Нелокальная задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка

К.Г. Кожобеков
Ошский государственный университет, Кыргызская Республика
г.Ош, e-mail: kudash_3012@rambler.ru

При математическом моделировании часто приходим к нелокальным задачам для уравнений в частных производных второго, третьего и высокого порядков. В тех случаях, когда невозможно получить информацию о происходящем процессе на границе области получаем задачу с нелокальными интегральными условиями [1-3]. Классификация нелокальных задач приведена в [4].

В настоящей работе в области $D = \{(x,y) : 0 < x < \ell, -h_2 < y < h_1\}(\ell, h_1, h_2 > 0)$ рассмотрим задачу сопряжения для следующих нелинейных уравнений третьего порядка

$$u_{xxx}(x,y) - u_y(x,y) = f_1(x,y,u(x,y),u_x(x,y)), (x,y) \in D_1 = D \cap (y > 0), \quad (1)$$

$$u_{xyy}(x,y) = f_2(x,y,u(x,y),u_y(x,y)), (x,y) \in D_2 = D \cap (y < 0), \quad (2)$$

где $f_i (i = 1,2)$ - заданные функции.

Задача 1. Найти в области D функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D), u_{xxx} \in C(D_1), u_{xyy} \in C(D_2)$, удовлетворяющую уравнений (1) и (2) в области $D_1 \cup D_2$ и краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u(\ell,y) = \varphi_2(y), u_x(0,y) = \varphi_3(y), \quad 0 \le y \le h_1, \quad (3)$$

$$u(0,y) + \int_0^\ell P(x,y)u(x,y)dx = \chi(y), \quad -h_2 \le y \le 0, \quad (4)$$

$$u(x,-h_2) + \int_{-h_2}^0 Q(x,y)u(x,y)dy = \psi(x), \quad 0 \le x \le \ell, \quad (5)$$

где $\varphi_i(y)(i = \overline{1,3}), \chi(y), \psi(x), P(x,y), Q(x,y)$ - заданные функции.

Уравнения (1) и (2) по классификации работы [5] принадлежат к разным типам уравнений с частными производными третьего порядка, приведенных к каноническим видам относительно старших производных.

Из постановки задачи 1 следует, что на линии $y = 0$ выполняются условия сопряжения

$$u(x,-0) = u(x,+0), u_y(x,-0) = u_y(x,+0), \quad 0 \le x \le \ell. \quad (6)$$

Поэтому уравнения (1) и (2) в совокупности с условиями сопряжения (6) является уравнением смешанного типа [6] в области D. Краевые задачи для нелинейных уравнений смешанного типа второго порядка рассмотрены в работах [7,8], а для нелинейных уравнений третьего порядка в [9,10].

Пусть выполняются условия:

1)$\varphi_i(y) \in C^1[0,h_1](i = \overline{1,3})$, $\chi(y) \in C^2[-h_2,0]$, $\psi(x) \in C^1[0,\ell]$, $\varphi_1(0) = \chi(0)$, $\varphi_1'(0) = \chi'(0)$; $P(x,y) \in C^{0,2}(\overline{D_2})$, $P(x,0) = 0$, $P_y(x,0) = 0$, $Q(x,y) \in C^1(\overline{D_2})$;

2)$f_i(x,y,u,p) \in C(\overline{D} \times R^2), \forall (x,y,u,p) \in \overline{D} \times R^2 : max|f_i(x,y,u,p)| \le H, i = 1,2,\ H = const > 0, R^2$ - двумерное пространство переменных (u,p);

3) $\forall\ u,p,\bar{u},\bar{p} \in R^2 \exists L = const > 0 : |f_i(x,y,u,p) - f_i(x,y,\bar{u},\bar{p})| \le L(|u-\bar{u}| + |p-\bar{p}|), i = 1,2.$

Введем обозначения

$$u(x,0)=\tau(x),\, u_y(x,0)=\nu(x), \quad 0\le x\le \ell. \tag{7}$$

Переходя к пределу при $y\to +0$ из уравнения (1) получим

$$\tau'''(x)-\nu(x)=f_1(x,0,\tau(x),\tau'(x)), \quad 0<x<\ell. \tag{8}$$

Интегрируя уравнение (2) и учитывая краевые условия (4), (7) имеем

$$\begin{gathered}u(x,y)=\tau(x)+y\nu(x)-\int\limits_0^\ell P(\xi,y)u(\xi,y)d\xi+\chi(y)-\varphi_1'(0)y-\varphi_1(0)+\\ +\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^y (y-\eta)f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))d\eta,\,(x,y)\in D_2.\end{gathered} \tag{9}$$

