УДК 517.938

Алдибеков Т.М*., Мирзакулова А.Е., Алдажарова М.М.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
*E-mail: tamash59@mail.ru

Об устойчивых асимптотических характеристиках дифференциальных систем

Целью работы является исследование центральных показателей линейных однородных систем дифференциальных уравнений с непрерывными и ограниченными коэффициентами в критических случаях и разработка устойчивых характеристик дифференциальных систем в случаях нулевых значений центральных показателей. Методологию работы составили методы качественной теории дифференциальных уравнений, методы первого приближения дифференциальных систем, методы центральных показателей. В работе в критических случаях центральных показателей определяются обобщенные верхнее и нижнее центральные показатели линейных однородных систем дифференциальных уравнений с непрерывными со стремящимися к нулю коэффициентами. Получено достаточное условие асимптотической устойчивости линейной системы. Установлена связь обобщенной верхней функцией исходной системы с обобщенной нижней функцией сопряженной линейной системы. Использованием обобщенного верхнего центрального показателя установлена сверху равномерная оценка решений нелинейных систем дифференциальных уравнений. Использованием обобщенного нижнего центрального показателя установлена снизу равномерная оценка решений нелинейных систем дифференциальных уравнений. Приведен признак устойчивости нулевого решения нелинейной системы дифференциальных уравнений по первому приближению. Полученные результаты являются совершенствованием метода центральных показателей в критических случаях. Выводы авторов могут быть использованы в процессе теоретических задачах и в ряде приложений теории дифференциальных уравнений.
Ключевые слова: показатели, центральные показатели, полунепрерывность, линейные системы, устойчивость, оценка решений

Aldybekov T.M., Mirzakulova A.E., Aldazharova M.M.

On the stability asymptotic characteristics of the differential equations

The aim is to study the central exponents of linear homogeneous systems of differential equations with continuous and bounded coefficients in critical cases and the development of stable characteristics of differential systems in the case of zero values of the central figures. The methodology of work amounted to methods of the qualitative theory of differential equations, methods of the first approximation of differential systems, methods of the central figures. The work in critical cases determined by central exponents of generalized upper and lower central exponents of linear homogeneous systems of differential equations with continuous coefficients tending to zero. A sufficient condition for the asymptotic stability of a linear system. The connection of the generalized upper function of the original system with the dual function of a generalized lower linear system. Using generalized upper central figure set top uniform estimate of solutions of nonlinear systems of differential equations. By using the generalized lower central figure installed below the uniform estimate of solutions of nonlinear systems of differential equations. An indication of the stability of the trivial solution of nonlinear differential equations of the first approximation.The results are the improvement of the method of the central figures in critical cases. The authors' conclusions may be used in the process of theoretical problems in a number of applications of the theory of differential equations.
Key words: indicators, central figures, semi, linear systems, stability estimation solutions

Алдибеков Т.М., Мирзакулова А.Е., Алдажарова М.М.

Дифференциалдық жүйелердің орнықты асимптотикалық сипаттауыштары туралы

Жұмыстың мақсаты сыни жағдайлардағы үзіліссіз және шенелген коэффициенттері бар сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің орталық көрсеткіштерін және орталық көрсеткіштердің нөлдік мәндерінде дифференциалдық жүйелерінің орнықты сипаттауыштарын зерттеу болып табылады. Жұмысты зерттеуде дифференциалдық теңдеулердің сапалық теориясының, дифференциалдық жүйелердің бірінші жуықтау және орталық көрсеткіштер әдістері қолданылды. Нөл санына ұмтылатын үзіліссіз сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпыланған жоғарғы және төменгі орталық көрсеткіштері анықталынды. Сызықты жүйелердің асимптотикалық орнықтылығының жеткілікті шарты алынды. Берілген жүйенің жалпыланған жоғарғы функциясы мен түйіндес сызықты жүйенің жалпыланған төменгі функция арасындағы байланыс орнатылды. Жалпыланған жоғарғы орталық көрсеткішті қолдану арқылы сызықтық емес дифференциалдық теңдеу-лер жүйелерінің шешімдерінің бірқалыпты жоғарғы бағалауы орнатылды. Жалпыланған төменгі орталық көрсеткішті қолдану арқылы сызықтық емес дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің шешімдерінің бірқалыпты төменгі бағалауы орнатылды. Сызықтық емес дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің нөлдік шешімдерінің бірінші жуықтау бойынша орнық-тылығының белгісі келтірілді. Алынған нәтижелер сыни жағдайлардағы орталық көрсеткіш-тер әдісін жетілдіру болып табылады. Авторлардың қорытындыларын дифференциалдық теңдеулер теориясында және теориялық есептерді шешкенде қолданылады.

