

УДК 533.9.01; 519.63; 519.684

Мансуров З.А.<sup>1</sup>, Урмашев Б.А.<sup>2</sup>, Исахов А.А.<sup>2\*</sup><sup>1</sup> Институт проблем горения, Республика Казахстан, г. Алматы<sup>2</sup> Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы

\* E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

## Моделирование процесса обработки дисперсных материалов в прямоточном плазменном реакторе

В работе представлено численное моделирование процесса распространения температуры прямоточной плазменном реакторе при различном размере источника тепла, которая решается уравнениями Навье - Стокса и температуры, основанные на методе расщепления по физическим параметрам, которые аппроксимируются разностным конечным методом. При численном решении систему уравнения можно разделить на четыре этапа. На первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии. Промежуточное поле скорости находится методом дробных шагов. На втором этапе, по найденному промежуточному полю скорости, находится поле давления. Уравнение Пуассона для поля давления решается методом Фурье. На третьем этапе предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления. На четвертом шаге уравнения для температуры решается также как уравнения движение, методом дробных шагов. Алгоритм задачи распараллелен на высокопроизводительной системе. Полученные численные результаты процесса распространения температуры в прямоточном плазменном реакторе. Численное моделирование позволяет дать более точное описание процессов, которые были определены теоретически или исследованы лабораторным путем, и могут показать новые физические явления процессов, которые пока не доступны, увидеть в экспериментальных исследованиях.

**Ключевые слова:** прямоточный плазменный реактор, численное моделирование, уравнения Навье-Стокса, метод конечных разностей, метод дробных шагов, метод Фурье.

Mansurov Z.A., Urmashhev B.A., Issakhov A.A.

### Simulation processing of disperse materials process in a continuous-flow plasma reactor

The paper presents a numerical simulation of the propagation of the direct-flow temperature plasma reactor at a different size of the heat source, which is solved by the Navier - Stokes and temperature equations, based on the splitting method by physical parameters that are approximated by finite difference method. In the numerical solution of the equation system can be divided into four stages. The first stage is that the transfer of momentum carried out only by convection and diffusion. The intermediate velocity field is solved by fractional steps method. At the second stage, based on the found intermediate velocity field is a field of pressure. The Poisson equation for pressure field is solved by the Fourier method. In a third step it is assumed that the transfer is carried out only by the pressure gradient. The fourth step of the equation is solved for the temperature equation as well as the motion equations by fractional steps method. The algorithm is parallelized on high-performance systems. With this numerical algorithm was obtained numerical results of temperature distribution in a continuous-flow plasma reactor. Numerical modeling allows us to give a more precise description of the processes that have been identified or studied theoretically by laboratory methods, and can reveal new physical phenomena processes that are not yet available, seen in experimental studies.

**Key words:** direct flow plasma reactor, numerical simulation, Navier-Stokes equations, finite difference method, the fractional steps method, Fourier method.

Мансуров З.А., Урмашев Б.А., Исахов А.А.

### Түзу нүктелі плазмалық реактордағы дисперсті өнімдерді өңдеудің процесін модельдеу

Жылу көзінің әртүрлі өлшемдерінде тура плазмалық реакторда температураның таралуы, жұмыста көрсетілгендей, сандық модельдеу процесіне байланысты, мұндағы шешілетін Навье-Стокс және температура теңдеулері физикалық параметрлердің ыдырау тәсіліне негізделіп, шекті айырымдық жуықтау тәсілін қолданып шешілген. Теңдеулер жүйесінің сандық шешімін төрт кезеңге бөлуге болады. Бірінші кезеңде диффузия мен конвекция есебімен ғана жүзеге асатын қозғалыстар санының ауысуы болжамдалынады. Аралық жылдамдық өрісі бөлшектенген қадам тәсілімен табылады. Ал екінші кезеңде табылған аралық жылдамдық өрісі арқылы қысымды табамыз. Қысым үшін жазылған Пуассон теңдеуі Фурье тәсілімен шешіледі. Үшінші кезеңде тасымал қысым градиенті есебінен ғана жүзеге асады деп болжамдаймыз. Төртінші қадамда бөлшектенген қадамдар тәсілімен температура теңдеуінің шешімі қозғалыс теңдеуі сияқты шешіледі. Есептеу алгоритмі жоғарғы өнімділік жүйесінде параллелденген түрде жүргізіледі. Осылайша есептеу алгоритмі арқылы түзу нүктелі плазмалық реактордағы температураның таралу процесінің есептеуі алынды. Эксперименталды зерттеулерде көрсетілгендей, әзірге қол жетімсіз жаңа физикалық құбылыс процестерін көрсете алады, лабораториялық зерттеулер мен теориялық анықтамалар анықталғандай сандық модельдеу процестерге тура келетіндей сипаттама бере алады.

**Түйін сөздер:** түзу нүктелі плазмалық реактор, сандық модельдеу, Навье-Стокс теңдеулері, шекті айырымдық жуықтау тәсілі, бөлшектенген қадамдар тәсілі, Фурье тәсілі.