Используя условие (5) из (9) получим соотношение

$$\begin{gathered}\tau(x)-h_2\nu(x)=\Psi(x)-\int\limits_{-h_2}^0 Q(x,\eta)u(x,\eta)d\eta-\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_{-h_2}^0 P(\xi,-h_2)Q(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta-\\ -\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{-h_2}^0 (h_2+\eta)f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))d\eta,\, 0\le x\le\ell,\end{gathered} \tag{10}$$

где $\Psi(x)=\psi(x)+\int\limits_0^\ell P(\xi,-h_2)\psi(\xi)d\xi-\chi(-h_2)-h_2\varphi_1'(0)+\varphi_1(0)$.

Исключая $\nu(x)$ из (8) и (10) относительно $\tau(x)$ приходим к следующей задаче

$$\begin{gathered}\tau'''(x)-\frac{1}{h_2}\tau(x)=f_1(x,0,\tau(x),\tau'(x))-\frac{1}{h_2}\Psi(x)+\frac{1}{h_2}\int\limits_{-h_2}^0 Q(x,\eta)u(x,\eta)d\eta+\\ +\frac{1}{h_2}\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_{-h_2}^0 P(\xi,-h_2)Q(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta+\frac{1}{h_2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{-h_2}^0 (h_2+\eta)f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))d\eta,\end{gathered} \tag{11}$$

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\,\tau(\ell)=\varphi_2(0),\,\tau'(0)=\varphi_3(0). \tag{12}$$

Уравнение (11) запишем в виде

$$\tau'''(x)=F(x), \quad 0<x<\ell, \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered}F(x)=\frac{1}{h_2}\tau(x)+f_1(x,0,\tau(x),\tau'(x))-\frac{1}{h_2}\Psi(x)+\frac{1}{h_2}\int\limits_{-h_2}^0 Q(x,\eta)u(x,\eta)d\eta+\\ +\frac{1}{h_2}\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_{-h_2}^0 P(\xi,-h_2)Q(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta+\frac{1}{h_2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{-h_2}^0 (h_2+\eta)f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))d\eta.\end{gathered}$$

Введем функцию $\tau(x)=\tau_1(x)+\Phi_1(x)$, где $\Phi_1(x)=(1-\frac{x^2}{\ell^2})\varphi_1(0)+\frac{x^2}{\ell^2}\varphi_2(0)+(x-\frac{x^2}{\ell})\varphi_3(0)$. Тогда с учетом (12) и (13) для $\tau_1(x)$ приходим к следующей задаче

$$\tau_1'''(x)=F(x), \quad 0<x<\ell, \quad \tau_1(0)=0,\tau_1(\ell)=0,\tau_1'(0)=0. \tag{14}$$

Решение задачи (14) имеет вид

$$\tau_1(x) = \int\limits_0^\ell G(x,\xi)F(\xi)d\xi,$$

где $G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{\xi\ell - x\xi}{2\ell^2}(x\xi + \xi\ell - 2x\ell), & 0 \le \xi \le x, \\ -\frac{x^2}{2\ell^2}(\ell-\xi)^2, & x \le \xi \le \ell. \end{cases}$ - функция Грина.

Таким образом для $\tau(x)$ получим следующее соотношение

$$\tau(x) = \Phi(x) + \frac{1}{h_2}\int\limits_0^\ell G(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \int\limits_0^\ell G(x,\xi)f_1(\xi,0,\tau(\xi),\tau'(\xi))d\xi +$$

$$+\int\limits_0^\ell d\xi \int\limits_{-h_2}^0 E_1(x,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta + \int\limits_0^\ell d\xi \int\limits_{-h_2}^0 E_2(x,\xi,\eta)f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))d\eta, \quad (15)$$

где $\Phi(x) = \Phi_1(x) - \frac{1}{h_2}\int\limits_0^\ell G(x,\xi)\Psi(\xi)d\xi$,

$$E_1(x,\xi,\eta) = \frac{1}{h_2}[G(x,\xi) + P(\xi,-h_2)\int\limits_0^\ell G(x,s)ds]Q(\xi,\eta), E_2(x,\xi,\eta) = \frac{h_2+\eta}{h_2}\int\limits_\xi^\ell G(x,s)ds.$$