Түйін сөздер: көрсеткіштер, орталық көрсеткіштер, сызықтық жүйелер, орнықтылық, шешімнің бағалауы

Введение

Центральные показатели линейной системы дифференциальных уравнений с непрерывными и ограниченными коэффициентами имеют связь с теорией показателей Ляпунова[1-2]. После обнаружения, что показатели Ляпунова линейной системы дифференциальных уравнений, вообще говоря, неустойчивы, началось развитие теории характеристических показателей в следующих направлениях:во-первых, стали искать класс систем, для которых совокупность характеристических показателей устойчива, во-вторых, стали искать более устойчивых характеристик системы. Введенные Р.Э. Виноградом [3-4] верхнее и нижнее центральные показатели линейных систем с непрерывными и ограниченными коэффициентами относятся ко второму направлению, а именно при малых возмущениях верхний центральный показатель устойчив вверх, а нижний центральный показатель устойчив вниз. В противоположных направлениях имеет места неустойчивость [5]. Результаты частично докладывались на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в МГУ им. М.В. Ломоносова [6]. Во многих теоретических задачах и в ряде приложений теории дифференциальных уравнений возникают системы дифференциальных уравнений с нулевыми значениями центральных показателей. Поэтому исследование линейных систем в критических случаях центральных показателей представляет определенный интерес.

Основная часть

Рассматривается линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, x \in R^n, t \geqslant t_0 \tag{1}$$

где матрица $A(t)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$|A(t)| \leq C_A \varphi(t), t \geqslant t_0, \tag{2}$$

где C_A - постоянная зависящая от выбора матриц A, а $\varphi(t)$ - положительная непрерывная функция на промежутке $[t_0, +\infty)$ функция такая, что

$\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$ и интеграл $I(\varphi) = \int\limits_{t_0}^{+\infty} \varphi(s)ds$ расходится.

Заметим, что центральные показатели системы (1) удовлетворяющие условию (2) равны нулю. Далее вводятся асимптотические характеристики адекватные для исследования таких систем.

Обозначим

$$q(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s)ds. \tag{3}$$

Определение 1. Функций $r_q(t)$ и $R_q(t)$ называются соответственно обобщенной нижней и обобщенной верхней относительно q для системы (1) с условием (2), если они ограничены, измеримы и для всех ненулевых решений $x(t)$ системы (1) осуществляют оценки

$$d_{r,\varepsilon} exp\{\int\limits_{s}^{t} (r_q(\tau) - \varepsilon)dq(\tau)\} \leq |x(t)|/|x(s)| \leq D_{R,\varepsilon} exp\{\int\limits_{s}^{t} (R_q(\tau) + \varepsilon)dq(\tau)\} \tag{4}$$

для всех $t \geq s \geq t_0$, $\quad D_{R,\varepsilon} \quad d_{r,\varepsilon}-$ константы, зависящие от выбора $R_q(t)$, $\quad r_q(t) \quad \varepsilon > 0$ и функция $q(t)$ определена по формуле (3). Множество обобщенных верхних функций $\{R_q(t)\}$ в правой части неравенства (4) называется верхним классом системы (1) относительно q и обозначается символом $B(A, q)$. Множество обобщенных нижних функций $\{r_q(t)\}$ в левой части неравенства (4) называется нижним классом системы (1) относительно q и обозначается символом $H(A, q)$.

