О неединственности задачи Трикоми для многомерного смешанно гиперболо-параболического уравнения

Н.А. Оршубеков
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
e-mail: al_jan@mail.ru

Аннотация

В работе построены примеры, которые показывают, что однородная задача Трикоми для многомерного смешанно гиперболо-параболического уравнения имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены ([1]). Насколько нам известно, их многомерные аналоги исследованы мало ([2]).

Пусть D_ε – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная в полупространстве $t > 0$ конусами $K_\varepsilon : |x| = t + \varepsilon, K_1 : |x| = 1 - t, 0 \leq t \leq (1 - \varepsilon)/2$, а при $t < 0$-цилиндрическими поверхностью $\Gamma = \{(x_0, t) : |x| = 1\}$, и плоскостью $t = t_0 = const$, где $|x|$ – длина вектор $x = (x_1, ..., x_m)$, а $0 < \varepsilon < 1$.

Обозначим через D_ε^+, D^- части области D_ε, лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$. Части конусов K_ε, K_1, ограничивающих области D_ε^+, обозначим через S^εи S^1 соответственно. Пусть $S_\varepsilon = \{(x, t) : |x| = 1\}$.

В области D_ε рассмотрим модельное смешанно гиперболо-параболическое уравнения

$$0 = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt}, & t < 0, \\ \Delta_x u - u_t, & t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где Δ_x - оператора Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m, m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r_1, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t, r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$.

Следуя [1] в качестве многомерного аналога задачи Трикоми рассмотрим следующую.

Задача Т. Найти решение уравнения (1) в области D_ε при $t \neq 0$ из класса $C(\bar{D}_\varepsilon) \cap C^1(D_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon^+ \cup D^-)$ удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S^\varepsilon} = 0\,, \quad u|_\Gamma = 0\,. \tag{2}$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$.

Через $\bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения рядов по сферическим функциям $Y_{n,m}^k(\theta)$, соответственно функции $\tau(r, \theta) = u(r, \theta, 0)$, $\nu(r, \theta) = u_t(r, \theta, 0)$.

Имеет место

Теорема. Решение задачи Т имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Доказательство. В сферических координатах уравнения (1) в области D_ε^+ имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_{tt} = 0, \tag{3}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j}(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j}), g_1 = 1, g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2, j > 1.$$

При $t \to -0$ на S_0 получим функциональное соотношение между $\tau(r,\theta)$ и $\nu(r,\theta)$ вида

$$\tau_{rr} + \frac{m-1}{r}\tau_r - \frac{1}{r^2}\delta\tau = \nu(r,\theta), 0 < r < 1. \tag{4}$$

Известно ([3]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, ...$, каждому из которых соответствует K_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи T в области D_ε^+ будет искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{5}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$-функции, подлежащие определению.

Подставляя (5) в (3) и (4), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([3]), будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k = 0, \tag{6}$$

$$\bar{\tau}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{\tau}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\tau}_n^k = \bar{\nu}_n^k(r), 0 < r < 1, \tag{7}$$

при этом первое условие краевого условия (2) запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r, r-\varepsilon) = 0, \varepsilon \le r \le (1+\varepsilon)/2, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, ... \tag{8}$$

В (6)-(8) произведя замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2} u_n^k(r,t)$ и полагая $\xi = \frac{r+t}{2}$, $\eta = \frac{r-t}{2}$ соответственно получим

$$u_{n\xi\eta}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{(\xi+\eta)^2} u_n^k = 0, \frac{\varepsilon}{2} < \eta < \xi < \frac{1}{2}, \tag{9}$$

$$\tau_{n\xi\xi}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{\xi^2}\tau_n^k = \nu_n^k(\xi), \frac{\varepsilon}{2} < \xi < \frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$u_n^k(\xi, \frac{\varepsilon}{2}) = 0, \frac{\varepsilon}{2} \le \xi \le \frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{(m-1)/2}\bar{\tau}_n^k(2\xi), \quad \nu_n^k(\xi) = (2\xi)^{(m-1)/2}\bar{\nu}_n^k(2\xi),$$

$$\bar{\lambda}_n = ((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)/4, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, ...$$

Используя общее решение уравнению (9)([4]) в [5] показано, что решение задачи Коши для уравнения (9) имеет вид

$$u_n^k(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta)+\frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}\left[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_{11}}\right]d\xi_1, \tag{12}$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)-P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ – функция Римана уравнения (9) ([6]), $P_\mu(z)$ – функция Лежандра, $\mu=n+(m-3)/2$, а

$$\frac{\partial}{\partial N}\Big|_{\xi_1=\eta_1}=\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N^1}\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial N^1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)\Big|_{\xi_1=\eta_1},$$

N^1 – нормаль к прямой $\xi=\eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta\leq\xi$.

Далее из (2),(11) получим

$$\tau_n^k(\frac{\varepsilon}{2})=0,\tau_n^k(\frac{1}{2})=0,k=\overline{1,k_n},n=0,1,.... \tag{13}$$

Решение уравнения (10) записывается в виде ([7])

$$\tau_n^k(\xi)=\frac{1}{S_2-S_1}\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}(\xi^{S_2}\xi_1^{3-S_2}-\xi^{S_1}\xi_1^{3-S_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1+C_{1n}^k\xi^{S_1}+C_{2n}^k\xi^{S_2}, \tag{14}$$

$\frac{\varepsilon}{2}<\xi<\frac{1}{2}$, $S_1=n+(m-1)/2$, $S_2=-n-(m-3)/2$, C_{1n}^k, C_{2n}^k – произвольные независимые постоянные.