Дифференцируя (15) имеем

$$\tau'(x) = \Phi'(x) + \frac{1}{h_2}\int\limits_0^\ell G_x(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \int\limits_0^\ell G_x(x,\xi)f_1(\xi,0,\tau(\xi),\tau'(\xi))d\xi +$$

$$+\int\limits_0^\ell d\xi \int\limits_{-h_2}^0 E_{1x}(x,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta + \int\limits_0^\ell d\xi \int\limits_{-h_2}^0 E_{2x}(x,\xi,\eta)f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))d\eta. \quad (16)$$

С учетом (15) для $\nu(x)$ получим соотношение

$$\nu(x) = \frac{1}{h_2}[\Phi(x) - \Psi(x)] + \frac{1}{h_2^2}\int\limits_0^\ell G(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \frac{1}{h_2}\int\limits_{-h_2}^0 Q(x,\eta)u(x,\eta)d\eta +$$

$$+\frac{1}{h_2}\int\limits_0^\ell G(x,\xi)f_1(\xi,0,\tau(\xi),\tau'(\xi))d\xi + \frac{1}{h_2}\int\limits_0^\ell d\xi \int\limits_{-h_2}^0 [E_1(x,\xi,\eta) + P(\xi,-h_2)Q(\xi,\eta)]u(\xi,\eta)d\eta +$$

$$+\frac{1}{h_2}\int\limits_0^\ell d\xi \int\limits_{-h_2}^0 E_2(x,\xi,\eta)f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))d\eta + \int\limits_0^x d\xi \int\limits_{-h_2}^0 \frac{h_2+\eta}{h_2}f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))d\eta. \quad (17)$$

Тогда с учетом (15), (17) из (9) для $u(x,y)$ получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \frac{h_2+y}{h_2^2}\int\limits_0^\ell G(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \frac{h_2+y}{h_2}\int\limits_0^\ell G(x,\xi)f_1(\xi,0,\tau(\xi),\tau'(\xi))d\xi -$$

$$-\int_0^{\ell} P(\xi,y)u(\xi,y)d\xi+\frac{y}{h_2}\int_{-h_2}^{0} Q(x,\eta)u(x,\eta)d\eta+\int_0^{\ell} d\xi\int_{-h_2}^{0}[\frac{h_2+y}{h_2}E_1(x,\xi,\eta)+$$

$$+\frac{y}{h_2}P(\xi,-h_2)Q(\xi,\eta)]u(x,\eta)d\eta+\frac{h_2+y}{h_2}\int_0^{\ell}d\xi\int_{-h_2}^{0} E_2(x,\xi,\eta)f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))d\eta+$$

$$+\int_0^{x}d\xi\int_{-h_2}^{0}\frac{y(h_2+\eta)}{h_2}f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))d\eta+\int_0^{x}d\xi\int_{y}^{0}(\eta-y)f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))d\eta, \qquad (18)$$

где $u_0(x,y)=\frac{h_2+y}{h_2}\Phi(x)-\frac{y}{h_2}\Psi(x)+\chi(y)-\varphi_1'(0)y-\varphi_1(0)$.

Дифференцируя по y из (18) получим

$$u_y(x,y)=u_{0y}(x,y)+\frac{1}{h_2^2}\int_0^{\ell}G(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\frac{1}{h_2}\int_0^{\ell}G(x,\xi)f_1(\xi,0,\tau(\xi),\tau'(\xi))d\xi-$$

$$-\int_0^{\ell}P_y(\xi,y)u(\xi,y)d\xi+\frac{1}{h_2}\int_{-h_2}^{0}Q(x,\eta)u(x,\eta)d\eta-\int_0^{\ell}P(\xi,y)u_y(\xi,y)d\xi+$$

$$+\frac{1}{h_2}\int_0^{\ell}d\xi\int_{-h_2}^{0}[E_1(x,\xi,\eta)+P(\xi,-h_2)Q(\xi,\eta)]u(\xi,\eta)d\eta+\frac{1}{h_2}\int_0^{\ell}d\xi\int_{-h_2}^{0}E_2(x,\xi,\eta)f_2(\xi,\eta,u,u_\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^{x}d\xi\int_{-h_2}^{0}\frac{h_2+\eta}{h_2}f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))d\eta-\int_0^{x}d\xi\int_{y}^{0}f_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),u_\eta(\xi,\eta))d\eta. \qquad (19)$$

