УДК 517.938

Алдибеков Т.М*., Молдабек Ж.Т.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
*E-mail: tamash59@mail.ru

Об обобщенно экспоненциально дихотомических системах дифференциальных уравнений

В данной работе рассматривается линейная однородная система дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами на полупрямой. Коэффициентная матрица по норме оценивается некоторой положительной непрерывной функцией, которая интеграл от нее на полупрямой расходится. В работе вводится понятие обобщенно экспоненциальной дихотомии решении линейной однородной системы дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами, которое является более общим, чем понятие э - дихотомичной системы в конечномерном случае. Используется линейное преобразование, которое является обобщенным Ляпуновским преобразованием. Устанавливаются разбиение пространство решений линейной системы дифференциальных уравнений в прямую сумму подпространств решений и соответствующие оценки в подпространствах решений. Кроме того устанавливается, что взаимный наклон подпространств ограничен снизу. Использованием обобщенных верхних и нижних центральных показателей линейной системы дифференциальных уравнений доказывается существования линейной однородной системы дифференциальных уравнений обладающей свойством обобщенной экспоненциальной дихотомии на полуоси. Исследуется линейная неоднородная система дифференциальных уравнений и использованием понятие обобщенной экспоненциальной дихотомии решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами, приведен признак существование не менее одного ограниченного решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: экспоненциальная дихотомия, линейная система, ограниченное решение, разбиение пространств, дифференциальные системы.

Aldibekov T.M., Moldabek Zh.T.

On generalized exponentially dichotomous systems of differential equations

In this paper linear homogeneous system of differential equations with continuous coefficients is considered on the semiaxis. The coefficient matrix is estimated at a rate of some positive continuous function, and its integral in the semiaxis diverges. This paper introduces the concept of a generalized exponential dichotomy of solutions of linear homogeneous systems of differential equations with continuous coefficients, which is more general than the concept of e - dichotomous system in the finite measure case. A generalized Lyapunov transformations-linear transformation is used. Installed partition of the space of solutions of a linear system of differential equations in the direct sum of the subspaces of solutions and the corresponding estimates in the subspaces solutions installed as well. Also we have known about below bounding of the mutual inclination of subspace. Generalized upper and lower central exponents of linear systems of differential equations are used to prove the existence of a homogeneous system of linear differential equations, which has the property of generalized exponential dichotomy on the semiaxis. We studied the linear non-homogeneous system of differential equations and using the concept of generalized exponential dichotomy of the solutions of the homogeneous system of linear differential equations with continuous coefficients we obtained the existence of at least one bounded solution of an inhomogeneous system of linear differential equations.

Key words: exponentially dichotomy, linear system, bounded solution, partition of space, differential systems.

Алдибеков Т.М., Молдабек Ж.Т.

Жалпылама дихотомиялық дифференциалдық теңдеулер жүйесі туралы

Берілген жұмыста коэффициенттері үзіліссіз сызықты дифференциалдық теңдеулерінің біртекті жүйесі жатырлай өсте қарастырылады. Коэффициентік матрица кейбір оң үзіліссіз функциясы көмегімен бағаланады, және де ол функциядан жартылай өсте алынған интеграл жинақталмайды. Жұмыста коэффициенттері үзіліссіз біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер шешімінің жалпылама экспоненциалды дихотомиялығы түсінігі енгізіледі, және бұл түсінік ақырлы өлшемді жағдайдағы э - дихотомиялы жүйе түсінігіне қарағанда жалпы болып табылады. Жалпылама Ляпунов түрлендіруі болып табылатын сызықты түрлендіру қолданылады. Сызықты дифференциалды теңдеулер жүйесінің шешімдер кеңістігін шешімдер ішкеңістіктерінің тура қосындысына бөліктеу және сәйкес ішкеңістіктердегі шешімдердің бағасы орнатылады. Оған қоса ішкеңістіктердің өзара көлбеуі төменнен шенелгендігі орнатылады. Сызықты дифференциалдық теңдеулердің жалпылама жоғарғы және төменгі орталық көрсеткіштерін пайдалану арқылы жартылай өсте экспоненциалды дихотомиялы қасиеті бар дифференциалдық теңдеулердің сызықты біртекті жүйесінің табылатындығы дәлелденеді. Біртексіз сызықты дифференциалды теңдеулер жүйесі зерттеліп, коэффициентері үзіліссіз сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерінің жалпылама экспоненциалды дихотомиялық ұғымын қолдану арқылы дифференциалдық теңдеулердің сызықты біртексіз жүйесінің ең болмағанда бір шенелген шешімінің табылу белгісі келтірілген.
Түйін сөздер: экспоненциалды дихотомия, сызықтық жүйелер, шенелген шешім, кеңістікті бөліктеу, дифференциалдық жүйелер.