## 1. Введение

Актуальность проблемы получения дисперсных материалов несомненна, в силу весьма разнообразного их применения в промышленности. Дисперсные материалы, получающиеся при твердении минеральных вяжущих веществ, образуют важные в практическом отношении дисперсные системы. Наиболее ценное их свойство - прочность. Одной из основных сфер применения высокодисперсных материалов в промышленном производстве является их использование в качестве промежуточной фазы при получении материалов с высокой степенью активности. В свое время именно аэрозольная технология дисперсных материалов сыграла решающее значение в обеспечении повышения объема производства урана-235 - ядерного горючего. В природном уране этого изотопа очень мало - около 0,7%. Чтобы выделить этот драгоценный изотоп, уран превращают в газообразное соединение - гексафторид урана. Затем это соединение многократно, пропускают через диффузионные перегородки, своего рода сита. Соединение более легкого урана-235 диффундирует чуть-чуть быстрее, чем гексафторид урана-238,- всего в 1,005 раза. Но и это ничтожное преимущество может реализовано только тогда, когда размер пор перегородки на много меньше длины свободного пробега молекул  $UF_6$ , который имеет порядок  $10^{-8}$ . Изготовить такую перегородку можно, только спрессовывая и спекая частицы, имеющие размер такого же порядка. Исторически первым дисперсным продуктом, полученным через аэрозоль, является сажа. Различают три типа сажи: каналовая, термическая и печная. Каналовая сажа получается при неполном сгорании природного газа в канале прямоугольного сечения, со стенок, которого ее затем и собирают. Термическую сажу получают не сжиганием, но разложением природного газа при пропускании его через нагреваемый снаружи канал. Этот метод дает самые крупные сажевые частицы радиусом до  $10^{-8}$  м. Наибольшую производительность обеспечивает печной метод, при котором в специальной камере подвергается неполному сгоранию распыленная смесь жидких углеводородов. Получившийся аэрозоль охлаждается при пропускании через

специальную башню и поступает в аппараты для осаждения сажи. Частицы сажи представляют собой шарики размером  $10^{-9}$  -  $10^{-8}$  м, агрегированные в хлопья размером до  $10^{-6}$  м, содержащие сотни и тысячи "первичных" шариков. Сажу используют не только как наполнитель, но и как черный пигмент [2]. Дисперсные системы - гетерогенные системы из двух или большего числа фаз с сильно развитой поверхностью раздела между ними. Обычно одна из фаз образует непрерывную дисперсионную среду, в объеме которой распределена дисперсная фаза (или несколько дисперсных фаз) в виде мелких кристаллов, твердых аморфных частиц, капель или пузырьков. Дисперсные системы могут иметь и более сложное строение, например, представлять собой двухфазное образование, каждая из фаз которого, будучи непрерывной, проникает в объем другой фазы. К таким системам относятся твердые тела, пронизанные разветвленной системой каналов-пор, заполненных газом или жидкостью, некоторые микрогетерогенные полимерные композиции и др. Нередки случаи, когда дисперсионная среда "вырождается" до тончайших слоев (пленок), разделяющих частицы дисперсной фазы [1].

## 2. Математическая модель

В дискретных аналогах коэффициенты переноса на гранях контрольных объемов определяются гармонически средним значением, что позволяет учесть скачкообразные изменения свойств среды и достичь достаточно корректной сопряженности на границе раздела фаз. В твердых телах используются теплофизические свойства материала стенки (электрода) с определяющей температурой тяжелых частиц. Для учета нагрева стенки объемным излучением допускается, что энергия излучения поглощается поверхностным слоем контрольных объемов стенки и рассматривается там как локальный источник тепловыделения. Далее эта энергия отводится теплопроводностью вглубь стенки и обратно - в прилегающий к стенке газ. Для удовлетворения условиям сохранности стенки ставится ограничение на расчетную температуру, которая не превышает температуры плавления материала стенки. Такой подход позволяет рассматривать теплофизические процессы одновременно в твердых телах, плазме и газе, и применять единую методику решения уравнений во всей расчетной области. На его основе в работе [3] разработан метод расчета характеристик дуги от "катода до анода" и получено удовлетворительное согласие результатов расчета с экспериментом. Этот метод удобен в применении, не требует какой-либо дополнительной информации для задания граничных условий вблизи твердых тел и позволяет сравнительно просто учитывать форму и материал электродов. Размеры и расположение катодной и анодной привязок дуги, распределения плотности тока и температуры в электродах и плазме устанавливаются в процессе численного решения как результат самосогласованного взаимодействия тепловых, электромагнитных и газодинамических характеристик. В соответствии с этим при расчете сильноточной дуги атмосферного давления, можно в первом приближении не вникать в сложную кинетику приэлектродных процессов, а сшивку решений, полученных в электродах и плазме, осуществлять по упрощенной схеме: электрод-плазма. Сейчас известны многие математические модели описывающие взаимодействие электрической дуги с потоком газа в плазматроне [4-9]. Исследование процесса распространения дуги плазматрона со сложней геометрией является актуальным для определения образования турбулентности и неравновесных явлений в порождении потока плазмы. Для разработки численной