Таким образом разрешимость задачи 1 сведена к решению системы уравнений (15), (16), (18), (19), которая является замкнутой системой интегральных уравнений Фредгольма второго рода и для его решения применим принцип сжатых отображений. С этой целью систему уравнений запишем в виде операторного уравнения

$$g=Ag, \qquad (20)$$

в котором $g=(g_1,g_2,g_3,g_4)$ - вектор - функция с компонентами $g_1=\tau(x), g_2=\tau'(x), g_3=u(x,y), g_4=u_y(x,y)$, а оператор $A=(A_1,A_2,A_3,A_4)$ определен на множестве функций $g\in C(\overline{D_2})$ и его компоненты в соответствии с равенствами (15), (16), (18), (19) определяются формулами

$$A_ig\equiv g_{0i}+\int_0^{\ell}K_{i1}g_1(\xi)d\xi+\int_0^{\ell}K_{i2}f_1(\xi,0,g_1(\xi),g_2(\xi))d\xi+\int_0^{\ell}K_{i3}g_3(\xi,y)d\xi+$$

$$+\int_{-h_2}^{0}K_{i4}g_3(x,\eta)d\eta+\int_0^{\ell}K_{i5}g_4(\xi,y)d\xi+\int_0^{\ell}d\xi\int_{-h_2}^{0}K_{i6}g_3(\xi,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^{\ell}d\xi\int_{-h_2}^{0}K_{i7}f_2(\xi,\eta,g_3(\xi,\eta),g_4(\xi,\eta))d\eta+\int_0^{x}d\xi\int_{-h_2}^{0}K_{i8}f_2(\xi,\eta,g_3(\xi,\eta),g_4(\xi,\eta))d\eta+$$

$$+\int\limits_0^x d\xi \int\limits_y^0 K_{i9} f_2(\xi,\eta,g_3(\xi,\eta),g_4(\xi,\eta))d\eta, i=\overline{1,4}, \qquad (21)$$

где

$$K_{11}=\frac{1}{h_2}G(x,\xi), K_{12}=G(x,\xi), K_{13}=0, K_{14}=0, K_{15}=0, K_{16}=E_1(x,\xi,\eta),$$

$$K_{17}=E_2(x,\xi,\eta), K_{18}=0, K_{19}=0, K_{21}=\frac{1}{h_2}G_x(x,\xi), K_{22}=G_x(x,\xi), K_{23}=0, K_{24}=0,$$

$$K_{25}=0, K_{26}=E_{1x}(x,\xi,\eta), K_{27}=E_{2x}(x,\xi,\eta), K_{28}=0, K_{29}=0, K_{31}=\frac{h_2+y}{h_2^2}G(x,\xi),$$

$$K_{32}=\frac{h_2+y}{h_2}G(x,\xi), K_{33}=-P(\xi,y), K_{34}=\frac{y}{h_2}Q(x,\eta), K_{35}=0,$$

$$K_{36}=\frac{h_2+y}{h_2}E_1(x,\xi,\eta)+\frac{y}{h_2}P(\xi,-h_2)Q(\xi,\eta), K_{37}=\frac{h_2+y}{h_2}E_2(x,\xi,\eta), K_{38}=\frac{y(h_2+\eta)}{h_2},$$

$$K_{39}=\eta-y, K_{41}=\frac{1}{h_2^2}G(x,\xi), K_{42}=\frac{1}{h_2}G(x,\xi), K_{43}=-P_y(\xi,y), K_{44}=\frac{1}{h_2}Q(x,\eta),$$

$$K_{45}=-P(\xi,y), K_{46}=\frac{1}{h_2}[E_1(x,\xi,\eta)+P(\xi,-h_2)Q(\xi,\eta)], K_{47}=\frac{1}{h_2}E_2(x,\xi,\eta),$$

$K_{48}=\frac{h_2+\eta}{h_2}$, $K_{49}=-1$, а $g_{01}=\Phi(x), g_{02}=\Phi'(x)$, $g_{03}=u_0(x,y)$, $g_{04}=u_{0y}(x,y)$ - компоненты вектора $g_0=(g_{01},g_{02},g_{03},g_{04})$.

Пусть оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S(g_0,M)=\{g:||g-g_0||\leq M\}$ в себя, где M - некоторое заданное число. Норму g определим равенством $||g||=\frac{max}{1\leq i\leq 4}max|g_i|$. Для элементов g, принадлежащих шару $S(g_0,M)$ имеет место оценка $||g||\leq||g_0||+M=Q$. В силу свойств заданных функций 1)-2) заключаем, что $max|K_{ij}|\leq T, T=const>0, i=\overline{1,4}, j=\overline{1,9}$.