Введение

В работе основной целью является изучение экспоненциальной дихотомии решений и более общего понятия - обобщенной экспоненциальной дихотомии решений линейной системы дифференциальных уравнений. Понятие экспоненциальной дихотомии имеет большой роль в вопросах существования ограниченных решений неоднородной системы дифференциальных уравнений. Это свойство раскрывается и у линейной однородной системы обладающим свойством обобщенной экспоненциальной дихотомии решений. В работе условие ограниченности коэффициентов линейной однородной системы снимается и допускается более общее условие. Многие задачи приводится к таким системам и необходимость исследование таких систем споров не вызывает. В связи с этим излагается полученные результаты.

Об обобщенно экспоненциально дихотомических системах дифференциальных уравнений

Рассматривается линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, x \in R^n, t \in I = [0; +\infty) \tag{1}$$

где непрерывная $n \times n$ матрица-функция $A(t)$ удовлетворяет неравенству $|A(t)| \leq \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - положительная непрерывная функция на I. Предполагаем, что

$$q(t) \equiv \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s)ds \to +\infty, t \to +\infty, t_0 \geq 0.$$

Определение 1. Если линейное пространство $L^n(t)$ решений линейной однородной системы (1) разлагается в прямую сумму подпространств $L^k(t)$ и $M^{n-k}(t)$ при некотором

$k \in \{1, ..., n-1\}$, т.е. имеет место разложение $L^n(t) = L^k(t) \oplus M^{n-k}(t)$ и выполняются следующие условия: 1) для любого решения $x(t)$ из подпространства $L^n(t)$ при $t \geq s \geq 0$ выполняется неравенство

$$\|x(t)\| \leq d\|x(s)\|e^{-\nu[q(t)-q(s)]}$$

где $d > 0$, $\nu > 0$ постоянные не зависящие от выбора решений из $L^k(t)$; 2) для любого решения $x(t)$ из подпространства $M^{n-k}(t)$ при $t \geq s \geq 0$ выполняется неравенство

$$\|x(t)\| \leq D\|x(s)\|e^{\mu[q(t)-q(s)]}$$

где $D > 0$, $\mu > 0$ постоянные не зависящие от выбора решений из $M^{n-k}(t)$; 3) взаимный наклон подпространств $L^k(t)$ и $M^{n-k}(t)$ при $t \geq 0$ ограничен снизу, т.е. существует $\gamma > 0$ и имеет место неравенство

$$Sn\big(L^k(t), M^{n-k}(t)\big) \equiv \inf \|x_1 + x_2\| \geq \gamma,$$

где точная нижняя грань берется по всем парам решений

$$x_1 \in L^k(t), x_2 \in M^{n-k}(t), \|x_1(t)\| = \|x_2(t)\| = 1$$

тогда будем говорить, что линейное пространство $L^n(t)$ решений линейной однородной системы (1) допускает полную экспоненциальную дихотомию с индексом $k \in 1, ..., n-1$ относительно $q(t)$ на полуоси $t \geq 0$. Если так, то для краткости будем говорить, что система (1) обладает свойством обобщенной экспоненциальной дихотомии на полуоси $t \geq 0$. Примечание. Если $q(t) = t$ и рассматривается линейная однородная система с ограниченными коэффициентами, то понятие обобщенной экспоненциальной дихотомии превращается в обычное определение э - дихотомичной системы [1,с. 232]. Напомним, что линейное преобразование $x = L(t)u$ называется обобщенным Ляпуновским [2,с. 187], если матрицы $L(t), L^{-1}(t)$ непрерывные ограниченные на всей полуоси $t \geq 0$, а матрица $\dot{L}$ удовлетворяет неравенству $\|\dot{L}\| \leq \varphi(t)$. Все необходимые сведения, используемые в работе содержаться в [2,с. 140].