Пусть

$$\Omega(R, q) = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, 1/q(t) \int\limits_{t_0}^{t} R_q(\tau)dq(\tau), \tag{5}$$

$$\omega(r, q) = \underline{\lim_{t\to+\infty}}\, 1/q(t) \int\limits_{t_0}^{t} r_q(\tau)dq(\tau). \tag{6}$$

Определение 2. Число

$$\Omega(A, q) = \inf_{R\in B(A,q)} \Omega(R, q) \tag{7}$$

называется обобщенным верхним центральным показателем системы (1) относительно q, где $\Omega(R,q)$ определяется по формуле (5).

Число

$$\omega(A,q)=\sup_{r\in H(A,q)}\omega(r,q) \tag{8}$$

называется обобщенным нижним центральным показателем системы (1) относительно q , где $\omega(r,q)$ определяется по формуле (6)

Из определения 1 вытекает, что имеет место неравенство $\omega(r,q)\leq\Omega(R,q)$, следовательно, выполняется неравенство

$$\omega(A,q)\leq\Omega(A,q). \tag{9}$$

Примечание 1.Заметим,что если рассматриваются линейные системы (1) с ограниченными коэффициентами без условия (2) и $q(t)=t$, то обобщенные центральные показатели превращаются в центральные показатели,введенные Виноградом Р.Э. Из определения 1 следует, что функций $\{r_q(t)\}$ и $\{R_q(t)\}$ являются соответственно обобщенной нижней и обобщенной верхней относительно q для системы (1) с условием (2), тогда и только тогда, когда для матрицы Коши $X(t,s)$ системы (1) соответственно выполняются неравенства

$$d_{r,\varepsilon}exp\{\int\limits_s^t(r_q(\tau)-\varepsilon)dq(\tau)\}\leq|X(t,s)|,(t\geqslant s\geqslant t_0) \tag{10}$$

и

$$|X(t,s)|\leq D_{R,\varepsilon}exp\{\int\limits_s^t(R_q(\tau)+\varepsilon)dq(\tau)\},(t\geqslant s\geqslant t_0) \tag{11}$$

Заметим, из (7), (8), (10), (11) следует, что для любого $\varepsilon>0$ существуют $D_\varepsilon>0$ и $d_\varepsilon>0$ и для матрицы Коши линейной системы (1) с условием (2) выполняются неравенства

$$|X(t,t_0)|\leqslant D_\varepsilon e^{(\Omega(A,q)+\varepsilon)(q(t)-q(t_0))} \tag{12}$$

и

$$d_\varepsilon e^{(\omega(A,q)-\varepsilon)(q(t)-q(t_0))}\leqslant|X(t,t_0)|$$

при всех $t\geqslant t_0$.

Из оценки (12) вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. Если линейная система (1) с условием (2) имеет отрицательный обобщенный верхний центральный показатель относительно q, то линейная система (1) асимптотически устойчива по Ляпунову при $t\to+\infty$. Заметим, если $|A(t)-B(t)|\to 0, t\to+\infty$, то отсюда не следует, что линейные системы (1) и $\dot{x}=B(t)x$ имеют общие обобщенные центральные показатели. Преобразование $x=S(t)y$ называется обобщенным Ляпуновским преобразованием, если существуют $S^{-1}(t),\dot{S}(t)$, кроме того матрицы $S(t),S^{-1}(t)$

ограниченные по норме и выполняется неравенство $|\dot{S}(t)| \leqslant C_S\varphi(t)$, при $t \geqslant t_0$. Обобщенное преобразование Ляпунова не меняет обобщенных центральных показателей.

Лемма 2. Если $r_q(t)$ обобщенная нижняя функция относительно q для системы (1) с условием (2), то $r_q(t)$ является обобщенной верхней функцией для сопряженной системы

$$\dot{y} = -A^*(t)y. \tag{13}$$

Доказательство. Для матрицы Коши $X(t,s)$ системы (1) имеет место равенство

$$\min |x(t)|/|x(s)| = 1/|X^{-1}(t,s)|$$

и из определения обобщенной нижней функции следует, что

$$|X^{-1}(t,s)| \leqslant 1/d_{r,\varepsilon} exp\{\int\limits_s^t (-r_q(\tau)+\varepsilon)dq(\tau)\} \tag{14}$$