Покажем, что оператор A является на шаре $S(g_0,M)$ оператором сжатия. Пусть $g\in S(g_0,M)$.Тогда $Ag\in C(\overline{D_2})$ и, кроме того, справедливо неравенство

$$|A_ig-g_{0i}|\leq \int\limits_0^\ell |K_{i1}||g_1(\xi)|d\xi+\int\limits_0^\ell |K_{i2}||f_1(\xi,0,g_1(\xi),g_2(\xi))|d\xi+\int\limits_0^\ell |K_{i3}||g_3(\xi,y)|d\xi+$$

$$+\int\limits_{-h_2}^0 |K_{i4}||g_3(x,\eta)|d\eta+\int\limits_0^\ell |K_{i5}||g_4(\xi,y)|d\xi+\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_{-h_2}^0 |K_{i6}||g_3(\xi,\eta)|d\eta+$$

$$+\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_{-h_2}^0 |K_{i7}||f_2(\xi,\eta,g_3(\xi,\eta),g_4(\xi,\eta))|d\eta+\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{-h_2}^0 |K_{i8}||f_2(\xi,\eta,g_3(\xi,\eta),g_4(\xi,\eta))|d\eta+$$

$$+\int\limits_0^x d\xi\int\limits_y^0 |K_{i9}||f_2(\xi,\eta,g_3(\xi,\eta),g_4(\xi,\eta))|d\eta\leq T(3Q\ell+H\ell+Qh_2+Q\ell h_2+3H\ell h_2), i=\overline{1,4}.$$

Отсюда заключаем, что если $T(3Q\ell+H\ell+Qh_2+Q\ell h_2+3H\ell h_2)\leq M$, то оператор A отображает шар $S(g_0,M)$ в себя. Если учесть, что $Q=||g_0||+M$, то из предыдущего неравенства имеем

$$MT(3\ell+h_2+\ell h_2)+T||g_0||(3\ell+h_2+\ell h_2)+TH\ell(1+3h_2)\leq M.$$

Очевидно, что оно имеет место, если $T(3\ell + h_2 + \ell h_2) < 1$ и $M \geq \frac{T||g_0||(3\ell+h_2+\ell h_2)+TH\ell(1+3h_2)}{1-T(3\ell+h_2+\ell h_2)}$. Тогда $\forall g \in S(g_0, M) : ||Ag - g_0|| \leq M$, то есть $Ag \in S(g_0, M)$.

Пусть $g^{(1)} = (g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, g_3^{(1)}, g_4^{(1)}), g^{(2)} = (g_1^{(2)}, g_2^{(2)}, g_3^{(2)}, g_4^{(2)})$ произвольные два элемента, принадлежащие шару $S(g_0, M)$. Тогда с помошью условия 3) имеем $\forall g^{(1)}, g^{(2)} \in S(g_0, M)$:

$$|f_i(x, y, g_3^{(1)}, g_4^{(1)}) - f_i(x, y, g_3^{(2)}, g_4^{(2)})| \leq L(|g_3^{(1)} - g_3^{(2)}| + |g_4^{(1)} - g_4^{(2)}|), i = 1, 2.$$

Используя это условие из (21) получим

$$|A_i g^{(1)} - A_i g^{(2)}| \leq \int\limits_0^\ell |K_{i1}| \cdot |g_1^{(1)}(\xi) - g_1^{(2)}(\xi)| d\xi + \int\limits_0^\ell |K_{i2}| \cdot |f_1(\xi, 0, g_1^{(1)}(\xi), g_2^{(1)}(\xi)) -$$

$$- f_1(\xi, 0, g_1^{(2)}(\xi), g_2^{(2)}(\xi))| d\xi + \int\limits_0^\ell |K_{i3}| \cdot |g_3^{(1)}(\xi, y) - g_3^{(2)}(\xi, y)| d\xi + \int\limits_{-h_2}^0 |K_{i4}| \cdot |g_3^{(1)}(x, \eta) -$$

