

УДК 532.526

Бекетаева А.О.*, Шахан Н.Ш.**,

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: *azimaras@mail.ru, ** shakhan-nurtoleu@mail.ru

Влияние параметра нерасчетности на ударно-волновую структуру в сверхзвуковом канале со вдувом струи

В плоском канале численно моделируется сверхзвуковое турбулентное течение воздуха с перпендикулярным вдувом звуковой струи водорода через щель на нижней стенке. Решение исходных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса, замкнутых $k - \omega$ моделью турбулентности, осуществляется с помощью алгоритма, построенного на основе WENO-схемы. Основное внимание уделяется исследованию взаимодействия ударно-волновой структуры с пограничными слоями на нижней и верхней стенках в условиях внутреннего турбулентного течения, а именно, проведено детальное изучение структур потоков, исследован отрыв и смещение в зависимости от ширины щели струи. Установлено, что помимо известных ударно-волновых структур, возникающих при взаимодействии набегающего потока с поперечной струей и при взаимодействии головного скачка уплотнения с пограничными слоями вблизи стенок, возникают дополнительная система скачков уплотнения и отрыв потока на нижней стенке на некотором расстоянии от струи вниз по потоку. Произведено сравнение с опытными данными. Также приводится качественное сравнение распределения изобар, полученных с помощью ENO, WENO схем с работами других авторов. Изучается влияние параметра нерасчетности на формирование ударно-волновых структур, возникающих вследствие взаимодействия головного скачка уплотнения с пограничными слоями на нижней и верхней стенках. Выявлено, что угол наклона головного скачка уплотнения возрастает с увеличением параметра нерасчетности.

Ключевые слова: сверхзвуковое течение, совершенный газ, пограничный слой, уравнения Навье-Стокса, ударная волна.

Beketaeva A.O., Shahan N.Sh.

Influence of incalculation parameter to shock-wave structures in supersonic channel with jet injection

Turbulent stream of air with perpendicular injection of round sonic hydrogen jet from the chink placed on the bottom wall is numerically modeling in flat channel. Solution of governing averaged by Favre Navier-Stokes equations for ideal multi component gas was made by WENO scheme. For closure aims $k - \omega$ model of turbulence was chosen. For initial conditions parameters of stream were taken. For boundary conditions: slip conditions for bottom and top wall; stream conditions for entrance boundary; not reflection condition for outlet boundary and jet parameters on the jet injection were fixed. At the initial moment thickness of boundary layer with given profiles of velocity, temperature, pressure and density are given. Distribution of pressure on the bottom wall in the region of slot is compared with the experimental data. Besides of it plots for isobars, taken with ENO and WENO schemes, are qualitatively compared with the works of other authors. Influence of incalculation parameter to the shock-wave structures, formed from the interaction of bow shock wave with the boundary layers of bottom and top walls. It was found, that the incidence of bow shock is enlarged with the increasing of incalculation parameter.

Key words: supersonic flow, ideal gas, Naver-Stokes eqations, shock wave, boundary layer

Бекетаева А.О., Шахан Н.Ш.

Ағысы бар жоғарғы дыбыстық каналдағы саналымсыздық параметірінің соққы толқындық құрылымдардың түзілуіне тигізетін ықпалы

Төменгі қабырғада орналасқан саңылау арқылы дөңгелек дыбысты сутегі ағысының жоғарғы дыбысты турбулентті ауа ағынына көлденең үрленуі жазық каналда сандық модельденеді. Фавр бойынша орташаланған және $k - \omega$ турбулентті моделімен тұйықталған идеалды көп компонентті газ үшін жазылған Навье-Стокс теңдеулерінің шешілуі WENO сұлбасы арқылы жүзеге асады. Бастапқы шарт ретінде ағынның параметрлері қабылданады. Шекаралық шарт ретінде келесілер алынды: төменгі және жоғарғы қабырғалар үшін жабысу шарттары; кіру шекарасында ағынның шарттары; шығу шекарасында шағылыспау шарттары және ағыста - ағыстың параметрлері. Бастапқы уақытта шекаралық қабаттың қалыңдығында алдын ала белгілі жылдамдықтардың, температураның, қысымның және тығыздықтың профильдері беріледі. Ағыс кіруінің маңайындағы төменгі қабырғадағы қысымның таралымы тәжірибелік мәліметтермен салыстырылуы жүргізіледі. Сонымен қатар, ENO және WENO сұлбалары арқылы алынған изобаралардың өзгерісі басқа авторлардың жұмыстарымен сапалық түрде салыстырылады. Саналымсыздық параметрінің, негізгі соққы толқынының төменгі және жоғарғы қабырғаларында орналасқан шекаралық қабаттармен әсерлесуі нәтижесінде пайда болатын, соққы толқындық құрылымдардың түзілуіне ықпалы зерттеледі. Негізгі соққы толқынының көлбеу бұрышы, саналымсыздық параметрі өскен кезде ұлғаятындығы байқалады.