модели рассмотрены следующие предположения: - частицы двигаются в одном направлении по оси плазменного потока, - выполняется однородность температуры по объему частицы, - учитываются радиационные расходы тепла, - пренебрежение радиационным переносом от плазмы к частице, - отсутствует испарение частицы. В рассматриваемой тепловой задаче для полых частиц характерным размером является толщина стенки частицы ?. Из рассматриваемых предположений, в зависимости от радиуса частиц, получено, что радиационные расходы тепла частицы в теплообмен с газом составляет всего 5%. Для распространения температуры в прямоточном плазменном реакторе была использована корректная математическая модель описывающая процесс нагрева и плавления частиц дисперсного материала и описывается при помощи уравнения Навье - Стокса и уравнения для температуры [17, 18, 19]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \beta g_i (T - T_0) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u_j T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (3)$$

где  $g_i$  – ускорение свободного падения,  $\beta$  – коэффициент объёмного расширения,  $u_i$  - компоненты скорости,  $\chi$  – коэффициент температуропроводности,  $T_0$  – равновесной температуре,  $T$  – отклонение температуры от равновесия.

Система уравнений записана в декартовой системе координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в физическом пространстве, три компоненты скорости  $u_i$ , и давление  $p$  являются неизвестными функциями,  $t$  - время,  $\nu$  - кинематическая вязкость среды (молекулярная),  $\rho$  - плотность среды. В системе уравнений (1) - (3) и ниже по повторяющимся индексам следует производить суммирование.

Необходимо заметить, что система уравнений (1) - (3) в таком виде, в общем случае, не решается. Согласно принципу подобия, (1) - (3) приводится к безразмерному виду. Для приведения уравнений к безразмерному виду выбираются некоторые характерные значения скорости,  $u_0$ , и размера области,  $L_0$ . Используя данные величины, получим систему уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{Gr}{Re^2} T_{max} \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u_j T}{\partial x_j} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (6)$$

Для моделирования турбулентных течений использовалась  $k$ - $\varepsilon$  модель. Турбулентный поток моделируется кинетической энергией пульсационного движения  $k$  и диссипацией скорости  $\varepsilon$ . Часто применяемый на практике из  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности используются следующие известные уравнения [10, 11]:

$$\nabla(\rho V k - (\mu + \frac{\mu_t}{C_k})\nabla k) = P_k - \varepsilon\rho \quad (7)$$

$$\nabla(\rho V \varepsilon - (\mu + \frac{\mu_t}{C_\varepsilon})\nabla \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{k}(C_1 P_k - C_2 \varepsilon\rho) \quad (8)$$

где  $\rho, V, \mu, \mu_t$  – соответственно плотность, вектор скорости потока, ламинарный и турбулентные вязкости, эмпирические постоянные [10, 11]:  $C_k = 1, C_\varepsilon = 1.3, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92$ . Турбулентная вязкость определяется соотношением Прандтля-Колмогорова

$$\mu_t = \frac{C_\mu \rho k^2}{\varepsilon}$$

где  $C_\mu = 0.09$ . Генерация турбулентности в цилиндрической системе координат имеет вид [10, 11]:

$$P_k = -\rho u'_i u'_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$-\rho u'_i u'_j = \mu_t (2S_{ij} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

### 3. Численный алгоритм

Для решения задачи турбулентного течения используем схему расщепления по физическим параметрам [12, 13, 16]:

$$\frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{\tau} = -(\vec{u}^n \nabla) \vec{u}^* - \nu \Delta \vec{u}^*, \quad (9)$$

$$\Delta p = \frac{\nabla \vec{u}^*}{\tau}, \quad (10)$$

$$\frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^*}{\tau} = -\nabla p, \quad (11)$$

$$\frac{T^* - T^n}{\tau} = -(\nabla \bar{u}^n T^* - \chi \Delta T^*). \quad (12)$$

Предлагается следующая физическая интерпретация приведенной схемы расщепления [14, 15, 20]. На первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии. Промежуточное поле скорости находится с использованием метода дробных шагов:

$$\frac{f^{n+1/3} - f^n}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda_1 f^{n+1/3} + \frac{1}{2} \Lambda_1 f^n + \Lambda_2 f^n + \Lambda_3 f^n, \quad (13)$$

$$\frac{f^{n+2/3} - f^{n+1/3}}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda_2 f^{n+2/3} - \frac{1}{2} \Lambda_2 f^n, \quad (14)$$

$$\frac{f^* - f^{n+2/3}}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda_3 f^* - \frac{1}{2} \Lambda_3 f^n, \quad (15)$$

где операторы выглядят следующим образом:

$$\Lambda_1 f = -\frac{H}{L_1} \frac{\partial (\bar{u}_1^n f)}{\partial x_1} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{H^2}{L_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{H}{L_1} \frac{\partial \tau_{i1}}{\partial x_1}, \quad (16)$$

$$\Lambda_2 f = -\frac{H}{L_2} \frac{\partial (\bar{u}_2^n f)}{\partial x_2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{H^2}{L_2^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \frac{H}{L_2} \frac{\partial \tau_{i2}}{\partial x_2}, \quad (17)$$

$$\Lambda_3 f = -\frac{\partial (\bar{u}_3^n f)}{\partial x_3} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} - \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_3}, \quad (18)$$

где  $f = \bar{u}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

В каждом направлении для нахождения значений промежуточного поля скорости используется трехточечная прогонка.