Теорема 1. Если линейная однородная система (1) обобщенным Ляпуновским преобразованием приводится к блочно-треугольному виду

$$\frac{du}{dt} = B(t)u \tag{2}$$

где $B(t) = diagB_1(t), B_2(t), B_1(t)$ - треугольная матрица порядка $k \in \{1, ..., n-1\}$, $B_2(t)$ - треугольная матрица порядка n-k, блоки экспоненциально разделены относительно $q(t)$ причем: 1) у каждой блок системы обобщенно-верхний $\Omega(B_i, q)$ и обобщенно-нижний $\omega(B_i, q)$ центральные показатели совпадают,

$$\Omega(B_i, q) = \omega(B_i, q), i = 1, 2.$$

2) имеют места неравенства

$$\Omega(B_1, q) < 0, \omega(B_2, q) > 0$$

то система (1) обладает свойством обобщенной экспоненциальной дихотомии на полуоси $t \geq 0$. Доказательство. В силу свойств обобщенного преобразования Ляпунова обобщенные показатели Ляпунова линейной системы (1) при преобразовании не меняются, причем в силу условия теоремы обобщенные показатели первой блок системы

$$\frac{du}{dt} = B_1(t)u \tag{3}$$

взаимно равны и определяется числом $\Omega(B_1, q)$, а обобщенные показатели второй блок системы

$$\frac{du}{dt} = B_2(t)u \tag{4}$$

тоже взаимно равны и определяется числом $\Omega(B_2, q)$. Множество всех решений блок системы (3) образует k - мерное подпространство $E_k(q)$, а множество всех решений блок системы (4) образует $n-k$ - мерное подпространство $E_{n-k}(q)$ в линейном пространстве решений линейной однородной системы (2). Положим $L^k(t) = L^{-1}E_k(q)$ и $M^{n-k}(t) = L^{-1}E_{n-k}(q)$. В силу свойств обобщенного преобразования Ляпунова любое ненулевое решение из подпространства $L^k(t)$ имеет отрицательный обобщенный показатель равный $\Omega(B_1, q)$, а любое ненулевое решение из подпространства $M^{n-k}(t)$ имеет положительный обобщенный показатель равный $\Omega(B_2, q)$. Следовательно, для линейного пространства $L^n(t)$ решений линейной однородной системы (1) при $k \in \{1, ..., n-1\}$, имеет место разложение

$$L^n(t) = L^k(t) \oplus M^{n-k}(t). \tag{5}$$

Из определения обобщенного верхнего центрального показателя вытекает, что для любого решения $u \in E_k(q)$ при $t \geq s \geq 0$ имеет место неравенство

$$\|u(t)\| \geq d_1 \|u(s)\| e^{-\nu[q(t)-q(s)]},$$

где $d_1 > 0, \nu \equiv -\Omega(B_1, q) > 0$ - постоянные, не зависящие от выбора решений $u \in E_k(q)$. Из определения обобщенного нижнего центрального показателя получаем, что для любого решения $u(t)$ из подпространства $E_{n-k}(q)$ при $t \geq s \geq 0$ выполняется неравенство

$$\|u(t)\| \geq D_1 \|u(s)\| e^{\mu[q(t)-q(s)]}$$

где $D_1 > 0, \mu = \Omega(B_2, q) > 0$ - постоянные, не зависящие от выбора решений из $E_{n-k}(q)$. Теперь применяя обратное обобщенное преобразования Ляпунова $u = L^{-1}(t)x$ к системе (2) и учитывая, что при этом обобщенные верхние и обобщенные нижние центральные показатели не меняются, получаем первое и второе условий в определении. В силу условия теоремы обобщенные показатели Ляпунова линейной однородной системы (1) являются непрерывными функционалами от матричных коэффициентов. Тогда, имеет место неравенство

$$\sphericalangle\big(x_1(t), x_2(t)\big) > 0$$

где $x_1(t) \in L^k(t)$, а $x_2(t) \in M^{n-k}(t)$. Заметим, что линейная система (1) имеет обобщенный верхний центральный показатель $\Omega(A, q) = \Omega(B_2, q)$. Для матрицы Коши $U(t, s) = U(t)U^{-1}(s)$ системы (1) имеет место оценка

$$\|U(t, s)\| \leq D_2 e^{\Omega(A,q)[q(t)-q(s)]}, D_2 > 0$$

Зафиксируем $t \in I$, и пусть

$$x_1(t) \in L^k(t), \;\; x_2(t) \in M^{n-k}(t), \;\; \|x_1(t)\| = \|x_2(t)\| = 1$$