Түйін сөздер: жоғарғы дыбысты ағысы, идеалды газ, шекаралық қабат, соққы толқыны, Навье-Стокс теңдеулері.

Введение

Большой технический интерес представляет задача о поле течения, образующемся при взаимодействии газовой струи со сверхзвуковым основным потоком. Присутствие зон возвратных течений, турбулентности, наличия ударных волн и волн разрежения являются огромной проблемой в изучении физики такого рода течения [1-3]. Задача взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем изучена достаточно хорошо [4-5]. Однако на сегодняшний день эти две проблемы рассматриваются отдельно друг от друга, и соответственно изучение течения при взаимодействии поперечной струи с основным потоком, а также поля течения при взаимодействии падающего головного скачка уплотнения с пограничным слоем является достаточно интересной и актуальной задачей. Как известно, при взаимодействии пограничного слоя с падающей ударной волной в основании скачка формируется сложная λ -образная структура [4] и происходит отрыв пограничного слоя. При рассмотрении турбулентного отрыва особое внимание необходимо уделять механизмам отрыва и присоединения потока, интенсивности скачка уплотнения и влиянию режимных параметров на характеристики потока. Трудности, возникающие при численном решении вышеописанных задач, не позволяют в полном объеме изучить структуру как взаимодействия струи с поперечным потоком, так и взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем в зависимости от основных параметров. Основная проблема численного моделирования обусловлена тем, что использование схем выше первого порядка вызывает осцилляции в решениях, разрывы в рассчитываемых функциях. В настоящее время для решения такого рода сложных задач широко применяются квазимонотонные консервативные схемы повышенного порядка аппроксимации без введения искусственных диссипативных членов, такие как TVD схемы (Total Variation Diminishing schemes). При этом их основной недостаток состоит в том, что в окрестности разрыва решения порядок точности понижается до первого. Это обстоятельство приводит к тому, что скачки уплотнения, возникающие в течении, могут быть сильно размазаны. Схемы ENO (Essentially Non-Oscillatory Schemes), и WENO свободные от вышеуказанных недостатков, изложены в ряде ра-

бот [6-9]. В работе [9] авторы развили ENO схему на основе идеи метода Годунова и показали применимость схемы к решению задачи сверхзвукового течения многокомпонентного газа в плоском канале с вдувом перпендикулярных струй. Цель данной работы - численное моделирование взаимодействия падающей ударной волны, возникающей в результате взаимодействия набегающего сверхзвукового потока воздуха с поперечной звуковой струей, вдуваемой с нижней стенки канала, с пограничным слоем на верхней стенке канала, а также изучение влияния параметра нерасчетности на ударно-волновую структуру.

Постановка задачи

Рассматривается сверхзвуковое течение воздуха с поперечным вдувом струи с нижней стенки прямоугольного канала (рисунок 1). Система двумерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной газовой смеси относительно декартовых координат в консервативной форме представляется в виде:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{U} = (\rho, \rho u, \rho w, E_t, \rho Y_k)^T,$$

$$\vec{E} = (\rho u, \rho u^2 + P, \rho u w, (E_t + P) u, \rho u Y_k)^T,$$

$$\vec{F} = (\rho w, \rho u w, \rho w^2 + P, (E_t + P) w, \rho w Y_k)^T,$$

$$\vec{E}_v = (0, \tau_{xx}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + w\tau_{xz} - q_x, J_{xk})^T,$$

$$\vec{F}_v = (0, \tau_{xz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + w\tau_{zz} - q_z, J_{zk})^T,$$

$$P = \frac{\rho T}{\gamma_\infty M_\infty^2 W}, \quad W = \left(\sum_{k=1}^{N_p} \frac{Y_k}{W_k} \right)^{-1}, \quad \sum_{k=1}^{N_p} Y_k = 1$$

$$E_t = \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2} h - P + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2), \quad h = \sum_{k=1}^{N_p} Y_k h_k, \quad h_k = h_k^0 + \int_{T_0}^T c_{pk} dT,$$

$$c_{pk} = C_{pk}/W_k, \quad \tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \left(2u_x - \frac{2}{3}(u_x + w_z) \right),$$