На втором этапе по найденному промежуточному полю скорости находится поле давления. Уравнение Пуассона для поля давления решается методом Фурье [13].

На третьем этапе предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления. Полученное промежуточное поле скоростей не удовлетворяет уравнению

неразрывности. Точное выражение для нового поля скоростей получается путем добавления к промежуточному полю члена, соответствующего градиенту давления:

$$\bar{u}_1^{n+1} = \bar{u}_1^* - \tau \frac{H}{L_1} \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (19)$$

$$\bar{u}_2^{n+1} = \bar{u}_2^* - \tau \frac{H}{L_2} \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad (20)$$

$$\bar{u}_3^{n+1} = \bar{u}_3^* - \tau \frac{\partial p}{\partial x_3}. \quad (21)$$

Подставляя данные замены в уравнение неразрывности получим:

$$\frac{H}{L_1} \frac{\partial \bar{u}_1^*}{\partial x_1} + \frac{H}{L_2} \frac{\partial \bar{u}_2^*}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_3^*}{\partial x_3} - \tau \left( \frac{H^2}{L_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{H^2}{L_2^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} \right) = 0. \quad (22)$$

Проводя преобразования, получим уравнение Пуассона для поля давления:

$$\frac{H^2}{L_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{H^2}{L_2^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} = \frac{1}{\tau} \left( \frac{H}{L_1} \frac{\partial \bar{u}_1^*}{\partial x_1} + \frac{H}{L_2} \frac{\partial \bar{u}_2^*}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_3^*}{\partial x_3} \right). \quad (23)$$

Уравнение для давления аппроксимируется в точке  $i, j, k$  и принимает следующий вид:

$$\frac{H^2}{L_1^2} \frac{p_{i+1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i-1,j,k}}{\Delta x_1^2} + \frac{H^2}{L_2^2} \frac{p_{i,j+1,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j-1,k}}{\Delta x_2^2} + \frac{p_{i,j,k+1} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j,k-1}}{\Delta x_3^2} = F_{i,j,k}, \quad (24)$$

где

$$F_{i,j,k} = \frac{1}{\tau} \left( \frac{H}{L_1} \frac{\bar{u}_{1i+1/2,j,k}^* - \bar{u}_{1i-1/2,j,k}^*}{\Delta x_1} + \frac{H}{L_2} \frac{\bar{u}_{2i,j+1/2,k}^* - \bar{u}_{2i,j-1/2,k}^*}{\Delta x_2} + \frac{H}{L_3} \frac{\bar{u}_{3i,j,k+1/2}^* - \bar{u}_{3i,j,k-1/2}^*}{\Delta x_3} \right) \quad (25)$$

Уравнение Пуассона решается методом Фурье. В зависимости от граничных условий для поля скоростей получают граничные условия для уравнения Пуассона второго или третьего рода.

Для любой сеточной функции  $f(i)$ , удовлетворяющей второй или третьей краевой задаче на собственные значения, имеет место разложение

$$f(i) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^N \rho_k \phi_k \cos \frac{k\pi i}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (26)$$

где

$$\phi_k = \sum_{i=0}^N \rho_i f(i) \cos \frac{k\pi i}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (27)$$

$$\rho_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq N-1 \\ 0.5, & i = 0, N. \end{cases} \quad (28)$$

Согласно этим выражениям введем следующие выражения:

$$p_{i,j,k} = \frac{2}{N_3} \sum_{l=0}^{N_3} \rho_l a_{i,j,l} \cos \frac{\pi kl}{N_3}, \quad (29)$$

$$F_{i,j,k} = \frac{2}{N_3} \sum_{l=0}^{N_3} \rho_l b_{i,j,l} \cos \frac{\pi kl}{N_3}, \quad (30)$$

где

$$a_{i,j,l} = \sum_{k=0}^{N_3} \rho_k p_{i,j,k} \cos \frac{\pi kl}{N_3} \quad (31)$$

$$b_{i,j,l} = \sum_{k=0}^{N_3} \rho_k F_{i,j,k} \cos \frac{\pi kl}{N_3} \quad (32)$$

Подставляя выражения (29) в уравнение (24) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{H^2}{L_1^2} \frac{2}{N_3} \sum_{l=0}^{N_3} \frac{\rho_l (a_{i+1,j,l} - 2a_{i,j,l} + a_{i-1,j,l})}{\Delta x_1^2} \cos \frac{\pi kl}{N_3} + \\ & + \frac{H^2}{L_2^2} \frac{2}{N_3} \sum_{l=0}^{N_3} \frac{\rho_l (a_{i,j+1,l} - 2a_{i,j,l} + a_{i,j-1,l})}{\Delta x_2^2} \cos \frac{\pi kl}{N_3} + \\ & + \frac{2}{N_3} \sum_{l=0}^{N_3} \frac{\rho_l a_{i,j,l}}{\Delta x_3^2} \left( \cos \frac{\pi(k+1)l}{N_3} - 2 \cos \frac{\pi kl}{N_3} + \cos \frac{\pi(k-1)l}{N_3} \right) = \frac{2}{N_3} \sum_{l=0}^{N_3} \rho_l b_{i,j,l} \cos \frac{\pi kl}{N_3}. \end{aligned}$$