тогда для решений

$$x_1(t+m) = U(t+m,t)x_1(t), \;\; x_2(t+m) = U(t+m,t)x_2(t), \;\; t \in I$$

для любого $m \geq 1$ выполняются неравенства

$$\|x_1(t+m)\| \leq de^{-\mu[q(t+m)-q(t)]}, \|x_2(t+m)\| \leq De^{\nu[q(t+m)-q(t)]}$$

Далее, имеем $\|x_1(t)+x_2(t)\| \geq \frac{1}{D_2 e^{\Omega(A,q)[q(t+m)-q(t)]}} \|U(t+m,t)x_1(t) + U(t+m,t)x_2(t)\| \geq \frac{1}{D_2 e^{\Omega(A,q)[q(t+m)-q(t)]}} \big(\|x_2(t+m)\| - \|x_1(t+m)\|\big) \geq \frac{1}{D_2 e^{\Omega[q(t+m)-q(t)]}} \big(De^{\Omega[\mu q(t+m)-q(t)]} - de^{-\nu[q(t+m)-q(t)]}\big) \geq$

$\frac{D}{D_2} - \frac{d}{D_2} e^{-(\mu+\nu)[q(t+m)-q(t)]} = \gamma_m$, следовательно, при достаточно большом m существует такое положительное число γ и при $t \geq 0$ имеет место неравенство

$$Sn(L^k(t), M^{n-k}(t)) \equiv \inf \|x_1 + x_2\| \geq \gamma$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если для решений системы (1) имеет место обобщенная экспоненциальная дихотомия на промежутке I, тогда для каждой непрерывной векторной функции $f(t) = colon[f_1(t), \ldots, f_n(t)], t \geq 0$ удовлетворяющей неравенству $\|f(t)\| \leq \varphi(t)$, при $t \geq 0$ линейная неоднородная система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

имеют не менее одного ограниченного решения на промежутке I. Доказательство. Пусть $P_1(t)$ и $P_2(t)$ - проекторы, соответствующие прямому разложению $L^n(t) = L^k(t) \oplus M^{n-k}(t)$, при котором для решений системы (1) имеет место обобщенная экспоненциальная дихотомия на промежутке I.

$$L^k(t) = P_1(t)L^n(t), \;\; M^{n-k}(t) = P_2(t)L^n(t), \;\; P_1(t) + P_2(t) = E,$$

E- тождественный оператор в пространстве решений $L^n(t)$. Легко проверяется, что выполняются следующие неравенства

$$\|U(t)P_1U^{-1}(s)\| \leq d_1 e^{-\nu[q(t)-q(s)]}, \;\; t \geq s, \;\; d_1 > 0$$

$$\|U(t)P_2U^{-1}(s)\| \leq D_1 e^{-\mu[q(s)-q(t)]}, \;\; s \geq t, \;\; D_1 > 0,$$

где $U(t)$ - фундаментальная матрица системы (1). Положим

$$G(t,s) \equiv U(t)P_1U^{-1}(s), \;\; t > s,$$

$$G(t,s) \equiv U(t)P_2U^{-1}(s), \;\; t < s, \;\; (t, s \in I).$$

Функция $G(t,s)$ при всех $t \neq s$ дифференцируема по t и по s и удовлетворяет системе (1). Когда $t = s$ функция доопределяется по непрерывности и терпит разрыв