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \left(2w_z - \frac{2}{3}(u_x + w_z) \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu}{Re} (u_z + w_x),$$

$$q_x = \left(\frac{\mu}{PrRe} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^{N_p} h_k J_{xk}, \quad q_z = \left(\frac{\mu}{PrRe} \right) \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^{N_p} h_k J_{zk},$$

$$J_{xk} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial x}, \quad J_{zk} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial z}.$$

Система уравнений (1) записана в безразмерном виде в общепринятых обозначениях, в качестве определяющих приняты параметры потока $u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$; давление P и полная энергия E_t отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$; удельная энтальпия h_k - к $R^0 T_\infty / W_\infty$; молярные удельные теплоемкости C_{pk} - к R^0 ; характерным параметром длины является диаметр сопла. Величина Y_k - массовая концентрация k -ой компоненты; индекс массовой концентрации $k = 1$ соответствует O_2 , $k = 2$ - H_2 , $k = 3$ - N_2 ; $N_p = 3$ - число компонент смеси газов. W_k - молекулярный вес k -ой компоненты; Re, Pr, Sc - числа Рейнольдса, Прандтля и Шмидта; $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$ - тензоры вязких напряжений; q_x, q_z, J_{xk}, J_{zk} - тепловые и диффузионные потоки (диффузионные потоки вычисляются по закону Фика); $\mu = \mu_l + \mu_t$ - эффективная вязкости. Для определения μ_t используется $k-\omega$ используется модель Болдуина-Ломакса.

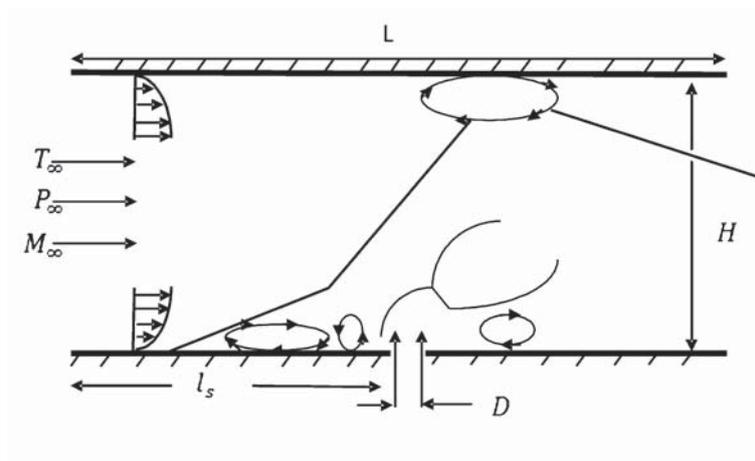


Рисунок 1 – Схема течения

Граничные условия

На входе:

$$Y_k = Y_{k\infty}, W_k = W_{k\infty}, P = P_\infty, T = T_\infty,$$

$$u = M_\infty \sqrt{\gamma_\infty R_0 T_\infty / W_\infty}, w = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq z \leq H;$$

во входном сечении вблизи стенок канала задается пограничный слой, толщина которого определяется по формуле $\delta_1 = 0.37x(Re)^{-0.2}$. Также задается пристенный слой (10% от пограничного слоя) $\delta_2 = 0.1\delta_1$. Продольная составляющая скорости принимает следующий вид:

$$u = 0, 1 \left(\frac{z}{\delta_2} \right) + 0, 9 \left(\frac{z}{\delta_2} \right)^2, \quad x = 0, \quad 0 \leq z \leq \delta_2.$$

В развитом турбулентном пограничном слое профиль продольной скорости задается степенным законом:

$$u = \left(\frac{z}{\delta_1} \right)^{1/7}, \quad x = 0, \quad \delta_2 \leq z \leq \delta_1.$$

В зависимости от распределения скорости значения температуры и плотности примут вид:

$$T = T_w + u(1 - T_w), \quad \rho = 1/T,$$

где $T_w = \left(1 + r \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right)$ - температура на стенке, $r = 0.88$.

На щели:

$$Y_k = Y_{k0}, W_k = W_{k0}, P = nP_\infty, T = T_0,$$

$$u = 0, w = M_0 \sqrt{\gamma_0 R_0 T_0 / W_0}, \quad z = 0, \quad L_b \leq x \leq L_b + h;$$

($n = P_0/P_\infty$ - степень нерасчетности, P_0, P_∞ - давление в струе и в потоке, M_0, M_∞ - число Маха струи и потока, соответственно, индексы 0, ∞ относятся к параметрам струи и потока); на нижней и верхней стенках задается условие прилипания и теплоизоляции; на выходной границе задаются условия неотражения [10].

