+\alpha^4)\gamma_0^2 + \tau_5}, \;\; \tau_5 > 0.$$

Результаты численных расчетов: $\alpha = 0,1$, $|\nu| = 0,09$, $\gamma_{кр} = 0,05$; $\alpha = 1$, $|\nu| = 0,775$, $\gamma_{кр} = 0,58$; $\alpha = 10$, $|\nu| = 0,987$, $\gamma_{кр} = 0,94$. Эти результаты совпадают с известными оценками значений $\gamma_{кр}$.

Литература

[1] *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. – М.: Наука, 1969. – 380 с.

[2] *Бакаев Ю.Н., Гуж А.А.* Оптимальный прием сигналов частотней модуляции в условях эффекта Допплера. // Радиотехника и электроника, 1965, т. 10., №1. С. 15-27.

[3] *Шахгильдян В.В., Лиховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. – М.: Связь, 1972. – 364 с.

[4] *Янко-Триницкий А.А.* Новый метод анализа работы синхронных двигателей при резко-переменных нагрузках. – М.: Л.: Госэнерго-издат. 1958, – 240 с.

[5] *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. – М.: Наука, 1971, – 320 с.

[6] *Triomi F.* Integrazione di unequazione differentiale presentatasi in electrotechnica. // Annali della Roma schuola Normale Superiore de Pisa Scienza Physiche e Matematiche V.2, №2, 1933.

[7] *Americo L.* Determihazione delle condizioni de stabilita per gei integrali di un‘eqazione interessante l‘electrotecnica. // Anali di Matematica puza ed applicata. t.30, 1949.

[8] *Seifert G.* On the existence of certain solutions of nonlinear differential equations. // Zeitschrift fiir angewandte Mathematik and Physik, V.3, №3, 1952.

[9] *Леонов Г.А.* Об устойчивости фазовых систем. – Сибирский математический журнал, 1974, №1. с. 105-120.

[10] *Леонов Г.А.* Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством. // Сибирский математический журнал, 1976, №1. С. 10-20.

[11] *Леонов Г.А.* Теорема сведения для нестационарных нелинейностей. // Вестник АГУ, 1977, №7. С. 51-62.

[12] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 570 с.

[13] *Айсагалиев С.А., Айпанов Ш.А.* К теории глобальной асимптотическиой устойчивости фазовых систем // Дифференциальные уравнения, 1999, – т. 35, – №8. С. 37-49.

[14] *Айсагалиев С.А., Иманкул Т.Ш.* Теория фазовых систем. – Алматы: Қазақ универсиеті, 2005. – 272 с.

[15] *Айсагалиев С.А.* Теория устойчивости динамических систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2012. – 216 с.

[16] *Aisagaliev S.A., Kalimoldaev M.N.* Certain problems of synchronization theory. J. Inverse Ill - Posed Probl. 21(2013), pp. 159-175.

[17] *Абенов Б.К., Айсагалиев С.А., Калимолдаев М.Н.* К абсолютной устойчивости регулируемых систем в простом критическом случае. // Математический журнал. 2014. т. 14. №1(51). С. 5-33.

[18] *Абенов Б.К., Айсагалиев С.А., Аязбаева А.М.* К абсолютной устойчивости регулируемых систем в критическом случае. Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2014, № 4(83). С. 12-30.

[19] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубовуч В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[20] *Белюстина Л.Н., Быков В.В., Кивелева К.Г., Шалфеев В.Д.* О величине полосы захвата системы ФАП с пропорционально интегрирующим фильтром. – Известия вузов, Радиофизика, 1970, т. 13, №4. С. 95-106.

References

[1] *Barbashin E.A., Tabueva V.A.* Dinamicheskie sistemy s tsilindricheskim fazovym prostranstvom. – M.: Nauka, 1969. – 380 s.

[2] *Bakaev Ju.N., Guzh A.A.* Optimal'nyi priem signalov chastotnei modulyacii v uslovyah effekta Dopplera. // Radiotehnika i elektronika, 1965, t. 10., No 1. S. 15-27.

[3] *Shahgil'djan V.V., Lihovkin A.A.* Sistemy fazovoi avtopodstroiki chastoty. – M.: Svjaz', 1972. – 364 s.

[4] *Janko-Trinickij A.A.* Novyi metod analiza raboty sinhronnyh dvigatelei pri rezko-peremennyh nagruzkah. – M.: L.: Gosenergo-izdat. 1958, – 240 s.

[5] *Blehman I.I.* Sinhronizaciya dinamicheskih sistem. – M.: Nauka, 1971, – 320 s.

[6] *Triomi F.* Integrazione di unequazione differentiale presentatasi in electrotechnica. // Annali della Roma schuola Normale Superiore de Pisa Scienza Physiche e Matematiche V.2, No 2, 1933.

[7] *Americo L.* Determihazione delle condizioni de stabilita per gei integrali di un'eqazione interessante l'electrotecnica. // Anali di Matematica puza ed applicata. t.30, 1949.

[8] *Seifert G.* On the existence of certain solutions of nonlinear differential equations. // Zeitschrift fiir angewandte Mathematik and Physik, V.3, No 3, 1952.

[9] *Leonov G.A.* Ob ustoichivosti fazovyh sistem. – Sibirskii matematicheskii zhurnal, 1974, No 1. s. 105-120.

[10] *Leonov G.A.* Ob odnom klasse dinamicheskih sistem s cilindricheskim fazovym prostranstvom. // Sibirskii matematicheskii zhurnal, 1976, No 1. S. 10-20.

[11] *Leonov G.A.* Teorema svedeniya dlya nestacionarnyh nelineinostei. // Vestnik AGU, 1977, No 7. S. 51-62.

[12] *Andronov A.A., Vitt A.A., Hajkin S.Je.* Teoriya kolebanii. – M.: Fizmatgiz, 1959. – 570 s.

[13] *Aisagaliev S.A., Aipanov Sh.A.* K teorii global'noi asimptoticheskioi ustoichivosti fazovyh sistem // Differencial'nye uravneniya, 1999, – t. 35, – No 8. S. 37-49.

[14] *Aisagaliev S.A., Imankul T.Sh.* Teoriya fazovyh sistem. – Almaty: Qazaq universieti, 2005. – 272 s.

[15] *Aisagaliev S.A.* Teoriya ustoichivosti dinamicheskih sistem. – Almaty: Qazaq universiteti, 2012. – 216 s.

[16] *Aisagaliev S.A., Kalimoldaev M.N.* Certain problems of synchronization theory. J. Inverse Ill - Posed Probl. 21(2013), pp. 159-175.

[17] *Abenov B.K., Aisagaliev S.A., Kalimoldaev M.N.* K absolyutnoi ustoichivosti reguliruemyh sistem v prostom kriticheskom sluchae. // Matematicheskii zhurnal. 2014. t. 14. No 1(51). S. 5-33.

[18] *Abenov B.K., Aisagaliev S.A., Ayazbaeva A.M.* K absolyutnoi ustoichivosti reguliruemyh sistem v kriticheskom sluchae. Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf. 2014, No 4(83). S. 12-30.

[19] *Gelig A.H., Leonov G.A., Jakubovuch V.A.* Ustoichivost' nelineinyh sistem s needinstvennym sostoyaniem ravnovesiya. – M.: Nauka, 1978. – 400 s.

[20] *Belyustina L.N., Bykov V.V., Kiveleva K.G., Shalfeev V.D.* O velichine polosy zahvata sistemy FAP s proporcional'no integrirujushhim fil'trom. – Izvestiya vuzov, Radiofizika, 1970, t. 13, No 4. S. 95-106.