С другой стороны имеем

$$|X^{-1}(t,s)| = |Y(t,s)|, \tag{15}$$

где $Y(t,s)$ матрица Коши сопряженной системы (13).Теперь из (14),(15) вытекает требуемое утверждение. **Лемма 2 доказана.** Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), x \in R^n, t \in I \equiv [t_0, +\infty), \tag{16}$$

где матрица $A(t)$ непрерывна при $t \geqslant t_0$ и удовлетворяет условию (2), векторная функция $f(t,x)$ непрерывна в области $G = I \times R^n$ и $f(t,0) = 0$. Класс векторных функций $f(t,x)$ удовлетворяющих неравенству

$$|f(t,x)| \leqslant \delta(t)|x|, \tag{17}$$

где норма возмущений удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty} \delta(t)/\varphi(t) = 0 \tag{18}$$

обозначим $L(\varphi(t))$, где $\delta(t)$ непрерывная функция при $t \geqslant t_0$.

Теорема 1. Если в нелинейной системе (16), для системы первого приближения (1) выполняется условие (2) и возмущения $f(t,x) \in L(\varphi(t))$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $D_\varepsilon > 0$ такое, что для всех ненулевых решений системы (16) равномерно выполняется неравенство

$$|x(t)| \leqslant D_\varepsilon |x(t_0)| e^{(\Omega(A,q)+\varepsilon)(q(t)-q(t_0))} \tag{19}$$

при всех $t \geq t_0$.

Доказательство. Как известно решения возмущенной системы (16) удовлетворяют уравнению

$$x(t) = X(t,t_0)x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,s)f(s,x(s))ds. \qquad (20)$$

Используя (12) и (17) оценивая по норме (20) получим неравенство

$$|x(t)| \leq D_{\varepsilon_1} e^{(\Omega(A,q)+\varepsilon_1)(q(t)-q(t_0))}|x(t_0)| + \int\limits_{t_0}^{t} D_{\varepsilon_1} e^{(\Omega(A,q)+\varepsilon_1)(q(t)-q(s))}\delta(s)|x(s)|ds \qquad (21)$$

при всех $t \geqslant s \geqslant t_0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/3 > 0$. Из (21) вытекает следующее неравенство

$$y(t) \leqslant D_{\varepsilon_1}|x(t_0)| + \int\limits_{t_0}^{t} D_{\varepsilon_1}\delta(s)y(s)ds \qquad (22)$$

где

$$y(t) = |x(t)|e^{-(\Omega(A,q)+\varepsilon_1)(q(t)-q(t_0))}. \qquad (23)$$

Следовательно, из (22) вытекает неравенство

$$y(t) \leqslant D_{\varepsilon_1}|x(t_0)|e^{\int\limits_{t_0}^{t} D_{\varepsilon_1}\delta(\tau)d\tau} \qquad (24)$$

Тогда из (23), (24) получаем неравенство

$$|x(t)| \leqslant D_{\varepsilon_1}|x(t_0)|e^{(\Omega(A,q)+\varepsilon_1)(q(t)-q(t_0))+\int\limits_{t_0}^{t} D_{\varepsilon_1}\delta(\tau)d\tau}$$

или в силу (3) вытекает, что

$$|x(t)| \leqslant D_{\varepsilon_1}|x(t_0)|e^{(\Omega(A,q)+\varepsilon_1)(q(t)-q(t_0))+\int\limits_{t_0}^{t} D_{\varepsilon_1}\delta(\tau)/\varphi(\tau)dq(\tau)} \qquad (25)$$

Из условия (18) следует, что существует такое $T \geqslant t_0$, что при всех $t \geqslant T \geqslant t_0$ имеет место неравенство $D_{\varepsilon_1}\delta(t)/\varphi(t) < \varepsilon_1$. Тогда из (25) получаем следующее неравенство

$$|x(t)| \leqslant D_{\varepsilon_1}\overline{D_{\varepsilon}}|x(t_0)|e^{(\Omega(A,q)+2\varepsilon_1)(q(t)-q(t_0))} \qquad (26)$$