Метод решения

На нижней и верхней стенках в пограничном слое, а также на уровне щели, вводится сгущение сетки для более точного численного решения. Тогда система уравнений (1) в преобразованной системе координат запишется в виде:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{E}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{E}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}}{\partial \eta} \quad (2)$$

где $\tilde{U} = \vec{U}/J$, $\tilde{E} = \xi_x \vec{E}/J$, $\tilde{F} = \eta_z \vec{F}/J$, $\tilde{E}_{v2} = \xi_x \vec{E}_{v2}/J$, $\tilde{E}_{vm} = \xi_x \vec{E}_{vm}/J$, $\tilde{F}_{v2} = \eta_z \vec{F}_{v2}/J$, $\tilde{F}_{vm} = \eta_z \vec{F}_{vm}/J$. $J = \partial(\xi, \eta)/\partial(x, z)$ - Якобиан преобразования. Параметры преобразования координат подробно описаны в [11]. В данной работе конвективные члены аппроксимируются с использованием WENO-схемы, идея построения которого основана на ENO-схеме, подробно изложенной в работе [9]. В предлагаемой WENO-схеме при интерполировании кусочно-постоянной полиномиальной функции применяются полиномы Ньютона третьего порядка и, вместо выбора одного интерполяционного полинома, используется выпуклая комбинация с весовыми коэффициентами всех представленных полиномов. За счет этого достигается существенно-неосциллирующее свойство схемы, повышающее порядок аппроксимации схемы.

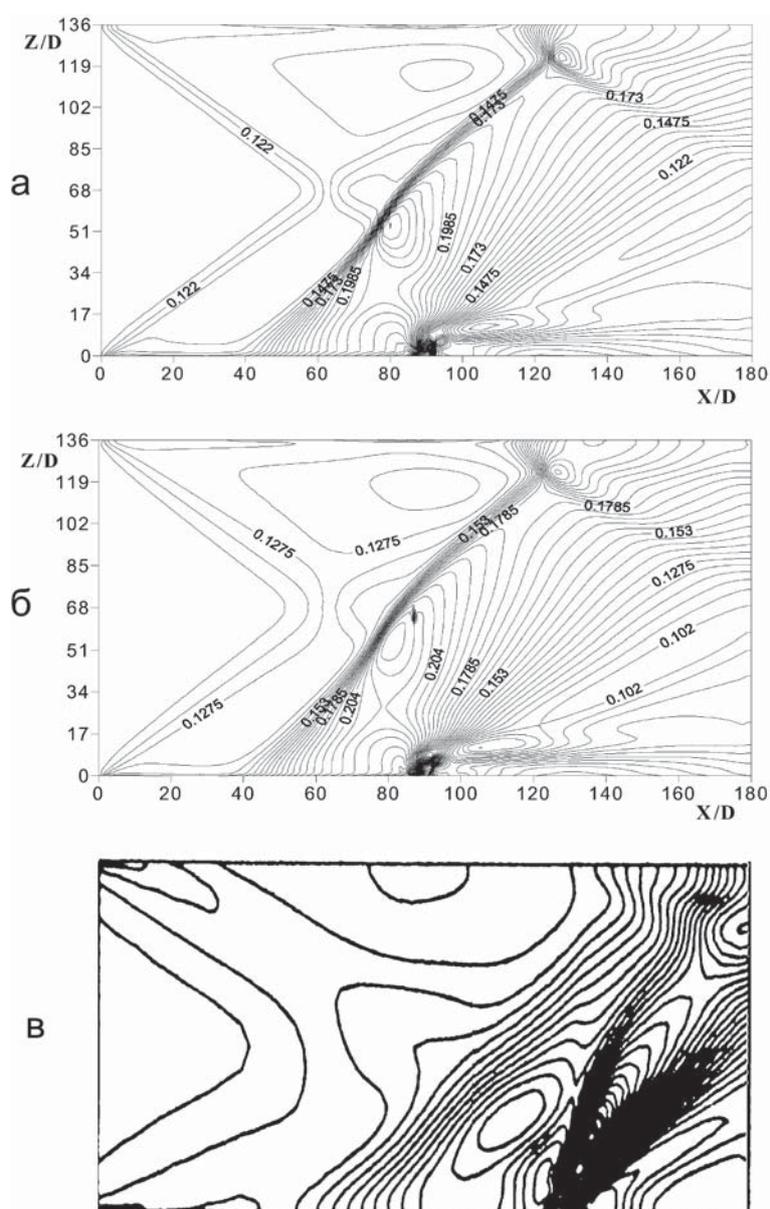


Рисунок 2 – Распределение изобар. а) WENO схема, б) ENO схема, в) результат работы [1], ($M_\infty = 2.9$, $P_\infty = 0.0663 \text{ МПа}$, $T_\infty = 108 \text{ К}$, $T_0 = 217 \text{ К}$, $P_0 = 1.24 \text{ МПа}$)