Используя выражение

$$\cos \frac{\pi(k+1)l}{N_3} + \cos \frac{\pi(k-1)l}{N_3} = 2 \cos \frac{\pi kl}{N_3} \cos \frac{\pi l}{N_3},$$

приведем уравнение (24) к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \frac{H^2}{L_1^2} \frac{2}{N_3} \sum_{l=0}^{N_3} \frac{\rho_l (a_{i+1,j,l} - 2a_{i,j,l} + a_{i-1,j,l})}{\Delta x_1^2} \cos \frac{\pi kl}{N_3} + \\ & + \frac{H^2}{L_2^2} \frac{2}{N_3} \sum_{l=0}^{N_3} \frac{\rho_l (a_{i,j+1,l} - 2a_{i,j,l} + a_{i,j-1,l})}{\Delta x_2^2} \cos \frac{\pi kl}{N_3} + \\ & + \frac{2}{N_3} \sum_{l=0}^{N_3} \frac{\rho_l a_{i,j,l}}{\Delta x_3^2} \left( 2 \cos \frac{\pi l}{N_3} - 2 \right) 2 \cos \frac{\pi kl}{N_3} = \frac{2}{N_3} \sum_{l=0}^{N_3} \rho_l b_{i,j,l} \cos \frac{\pi kl}{N_3}. \end{aligned}$$

Последнее выражение запишем при фиксированном значении  $l$  и разделим на величину  $\frac{2}{N_3} \rho_l \cos \frac{\pi kl}{N_3}$  и тогда получим:

$$\frac{H^2}{L_1^2} \frac{a_{i+1,j} - 2a_{i,j} + a_{i-1,j}}{\Delta x_1^2} + \frac{H^2}{L_2^2} \frac{a_{i,j+1} - 2a_{i,j} + a_{i,j-1}}{\Delta x_2^2} + \frac{a_{i,j}}{\Delta x_3^2} \left( 2 \cos \frac{\pi l}{N_3} - 2 \right) = b_{i,j}.$$

Данное уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} & -\frac{H^2}{L_2^2} \frac{a_{i,j-1}}{\Delta x_2^2} + \left[ \left( \frac{H^2}{L_1^2} \frac{2}{\Delta x_1^2} + \frac{H^2}{L_2^2} \frac{2}{\Delta x_2^2} - \frac{1}{\Delta x_2^2} \left( 2 \cos \frac{\pi l}{N_3} - 2 \right) \right) a_{i,j} - \frac{H^2}{L_1^2} \frac{a_{i+1,j} + a_{i-1,j}}{\Delta x_1^2} \right] - \\ & \frac{H^2}{L_2^2} \frac{a_{i,j+1}}{\Delta x_2^2} = -b_{i,j}. \end{aligned}$$

В векторном виде данное уравнение запишется следующим образом:

$$-A_j \vec{a}_{j-1} + B_j \vec{a}_j - C_j \vec{a}_{j+1} = \vec{F}_j, \quad (33)$$

где матрицы  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$  и вектора  $\vec{F}_j$ ,  $\vec{a}_j$  принимают следующий вид:

$$\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{0,j} \\ \vdots \\ a_{N_1,j} \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} \frac{H^2}{L_2^2} \frac{1}{\Delta x_2^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{H^2}{L_2^2} \frac{1}{\Delta x_2^2} \end{pmatrix},$$

$$B_j = \begin{pmatrix} d & -\frac{H^2}{L_1^2} \frac{2}{\Delta x_1^2} & 0 \\ -\frac{H^2}{L_1^2} \frac{1}{\Delta x_1^2} & \ddots & -\frac{H^2}{L_1^2} \frac{1}{\Delta x_1^2} \\ 0 & -\frac{H^2}{L_1^2} \frac{2}{\Delta x_1^2} & d \end{pmatrix}, \quad d = \frac{H^2}{L_1^2} \frac{2}{\Delta x_1^2} + \frac{H^2}{L_2^2} \frac{2}{\Delta x_2^2} - \frac{1}{\Delta x_2^2} \left( 2 \cos \frac{\pi l}{N_3} - 2 \right),$$

$$C_j = \begin{vmatrix} \frac{H^2}{L_2^2} \frac{1}{\Delta x_2^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{H^2}{L_2^2} \frac{1}{\Delta x_2^2} \end{vmatrix}, \quad \vec{F}_j = - \begin{vmatrix} b_{0,j} \\ \vdots \\ b_{N_1,j} \end{vmatrix}.$$

Алгоритм матричной прогонки для решения уравнения (33) имеет вид:

$$\alpha_{j+1} = (C_j - A_j \alpha_j)^{-1} B_j, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \quad \alpha_1 = C_0^{-1} B_0,$$

$$\vec{\beta}_{j+1} = (C_j - A_j \alpha_j)^{-1} (\vec{F}_j + A_j \vec{\beta}_j), \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad \vec{\beta}_1 = C_0^{-1} \vec{F}_0,$$

$$\vec{a}_j = \alpha_{j+1} \vec{a}_{j+1} + \vec{\beta}_{j+1}, \quad j = N_2 - 1, \dots, 0, \quad \vec{a}_{N_2} = \vec{\beta}_{N_2+1}.$$

После нахождения коэффициентов  $a_{i,j,k}$  значения поля давления находятся из формул (29)-(30). Для вычисления сумм (29)-(32) применяется метод быстрого преобразования Фурье, который позволяет вычислить данные суммы за  $O(N \ln N)$  действий, что позволяет уменьшить вычислительное время.