где $\overline{D_\varepsilon} = exp(\int\limits_{t_0}^{T} D_{\varepsilon_1}\delta(\tau)d\tau)/exp(\varepsilon_1(q(T)-q(t_0)))$. Теперь полагая $D_\varepsilon \equiv D_{\varepsilon_1}\overline{D_\varepsilon}$ и учитывая, что $2\varepsilon_1 < \varepsilon$ из (26) получим, что для всех ненулевых решений системы (16) равномерно выполняется неравенство (19) при всех $t \geqslant t_0$. **Теорема 1 доказана.** Следствие 1. Если линейная система (1) с условием (2) имеет отрицательный обобщенный верхний центральный показатель относительно q, то нулевое решение нелинейной системы (16) асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$, где возмущения $f(t,x) \in L(\varphi(t))$, более того имеет место экспоненциальная устойчивость относительно q при $t \to +\infty$ [7].

Теорема 2. Если в нелинейной системе (16), для системы первого приближения (1) выполняется условие (2) и возмущения $f(t,x) \in L(\varphi(t))$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $d_\varepsilon > 0$ такое, что для всех ненулевых решений системы (16) равномерно выполняется неравенство

$$|x(t)| \geqslant d_\varepsilon |x(t_0)| e^{(\omega(A,q)-\varepsilon)(q(t)-q(t_0))} \tag{27}$$

при всех $t \geqslant t_0$.

Доказательство. Легко устанавливается следующее утверждение: для любого $\varepsilon > 0$ существует $D_\varepsilon > 0$ такое, что для всех ненулевых решений системы

$$\dot{y} = -A^*(t)y + g(t,y) \tag{28}$$

где $g(t,x) \in L(\varphi(t))$, выполняется неравенство

$$|y(t)| \leqslant D_\varepsilon |y(t_0)| e^{\int\limits_{t_0}^{t} (R_q^*(\tau)+\varepsilon/3) dq(\tau)} \tag{29}$$

при всех $t \geqslant t_0$, где $R_q^*(t)$ обобщенная верхнее функция для сопряженной линейной системы (13).

Известно, что [2, стр.160]: если для всех решений системы (16) при любых возмущениях малости не выше фиксированной справедлива оценка

$$|x(t)| \leqslant |x(t_0)| H(t)$$

то для всех решений системы (28), с той же малостью возмущений справедлива оценка

$$|y(t)| \geqslant |y(t_0)| 1/H(t)$$

и обратно, из $|y(t)| \geqslant |y(t_0)| \cdot H$ следует $|x| \geqslant |x_0|/H$.

Теперь используя это и в неравенстве (29) в силу леммы 2 полагая
$R_q^*(\tau) = -r_q(\tau)$, для всех ненулевых решений системы (16) получаем оценку

$$|x(t)| \geqslant d_\varepsilon |x(t_0)| e^{\int\limits_{t_0}^{t} (r_q(\tau)-\varepsilon/3) dq(\tau)} \tag{30}$$

где $d_\varepsilon = 1/D_\varepsilon$, при всех $t \geqslant t_0$. Из (6), (30) вытекает, что

$$|x(t)| \geqslant d_\varepsilon |x(t_0)| e^{\int\limits_{t_0}^{t} (\omega(r,q)-2\varepsilon/3) dq(\tau)} \tag{31}$$

при всех $t \geqslant t_0$, d_ε универсальная константа. Теперь из (31) используя формулу (8) получаем, что для всех ненулевых решений системы (16) равномерно выполняется неравенство (27) при всех $t \geqslant t_0$. **Теорема 2 доказана.** Определение 3. Отрезок $[\omega(r,q), \Omega(R,q)]$ называется промежутком растяжения обобщенных центральных показателей системы (1) с условием (2) относительно q.

Очевидно, что если у системы (1) с условием (2) имеется промежуток растяжения расположенной в отрицательной полуоси, то линейная система (1) асимптотически устойчива.

Определение 4. Число $\Delta(A,q) = \Omega(A,q) - \omega(A,q)$ называется колебанием обобщенных центральных показателей системы (1) с условием (2) относительно q.

Из (9) следует, что $\Delta(A,q) \geq 0$.