Результаты расчетов и их анализ

Для апробации численного метода выполнялся расчет задачи плоского сверхзвукового течения воздуха ($M_\infty = 2.9$, $P_\infty = 0.0663 \text{ МПа}$, $T_\infty = 108 \text{ К}$) с перпендикулярным вдувом звуковой струи гелия ($T_0 = 217 \text{ К}$, $P_0 = 1.24 \text{ МПа}$) через щель на нижней стенке шириной 0.0559 см . Высота и ширина канала $H = 7.62 \text{ см}$ и $L = 25 \text{ см}$, соответственно. В данном эксперименте необходимо знание C_{pk} (Дж/(Мол · К)) компонент O_2 , N_2 , H_2 при температуре ниже 300 К . Здесь используются экспериментальные данные работы [12], в которой приведены зависимости C_{pk} от низких значений температуры. На рисунке 2 приведены результаты распределения изобар (2а - WENO схема, 2б - ENO схема, 2в - результаты работы [1]). Перед струей гелия, вследствие торможения набегающего потока давление повышается и происходит образование головного скачка уплотнения, который отчетливо виден на рисунке 2. Таким образом, из качественного сравнения полученного результата с данными работы [1] следует, что искусственная вязкость, вводимая авторами [1] в численную схему, довольно сильно размывает основной скачок уплотнения. На рисунке 3 показаны рассчитанные и измеренные значения распределения давления на стенке перед и за щелью, 1, 2 - численные расчеты WENO и ENO схем соответственно, ооо - эксперимент из работы [1]. На рисунке видно хорошее согласие численных и экспериментальных данных перед щелью, однако за щелью значения оказались заниженными. Кривая, полученная WENO схемой, расположена ниже, чем эксперименты и ниже кривой, полученной по ENO схеме, что также можно объяснить диссипативными свойствами WENO схемы. В целом можно отметить удовлетворительное согласие результатов расчетов с измерениями опытов. Далее был выполнен численный эксперимент по изучению взаимодействия головного скачка уплотнения, возникающего перед струей, с пограничным слоем на верхней стенке. Через щель на стенке, шириной $0,2 \text{ см}$, вдувается звуковая струя водорода с $T_0 = 800 \text{ К}$, а параметр нерасчетности варьируется в пределах $5 \leq n \leq 15$. Параметры набегающего потока следующие: ($M_\infty = 3.75$, $T_\infty = 629.43 \text{ К}$, $Re = 10^6$, $Pr = 0.7$) высота и ширина канала $H = 4 \text{ см}$ и $L_b = 11 \text{ см}$ соответственно. Щель располагается на нижней стенке на расстоянии $L_b = 5 \text{ см}$ от начала расчетной области. Толщина пограничного слоя во входном сечении составляет $\delta = 0.38 \text{ см}$. Было исследовано влияние параметра нерасчетности на структуру взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем на верхней стенке. Как известно, структура потока в области взаимодействия падающего скачка уплотнения с пограничным слоем существенно зависит от интенсивности скачка и угла его падения [4]. В свою очередь интенсивность и угол падения скачка зависит от параметров струи и потока. Чем больше интенсивность скачка уплотнения, тем поток у стенки испытывает большее торможение, приводящее к его отрыву. Возникающая отрывная зона, как правило, является причиной отклонения внешнего потока, которое может вызывать образование характерной системы скачков уплотнения [4]. Из распределения изобар, представленных на рисунке 4 для различных параметров нерасчетности видно образование системы скачков уплотнения при взаимодействии ударной волны с верхним пограничным слоем. Из-за торможения набегающего потока перед вдуваемой струей возникает головной скачок уплотнения 1, который достигает верхней границы канала. Этот скачок уплотнения создает положительный градиент давления, достаточный для отрыва пограничного слоя на верхней стенке канала. Косой скачок уплотнения 2, отделяющий