На последнем этапе схемы расщепления находится конечное поле скоростей с поправкой на давление. Используя замены для  $u_1^{n+1}$ ,  $u_2^{n+1}$ ,  $u_3^{n+1}$  в точках  $(i+1/2, j, k)$ ,  $(i, j+1/2, k)$ ,  $(i, j, k+1/2)$  соответственно получим:

$$\bar{u}_{1i+1/2,j,k}^{n+1} = \bar{u}_{1i+1/2,j,k}^* - \tau \frac{H}{L_1} \frac{p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k}}{\Delta x_1}$$

$$\bar{u}_{2i,j+1/2,k}^{n+1} = \bar{u}_{2i,j+1/2,k}^* - \tau \frac{H}{L_2} \frac{p_{i,j+1,k} - p_{i,j,k}}{\Delta x_2}$$

$$\bar{u}_{3i,j,k+1/2}^{n+1} = \bar{u}_{3i,j,k+1/2}^* - \tau \frac{H}{L_3} \frac{p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k}}{\Delta x_3}$$

На четвертом этапе для уравнения температуры использованием метода дробных шагов, как для уравнения движения.

#### 4. Обзор численного алгоритма

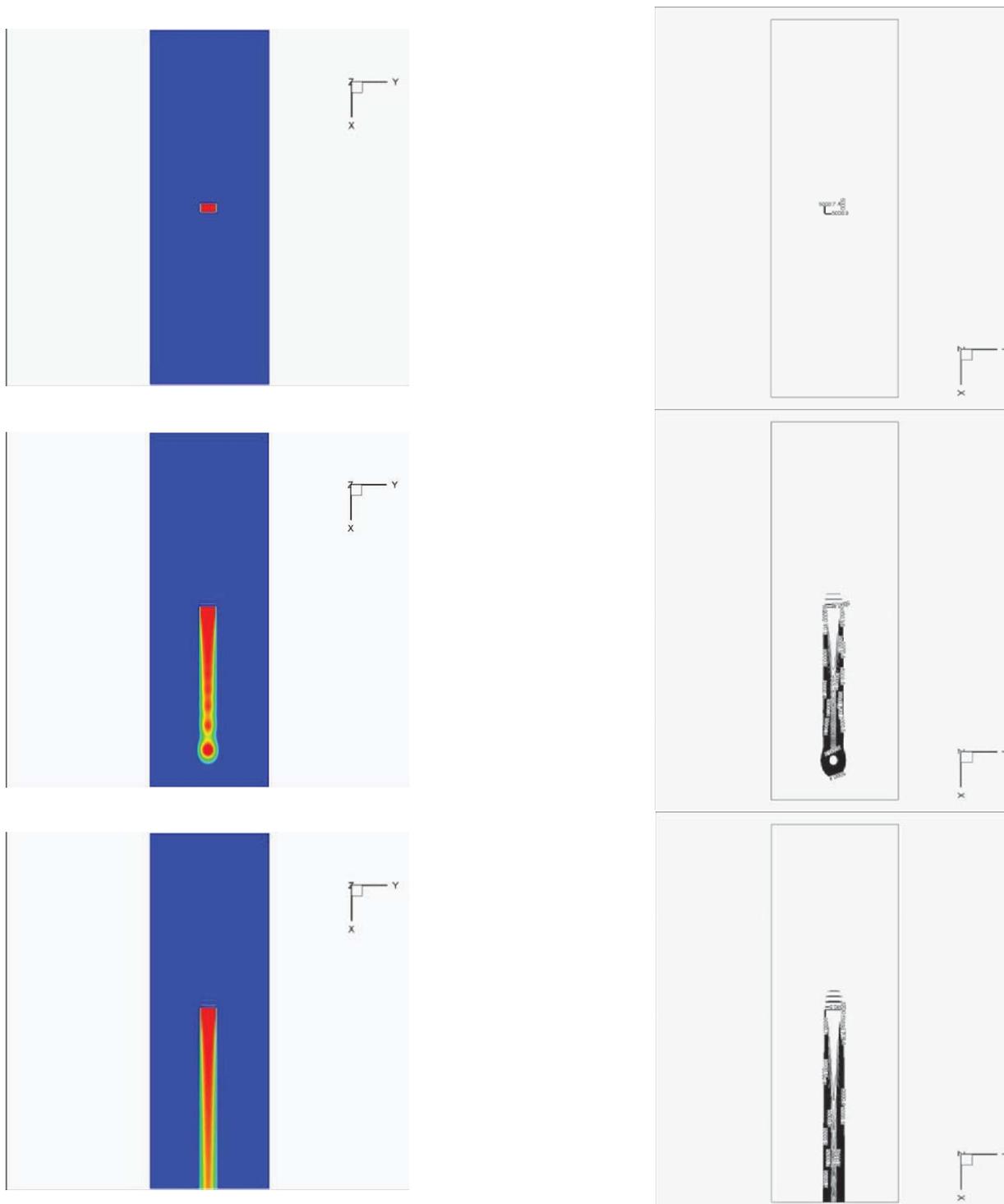
Таким образом, вычислительный цикл имеет следующий вид: по известному в начальный (или предыдущий) момент времени поля скорости из уравнения находится промежуточное поле скорости, определяя тем самым правую часть уравнения,