$$- g_3^{(2)}(x, \eta)| d\eta + \int\limits_0^\ell |K_{i5}| \cdot |g_4^{(1)}(\xi, y) - g_4^{(2)}(\xi, y)| d\xi + \int\limits_0^\ell d\xi \int\limits_{-h_2}^0 |K_{i6}||g_3^{(1)}(\xi, \eta) - g_3^{(2)}(\xi, \eta)| d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^\ell d\xi \int\limits_{-h_2}^0 |K_{i7}| \cdot |f_2(\xi, \eta, g_3^{(1)}(\xi, \eta), g_4^{(1)}(\xi, \eta)) - f_2(\xi, \eta, g_3^{(2)}(\xi, \eta), g_4^{(2)}(\xi, \eta))| d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^x d\xi \int\limits_{-h_2}^0 |K_{i8}| \cdot |f_2(\xi, \eta, g_3^{(1)}(\xi, \eta), g_4^{(1)}(\xi, \eta)) - f_2(\xi, \eta, g_3^{(2)}(\xi, \eta), g_4^{(2)}(\xi, \eta))| d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^x d\xi \int\limits_y^0 |K_{i9}| \cdot |f_2(\xi, \eta, g_3^{(1)}(\xi, \eta), g_4^{(1)}(\xi, \eta)) - f_2(\xi, \eta, g_3^{(2)}(\xi, \eta), g_4^{(2)}(\xi, \eta))| d\eta \leq$$

$$\leq [T(3\ell + h_2 + \ell h_2) + 2TL\ell(1 + 3h_2)]||g^{(1)} - g^{(2)}||.$$

Отсюда следует, что если

$$T(3\ell + h_2 + \ell h_2) + 2TL\ell(1 + 3h_2) < 1, \tag{22}$$

то оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S(g_0, M)$ в себя. Тогда в силу теоремы С.Банаха [11] в шаре $S(g_0, M)$ существует и притом только одна неподвижная точка отображения, т.е. существует только одно решение уравнения (20). Решая это уравнение, например, методом последовательных приближений, мы однозначно определим все компоненты вектора g, в том числе $g_1(x) = \tau(x)$ и $g_3(x, y) = u(x, y)$ в области $\overline{D_2}$. Тем самым определяем решение задачи 1 в области D_2.

Решение задачи 1 в области D_1 определим как решение следующей задачи 2: найти в области D_1 регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (3) и $u(x, 0) = \tau(x)$.

Однозначная разрешимость этой задачи в случае линейного уравнения (1) рассмотрена в работе [12], а для нелинейного уравнения в работах [13,14].

Таким образом, доказана

Теорема. Если выполняются условия 1)-3) и (22), то решение задачи 1 существует и единственно.

Литература

[1] *Жестков С.В.* О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями//Украинск. матем. журнал. - 1990. - Т. 42. - N 1. - С. 132-135.

[2] *Пулькина Л.С., Климова Е.Н.* Нелокальная краевая задача для нелинейного уравнения колебаний струны //Мат.моделирование и краевые задачи: Тр. третьей всерос. науч. конф. Ч. 3.: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. - Самара: СамГТУ, 2006. - С. 192-195.

[3] *Бештоков М.Ч., Шхануков - Лафишев М.Х.* Об одной априорной оценке решения нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка//Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. третьей всерос. науч. конф. Ч. 3.: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. - Самара: СамГТУ, 2006. - С. 62-65.

[4] *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. - М.: Высш. шк., 1995. - 301 с.

[5] *Джураев Т.Д., Попелек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка //Дифференц. уравнения. - 1991. - Т. 27. - N 10. - С. 1734-1745.

[6] *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. - М.: Наука, 1970. - 296 с.

[7] *Гвазава Дж.К.* О некоторых классах квазилинейных уравнений смешанного типа. Тбилиси: Мецниереба, 1981. - 94 с.

[8] *Майоров И.В.* Об одной нелинейной системе уравнений смешанного типа. Докл. АН СССР. - 1968. - Т. 183, N2. - С. 280 - 283.

[9] *Сопуев У.А.* Краевые задачи для нелинейного уравнения смешанного типа третьего порядка // Естественные и технические науки. - М.: Спутник+, 2005. N6. - С. 14 - 20.

[10] *Сопуев А., Кожобеков К.Г.* Задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка// Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2006. - Вып. 34. - С. 146 - 151.

[11] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.,* Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1968. - 496 с.

[12] *Cattabriga L.* Annali della Seuola normole Supericri di pisa e mat. - 1959. - Vol. 13. - No.2. - P. 163-203.

[13] *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно - составного типов. - Ташкент: Фан, 1979. - 240 с.

[14] *Абдиназаров С.* Краевые задачи для уравнений с кратными характеристиками: Дис. ...докт. физ. - мат. наук: 01.01.02. - Ташкент, - 1992. - 239 с.