зону отрыва пограничного слоя от сверхзвукового набегающего потока, образуется выше по течению от головной ударной волны. Распространение ударной волны 2 во внешний поток сопровождается возникновением отраженного скачка уплотнения 3. Далее ниже по течению, в результате присоединения оторвавшегося потока к обтекаемой стенке, где течение опять становится безотрывным, формируется скачок уплотнения 4, возникающий в области смещения оторвавшегося пограничного слоя с внешним потоком. Из рисунка 4 видно, что головной скачок 1, косой 2 и отраженный 3 скачки уплотнения пересекаясь в одной точке, образуют сложную α образную систему скачков уплотнения, которая аналогична α структуре, сформированной перед струей на нижней стенке канала [13]. Из распределения изобар следует, что с возрастанием параметра нерасчетности увеличивается объем вдуваемого водорода, что в свою очередь приводит к увеличению размеров препятствия основному потоку, что способствует увеличению интенсивности головного скачка уплотнения (рисунки 4 а-в). Графики показывают, что интенсивность головного скачка уплотнения и соответственно угол наклона существенно возрастают с увеличением параметра нерасчетности. При этом качественная картина ударных волн во всех трех случаях схожа. Из численных экспериментов влияния параметра нерасчетности на головной скачок уплотнения следует, что угол наклона головного скачка уплотнения возрастает с увеличением отношения давления за скачком и перед ним. Зависимость угла наклона головного скачка уплотнения от параметра нерасчетности приведена на рисунке 5, где ось абсцисс соответствует нерасчетности, ось ординат - углу наклона головного скачка, вычисленного по формуле: $\alpha = \arctan(\max \frac{w}{u})$. Как видно из графика, угол наклона при малых значениях нерасчетности ($0 < n < 12$) резко возрастает, а затем изменяется линейно.

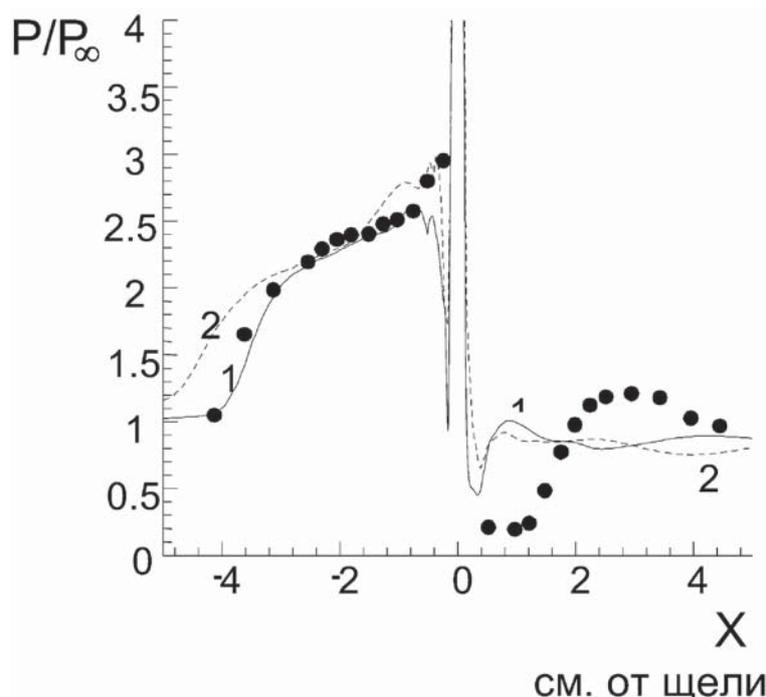


Рисунок 3 – Распределение давления на стенке "... эксперимент работы [1], кривая 1 - WENO схема, кривая 2 - ENO схема.

$$(M_{\infty} = 2.9, P_{\infty} = 0.0663 \text{ МПа}, T_{\infty} = 108 \text{ К}, T_0 = 217 \text{ К}, P_0 = 1.24 \text{ МПа})$$