$$G(t+0,t) - G(t-0,t) = E, \quad G(t,t+0) - G(t,t-0) = -E$$

Далее
$\int\limits_0^{+\infty}(\|G(t,s)\|\|f(s)\|)ds \leq \int\limits_0^{t}(\|U(t)P_1U^{-1}(s)\|\|f(s)\|)ds + \int\limits_t^{+\infty}(\|U(t)P_2U^{-1}(s)\|\|f(s)\|)ds \leq$
$\leq \int\limits_0^{t}(d_1e^{-\nu[q(t)-q(s)]}\varphi(s))ds + \int\limits_t^{+\infty}(D_1e^{-\mu[q(s)-q(t)]}\varphi(s)ds) \leq d_1e^{-\nu q(t)}\int\limits_0^{t}(e^{\nu q(s)})dq(s) +$
$+ D_1e^{\mu q(t)}\int\limits_t^{+\infty}(e^{-\mu q(s)})dq(s) \leq \frac{d_1}{\nu} + \frac{D_1}{\mu}.$
Следовательно, для каждой непрерывной векторной функции $f(t) = colon[f_1(t),\ldots,f_n(t)], t \geq 0$ удовлетворяющей неравенству $\|f(t)\| \leq \varphi(t)$ при $t \geq 0$ интеграл

$$\int\limits_0^{\infty}(G(t,s)f(s))ds$$

сходится и очевидно, что допускает дифференцирование под знаком интеграла. Непосредственно проверяется, что функция

$$x(t) \equiv \int\limits_0^{\infty}(G(t,s)f(s))ds$$

является решением линейной неоднородной системы. Добавляя к этому частному решению решение из подпространства $L^k(t)$, $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ получим утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.
Пример. Линейная неоднородная система

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}x + \frac{1}{\sqrt{t+1}e^{\sqrt{t+1}}}y + f_1(t), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-1}{2\sqrt{t+1}}y + f_2(t),$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывные функций при $t \geq 0$, удовлетворяющие неравенству

$$\|f(t)\| \equiv \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)} \leq \frac{1}{2\sqrt{t+1}},$$

имеет хотя бы одно ограниченное решение. Так как линейная однородная системы обладает свойством обобщенной экспоненциальной дихотомии относительно $q(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t_0+1}$ на промежутке $t \geq 0$.

Заключение

Введено понятие обобщенно экспоненциальной дихотомии решении линейной однородной системы дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами, которое является более общим, чем понятие э - дихотомичной системы в конечномерном случае. Доказано существование линейной однородной системы дифференциальных уравнений обладающей свойством обобщенной экспоненциальной дихотомии на полуоси. Использованием понятие обобщенной экспоненциальной дихотомии решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами, приведен признак существование не менее одного ограниченного решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирование научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, №0764/ГФ4.

Литература

[1] *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве //Москва. – 1970.– С. 536.

[2] *Алдибеков Т.М.* Обобщенные показатели Ляпунова. - Алматы.,–2011.–С.254.

[3] *Coppel W.A.* Dichotomies and reducibility, J. of Diff. Equations. – 1967.– Т. 3,4, – С. 500-521.

[4] *Майзель А.Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений. //Труды Уральского политехн. ин-та, 51, сер. Матем – 1954 .– С. 20-50.

[5] *Массера Ж., Шеффер Ж.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.- "Мир М.– 1970.–С. 456

[6] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. -"Мир М., – 1970. – С. 720.

References

[1] *Daletskiy Y.L., Krein M.G.* Ustoichivost' resheniy differentsial'nyh uravneniy v banahovom prostranstve // Moskva.– 1970.– S. 536

[2] *Aldibekov T.M.* Obobshennye pokazateli Lyapunova. - Almaty.,–2011.–S.254.

[3] *Coppel W.A.* Dichotomies and reducibility, J. of Diff. Equations. – 1967.– T. 3,4, – S. 500-521.

[4] *Maizel' A.D.* Ob ustoichivosti resheniy sistem differentsialnyh uravneniy. //Trudy politehnicheskogo instituta, 51, ser. Matem – 1954 .– S. 20-50.

[5] *Massera J., Sheffer J.* Lineinye differentsial'nye uravneniya i funktsional'nye prostranstva.– "Mir M.–1970.–S. 456

[6] *Hartman F.* Obyknovennye differentsial'nye uravneniya.– "Mir M.–1970.–S. 720