решается уравнение Пуассона для определения давления, с помощью градиента давления подправляется окончательное поле скорости, по найденному полю скоростей момент времени поля температуры из уравнения находится промежуточное поле температуры.

Цикл повторяется до заданного момента времени.

## 5. Численные результаты моделирования

Для численного моделирования процесса распространения температуры в прямоточном плазменном реакторе, были использованы несколько вариантов численного моделирования разными размерами источника тепла (0,1 Н, 0,2 Н, 0,3 Н). Для численного моделирования были заданы соответствующие начальные и граничные условия. В расчетах использовалась вычислительная сетка, имеющая более 300 000 вычислительных узлов. Для исследования распространения температуры прямоточной плазменном реакторе выбраны математические модели и разработаны численные алгоритмы. На рисунке 1 можно видеть контур и изолинии распределения температуры в различные моменты времени в прямоточном плазменном реакторе при размере 0,1 Н. А на рисунке 2 отображены контур и изолинии распределения температуры в различные моменты времени в прямоточном плазменном реакторе при размере 0,2 Н. На рисунке 3 можно видеть контур и изолинии распределения температуры в различные моменты времени в прямоточном плазменном реакторе при размере 0,3 Н.



**Рисунок 1** – Контур и изолиния распределения температуры при различных обезразмерных временных слоях ((a)  $t=0$ , (b)  $t=5$ , (c)  $t=10$ ) в прямоугольном плазменном реакторе размером 0,1 Н.



**Рисунок 2** – Контур и изолиния распределения температуры при различных безразмерных временных слоях ((a)  $t=0$ , (b)  $t=5$ , (c)  $t=10$ ) в прямоугольном плазменном реакторе размером 0,2 Н.



**Рисунок 3** – Контур и изолиния распределения температуры при различных обезразмерных временных слоях ((a)  $t=0$ , (b)  $t=5$ , (c)  $t=10$ ) в прямоугольном плазменном реакторе размером 0,3 Н.

## 6. Заключение

В работе были выполнены численные моделирования распределения тепловых процессов в прямоточном плазменном реакторе. Это дало более глубокое представление о внутреннем течении в прямоточном плазменном реакторе. С помощью численного моделирования можно дать более точное описание техпроцессов, которые были определены теоретически или исследованы лабораторным путем, и показать новые физические явления процессов, пока не доступно увидеть в экспериментальных исследованиях. Триада моделирования с теорией и экспериментом дает наибольшие результаты в исследовании. Результаты моделирования, показывают, что построенная численная модель обеспечивает необходимую точность и устойчивость, который должен достаточно точно описать процесс в течение интервала времени. При этом решение ограничивается временем, пространством и возможными диапазонами других физических параметров. Было обнаружено, что постановка граничных условий немаловажный процесс.

## Литература

- [1] В.А. Рабинович Дисперсные системы. – Большая энциклопедия химии, 1985. –704 с.
- [2] Н. Б. Урьев Высококонцентрированные дисперсные системы. – М., 1980. - 502 с.
- [3] С. Патанкар Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. - 152 с.
- [4] В.Ф. Семенов Расчет турбулентного потока газа в канале плазмотрона со ступенчатым электродом // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. - 2003. № 5.
- [5] В.С. Энгельшт , В.Ц. Гурович , Г.А. Десятков и др. Теория столба электрической дуги. – Новосибирск: Наука СО, 1990, Т. 1, – 376 с.
- [6] А. Жайнаков , Р.М.Урусов ,Т.Э. Урусова Численный анализ неосесимметричных электрических дуг. – Бишкек: Илим, 2001. – 232 с.
- [7] И.Г.Паневин , В.И.Хвезюк , И.П.Назаренко и др. Теория и расчет приэлектродных процессов. – Новосибирск: Наука СО, Т. 10, 1992. – 197 с.
- [8] М.Ф. Жуков , И.М. Засыпкин , А.Н. Тимошевский и др. Электродуговые генераторы термической плазмы. – Новосибирск: Наука, СП РАН, Т. 17, 1999. – 712 с.
- [9] М.Ф. Жуков , А.С.Коротеев , Б.А.Урюков Прикладная динамика термической плазмы. – Новосибирск: Наука СО, 1975. – 298 с.
- [10] D. C. Wilcox Turbulence Modeling for CFD, 2nd ed. DCW Industries, 2006. – 522 p.
- [11] T. H. Shih , W. W. Liou , A. Shabbir ,Z. Yang ,J. Zhu A New k-e Eddy Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows-Model Development and Validation // Computers and Fluids. 24(3), 1995. – 227-238 pp.
- [12] A.J. Chorin Numerical solution of the Navier-Stokes equations. // Math. Comp. 22, 1968. – 745-762 pp.
- [13] A. Issakhov Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method // J. Phys.: Conf. Ser. 318, Issue 4, 2011. –1282-1288 pp., 042051. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051
- [14] A. Issakhov Mathematical Modelling of the Influence of Thermal Power Plant on the Aquatic Environment with Different Meteorological Condition by Using Parallel Technologies // Power, Control and Optimization. Lecture Notes in Electrical Engineering. Volume 239, 2013. – 165-179 pp.
- [15] A.Issakhov Mathematical modelling of the influence of thermal power plant to the aquatic environment by using parallel technologies // AIP Conf. Proc. 1499, 2012. –15-18 pp. doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4768963>