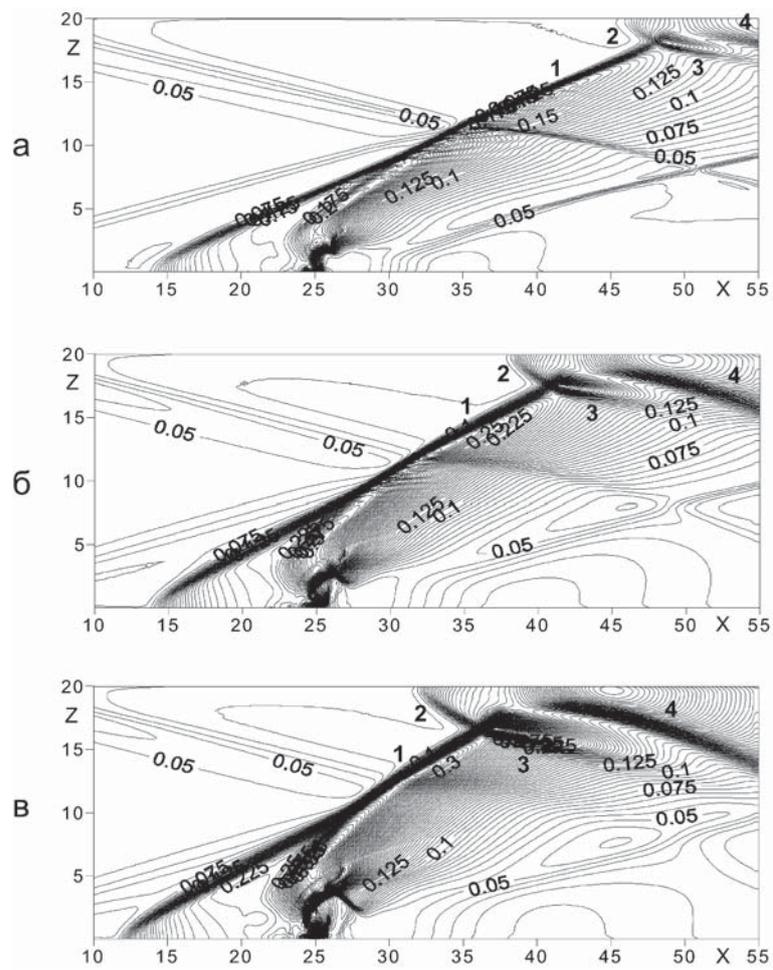


Рисунок 4 – Распределение изобар а) $n=5$, б) $n=10$, в) $n=15$,
 $(T_0 = 800K, M_\infty = 3.75, T_\infty = 629.43K, Re = 10^6, Pr = 0.7)$

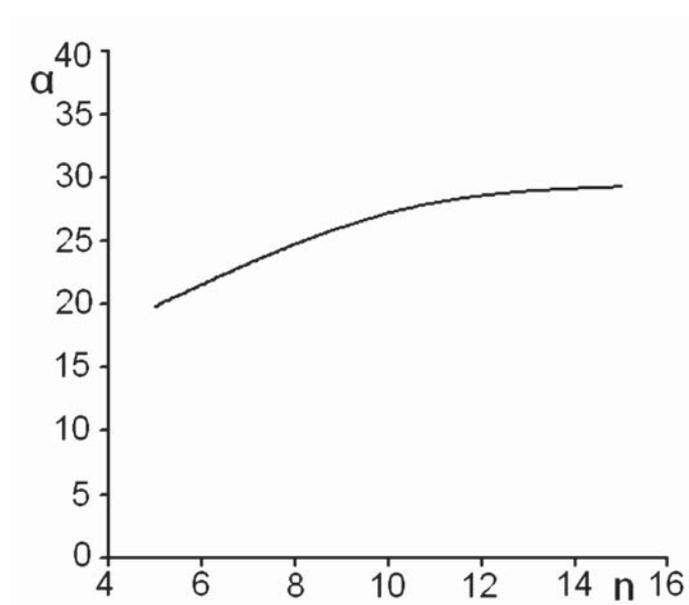


Рисунок 5 – Влияние параметра нерасчетности на угол наклона головного скачка $\alpha = \arctan(\max \frac{w}{u})$

Заключение

Разработанная в работе численная модель для расчета турбулентных течений на основе WENO схемы позволяет с хорошей точностью моделировать течение сверхзвукового многокомпонентного газа. Качественное и количественное сравнение расчетов с опытными данными показывает удовлетворительное согласование результатов. В работе была показана зависимость формирования ударно-волновых структур от параметра нерасчетности и установлено, что интенсивность взаимодействия головного скачка уплотнения с пограничным слоем на верхней стенке возрастает с ростом данного параметра. Также выявлено, что в зависимости от увеличения параметра нерасчетности возрастает угол наклона головного скачка уплотнения.