Следствие 2. Если в нелинейной системе (16), для системы первого приближения (1) выполняется условие (2), то для любого $\varepsilon > 0$ существуют $D_\varepsilon > 0$ и $d_\varepsilon > 0$ такие, что при возмущении $f(t,x) \in L(\varphi(t))$, для всех ненулевых решений системы (16) равномерно выполняются неравенства

$$d_\varepsilon |x(t_0)| e^{(\Omega(A,q)-\Delta(A,q)-\varepsilon)(q(t)-q(t_0))} \leqslant |x(t)| \leqslant D_\varepsilon |x(t_0)| e^{(\Omega(A,q)+\varepsilon)(q(t)-q(t_0))}$$

при всех $t \geqslant t_0$.

Следствие 3. Если $\Delta(A,q) = 0$, то линейная система (1) с условием (2) имеют устойчивые обобщенные центральные показатели в классе $L(\varphi(t))$.

Примечание 2. Заметим, что существует целый класс диагональных линейных однородных систем дифференциальных уравнений с равными диагональными элементами имеющие верхние центральные показатели Винограда с нулевыми значениями, но обобщенные верхние центральные показатели являются отрицательными числами. Для таких систем устойчивость и неустойчивость по Ляпунову легко установить применением обобщенных центральных показателей.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dx/dt = -(\sin^2 t + 1)/t \cdot x, t \geqslant t_0 = 1 \tag{32}$$

где $a(t) = -(\sin^2 t + 1)/t$, $|a(t)| \leqslant C_a \varphi(t)$, $C_a = 2$, $\varphi(t) = 1/t$, $q(t) = lnt$.

Легко проверяется, что дифференциальное уравнение (32) имеет отрицательные обобщенные верхнее и нижнее центральные показатели относительно q. Следовательно, нулевое решение нелинейного дифференциального уравнения

$$dx/dt = -(\sin^2 t + 1)/t \cdot x + f(t,x), t \geqslant t_0 = 1$$

где непрерывная функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию $|f(t,x)| \leqslant \delta(t)|x|$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} t\delta(t) = 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$.

Заключение

В работе определены обобщенные верхнее и нижнее центральные показатели линейных однородных систем дифференциальных уравнений с непрерывными со стремящимися к нулю коэффициентами. Установлены равномерные оценки решений нелинейных систем дифференциальных уравнений применением обобщенных центральных показателей. Приведен признак устойчивости нулевого решения нелинейной системы дифференциальных уравнений по первому приближению.Обобщенные центральные показатели используется для исследования по линейному приближению асимптотической устойчивости по Ляпунову.

Литература

[1] *А.М. Ляпунов.* Собрание сочинений // АН СССР. – 1956.– №2.

[2] *Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. - М.: Наука, 1966.

[3] *Р.Э. Виноград.* Математический сборник // Дифференциальные уравнения. – 1957.— Т. 42, № 2.– С. 207-222.

[4] *Р.Э. Виноград.* Доклады АН СССР. – 1957 .–Т.114, №3.– С. 459-461.

[5] *В.М. Миллионщиков.* Дифференциальные уравнения.– 1969.–Т.5, №4. –С. 749-750.

[6] *Т.М. Алдибеков.* Дифференциальные уравнения.– 2010 .–Т.46, №6.– С. 899-900.

[7] *Т.М. Алдибеков, М.М. Алдажарова.* Дифференциальные уравнения. –2014.–Т.50, №10.–С. 1392-1395.

References

[1] *A.M. Lyapunov.* Sobranie sochineniy // AN SSSR.– 1956.– №2.

[2] *B.F. Bylov, R.E. Vinograd, D.M. Grobman, V.V. Nemytskiy.* Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti. - M.: Nauka, 1966.

[3] *R.E. Vinograd.* Matematicheskiy sbornik // Differentsial'nye uravneniya. – 1957.— T. 42, № 2.– S. 207-222.

[4] *R.E. Vinograd.* Doklady AN SSSR. – 1957.–T.114, №3.– S. 459-461.

[5] *V.M. Millionshchikov.* Differentsial'nye uravneniya.– 1969.–T.5, №4. –S. 749-750.

[6] *T.M. Aldybekov.* Differentsial'nye uravneniya.– 2010.–T.46, №6.– S. 899-900.

[7] *T.M. Aldybekov, M.M. Aldazharova.* Differentsialnye uravneniya. –2014.–T.50, №10.–S. 1392-1395.