- [16] *J. Kim, P. Moin* Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations // *J. Comp. Phys.* 59, 1985. –308-323 pp.
- [17] *T. J. Chung* Computational Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 2002. – 1012 p.
- [18] *J. H. Ferziger, M. Peric* Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer; 3rd edition, 2013, –426 p.
- [19] *R. Peyret, D. Th. Taylor* Computational Methods for Fluid Flow. New York: Berlin: Springer-Verlag. 1983, –358 p.
- [20] *P.J. Roache* Computational Fluid Dynamics, Albuquerque, NM: Hermosa Publications. 1972, –434 p.

## References

- [1] *V.A. Rabinovich* Dispersnye sistemy. — Bol'shaja jenciklopedija himii, 1985. –704 p.
- [2] *N. B. Ur'ev* Vysokokonzentrirovannye dispersnye sistemy. – M., 1980. - 502 p.
- [3] *S. Patankar* Chislennye metody peshenija zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti. – M.: Jenepgoatomizdat, 1984. - 152 p.
- [4] *B.F. Semenov* Raschet tupbulentnogo potoka gaza v kanale plazmotrona so stupenchatym jelektpodom // – Vestnik Kypgyzsko-Poccijskogo Slavjanckogo univepsiteta. - 2003. № 5.
- [5] *B.S. Jengel'sht, B.C. Gupovich, G.A. Decjatkov i dr.* Teorija stolba jelektricheskoj dugi. — Hovosibirsk: Hauka SO, 1990, V. 1, – 376 p.
- [6] *A. Zhajnakov, R.M. Urusov, T. Je. Urusova* Chislennyj analiz neosesimmetrichnyh jelektpicheskikh dug. — Bishkek: Ilim, 2001. – 232 p.
- [7] *I.G. Panevin, B.I. Hvecjuk, I.P. Hazarenko i dr.* Teorija i raschet prijelektrodnyh processov. -- Hovosibirsk: Hauka SO, V. 10, 1992. – 197 p.
- [8] *M.F. Zhukov, I.M. Zacypkina, A.N. Timoshevskij i dr.* Jelektpodugovye generatory termicheskoj plazmy. -- Hovosibirsk: Hauka CP RAN, V. 17, 1999. – 712 p.
- [9] *M.F. Zhukov, A.S. Koroteev, B.A. Urjukov* Prikladnaja dinamika termicheskoj plazmy. -- Hovosibirsk: Hauka SO, 1975. – 298 p.
- [10] *D. C. Wilcox* Turbulence Modeling for CFD, 2nd ed. DCW Industries, 2006. – 522 p.
- [11] *T. H. Shih, W. W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, J. Zhu* A New k-ε Eddy Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows-Model Development and Validation // *Computers and Fluids.* 24(3), 1995. – 227-238 pp.
- [12] *A.J. Chorin* Numerical solution of the Navier-Stokes equations // *Math. Comp.* 22, 1968. – 745-762 pp.
- [13] *A. Issakhov* Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method // *J. Phys.: Conf. Ser.* 318, Issue 4, 2011. –1282-1288 pp., 042051. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051
- [14] *A. Issakhov* Mathematical Modelling of the Influence of Thermal Power Plant on the Aquatic Environment with Different Meteorological Condition by Using Parallel Technologies // *Power, Control and Optimization. Lecture Notes in Electrical Engineering.* Volume 239, 2013. – 165-179 pp.
- [15] *A. Issakhov* Mathematical modelling of the influence of thermal power plant to the aquatic environment by using parallel technologies // *AIP Conf. Proc.* 1499, 2012. –15-18 pp. doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.4768963
- [16] *J. Kim, P. Moin* Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations // *J. Comp. Phys.* 59, 1985. –308-323 pp.
- [17] *T. J. Chung* Computational Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 2002. – 1012 p.
- [18] *J. H. Ferziger, M. Peric* Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer; 3rd edition, 2013, –426 p.
- [19] *R. Peyret, D. Th. Taylor* Computational Methods for Fluid Flow. New York: Berlin: Springer-Verlag. 1983, –358 p.
- [20] *P.J. Roache* Computational Fluid Dynamics, Albuquerque, NM: Hermosa Publications. 1972, –434 p.