Литература

- [1] *Шурь Дж., Ш., Юнь С.* Численное исследование течений с химическими реакциями на основе LU-факторизованной схемы, построенной методом симметричной последовательной верхней релаксации // *Аэрокосмическая техника*. 1990. № 10. С. 102-113.
- [2] *Grasso F., Magi V.* Simulation of Transverse Gas Injection in Turbulent Supersonic Air Flows // *AIAA Journal*. 1995. Vol. 33, No 1. P. 56-62.
- [3] *Chenault F.C., Beran P.S.* $k - \omega$ and Reynolds Stress Turbulence Model Comparisons for Two-Dimensional Injection Flows // *AIAA Journal*. 1998. Vol. 36, No 8. P. 1401-1412.
- [4] *Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н., Калугин В.Т.* Аэродинамика отрывных течений. Москва: Высш. Шк., 1988. 351 с.
- [5] *Hadjadj A* Shock wave boundary layer interaction // *Shock Waves* 19. 2009. Springer. P. 449-452.
- [6] *Harten A., Osher S., Engquist B., Chakravarthy S.R.* Some Results on Uniformly High-Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes // *Applied Num. Math.* 1986. No 2. P. 347-377.
- [7] *Ершов С.В.* Квазимонотонная ENO- схема повышенной точности для интегрирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса // *Математическое моделирование*. 1994 Т. 6. №11. С. 63-75.
- [8] *Yang J.Y.* Third Order Non-Oscillatory Schemes for the Euler Equations // *AIAA Journal*. 1991. Vol. 29. No 10. P. 1611-1618.
- [9] *Бекетаева А.О., Найманова А.Ж.* Применение ENO (Essentially Non-Oscillatory) схемы для моделирования течения многокомпонентной газовой смеси // *Вычислительные технологии*. 2007. Т.12. № 4. С. 17-25.
- [10] *B Poinso T.J., Lele S.K.* Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows // *Journ. of Comput. Phys.* 1992. No 101. P. 104-129.
- [11] *Kee R.J., Rupley F.M., Miller J.A* CHEMKIN-II: a FORTRAN chemical kinetic package for the analysis of gas-phase chemical kinetics // SANDIA Report SAND89-8009. 1989.
- [12] *Кижина, И. К.:* Таблицы Физических величин. с. 1008. Атомиздат, Москва (1976)
- [13] *Beketaeva A.O., Naimanova A.Zh.* Numerical simulation of a supersonic flow with transverse injection of jets // *Journal of Applied Mechanics and Technical physics*. 2004. Vol.45. №3. P.367-374.

References

- [1] *Шунь Дж., Ш., Юнь С.* Численное исследование течений с химическими реакциями на основе LU-факторизованной схемы, построенной методом симметричной последовательной верхней релаксации // *Аэрокосмическая техника*. 1990. № 10. С. 102-113.
- [2] *Grasso F., Magi V.* Simulation of Transverse Gas Injection in Turbulent Supersonic Air Flows // *AIAA Journal*. 1995. Vol. 33, No 1. P. 56-62.
- [3] *Chenault F.C., Beran P.S.* $k - \omega$ and Reynolds Stress Turbulence Model Comparisons for Two-Dimensional Injection Flows // *AIAA Journal*. 1998. Vol. 36, No 8. P. 1401-1412.
- [4] *Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н., Калугин В.Т.* Аэродинамика отрывных течений. Москва: Высш. Шк., 1988. 351 с.
- [5] *Hadjadj A* Shock wave boundary layer interaction // *Shock Waves* 19. 2009. Springer. P. 449-452.
- [6] *Harten A., Osher S., Engquist B., Chakravarthy S.R.* Some Results on Uniformly High-Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes // *Applied Num. Math.* 1986. No 2. P. 347-377.
- [7] *Ершов С.В.* Квазимонотонная ENO- схема повышенной точности для интегрирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса // *Математическое моделирование*. 1994 Т. 6. №11. С. 63-75.
- [8] *Yang J.Y.* Third Order Non-Oscillatory Schemes for the Euler Equations // *AIAA Journal*. 1991. Vol. 29. No 10. P. 1611-1618.
- [9] *Бекетаева А.О., Найманова А.Ж.* Применение ENO (Essentially Non-Oscillatory) схемы для моделирования течения многокомпонентной газовой смеси // *Вычислительные технологии*. 2007. Т.12. № 4. С. 17-25.
- [10] *B Poinso T.J., Lele S.K.* Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows // *Journ. of Comput. Phys.* 1992. No 101. P. 104-129.
- [11] *Kee R.J., Rupley F.M., Miller J.A* CHEMKIN-II: a FORTRAN chemical kinetic package for the analysis of gas-phase chemical kinetics // *SANDIA Report SAND89-8009*. 1989.
- [12] *Кикоина, И. К.:* Таблицы Физических величин. с. 1008. Атомиздат, Москва (1976)
- [13] *Beketaeva A.O., Naimanova A.Zh.* Numerical simulation of a supersonic flow with transverse injection of jets // *Journal of Applied Mechanics and Technical physics*. 2004. Vol.45. №3. P.367-374.