Подставляя (13) в (14) для C_{1n}^k,C_{2n}^k получим систему уравнений

$$\begin{cases}(\frac{\varepsilon}{2})^{S_1}C_{1n}^k+(\frac{\varepsilon}{2})^{S_2}C_{2n}^k=0\\(\frac{1}{2})^{S_1}C_{1n}^k+(\frac{1}{2})^{S_2}C_{2n}^k=\frac{-1}{S_2-S_1}\int\limits_{\varepsilon/2}^{1/2}(2^{-S_2}\xi_1^{3-S_2}-2^{-S_1}\xi_1^{3-S_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1,\end{cases}$$

из которого найдем

$$C_{1n}^k=\varepsilon^{S_2}\cdot2^{S_1}A_n^k/(\varepsilon^{S_1}-\varepsilon^{S_2}),\quad C_{2n}^k=-\varepsilon^{-S_1}\cdot2^{S_2}A_n^k/(\varepsilon^{S_1}-\varepsilon^{S_2}),$$

$$A_n^k=const=\frac{1}{S_2-S_1}\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}(2^{-S_2}\xi_1^{3-S_2}-2^{-S_1}\xi_1^{3-S_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1. \tag{15}$$

Из (12),(14), учитывая условие (11) будем иметь

$$f_n^k(\xi)=\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}(\xi^{S_2}\xi_1^{3-S_2}-\xi^{S_1}\xi_1^{1-S_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1+\sqrt{2}(S_2-S_1)\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1\left(\xi+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right]d\xi_1-$$

$$-\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}\left\{\int\limits_{\xi_2}^{\xi}(\xi_1^{S_2-1}\xi_2^{3-S_2}-\xi_1^{S_1-1}\xi_2^{3-S_1})P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]\right\}\nu_n^k(\xi_2)d\xi_2, \qquad (16)$$

где

$$f_n^k(\xi)=(S_2-S_1)\left\{-C_{1n}^k\xi^{S_1}-C_{2n}^k\xi^{S_2}+C_{1n}^k\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}+\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}\xi_1^{S_1-1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]d\xi_1+\right.$$

$$\left.+C_{2n}^k\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}\xi_1^{S_2-1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]d\xi_1\right\}.$$

Уравнения (16) продифференцировав по ξ получим интегральное уравнение Вольтера второго рода

$$\chi_n^k(\xi)=\nu_n^k(\xi)+\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}G_n(\xi,\xi_1)\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1,\ \frac{\varepsilon}{2}<\xi<\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2}(S_2-S_1)\chi_n^k(\xi)=\frac{df_n^k}{d\xi},\ \sqrt{2}(S_2-S_1)G_n(\xi,\xi_1)=S_2\xi^{S_2-1}\xi_1^{3-S_2}-S_1\xi^{S_1-1}\xi_1^{3-S_1}+$$

$$+\sqrt{2}(S_2-S_1)\frac{(\varepsilon^2-4\xi_1^2)}{\xi_1(2\xi+\varepsilon)^2}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]-\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}(\xi^{S_2-1}\xi_1^{3-S_2}-\xi_1^{S_1-1}\xi_1^{3-S_1})-$$

$$-\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\left(\xi_2^{S_2-1}\xi_1^{3-S_2}-\xi_2^{S_1-1}\xi_1^{3-S_2}\right)\left[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}P'_\mu\left(\frac{\xi_2^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_2\left(\xi+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(2\xi-\varepsilon)(\varepsilon^2-4\xi_2^2)}{\xi_2(2\xi+\varepsilon)^3}P''_\mu\left(\frac{\xi_2^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_2\left(\xi+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)\right]d\xi_2,$$

из которого найдем

$$\nu_n^k(\xi)=\chi_n^k(\xi)-\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}R_n(\xi,\xi_1;-1)\chi_n^k(\xi_1)d\xi_1, \qquad (17)$$

где $R_n(\xi,\xi_1;-1)$ – резольвента ядра $G_n(\xi,\xi_1)$.

Далее из (15)-(17) имеем

$$\sqrt{2}(S_2-S_1)A_n^k=\int\limits_{\varepsilon/2}^{1/2}\left(2^{-S_2}\xi_1^{3-S_2}-2^{-S_1}\xi_1^{3-S_1}\right)\left[\frac{df_n^k}{d\xi_1}-\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi_1}R_n(\xi_1,\xi_2;-1)\frac{df_n^k}{d\xi_2}d\xi_2\right]d\xi_1, \qquad (18)$$

$$\frac{(\varepsilon^{S_1}-\varepsilon^{S_2})}{(S_2-S_1)}\frac{df_n^k}{d\xi}=\Bigg\{\varepsilon^{S_2}2^{S_1}\Bigg[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}\xi_1^{S_1-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1\left(\xi+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)d\xi_1+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-S_1\right)\xi^{S_1-1}+$$

$$+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)^3}\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}(\varepsilon^2-4\xi_1^2)\xi_1^{S_1-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\Bigg]-\varepsilon^{S_1}\varepsilon^{S_2}\Bigg[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}\xi_1^{S_2-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1+$$

$$+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-S_2\right)\xi^{S_2-1}+\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}(\varepsilon^2-4\xi_1^2)\,\xi_1^{S_2-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1\left(\xi+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)d\xi_1\}A_n^k\equiv$$

$$\equiv L_n(S_1,S_2,\xi)A_n^k, \tag{19}$$

т.к. $L_n\neq 0, \frac{dL_n}{d\xi}\neq 0, \forall\xi\in[\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{2}]$, то из (18),(19) следует, что $A_n^k=0$ и $\frac{df_n^k}{d\xi}\equiv 0$.

Следовательно, из (17), (14) вытекает, что $\tau_n^k(\xi)\equiv 0$

Теперь задачу T будем изучать в области D^-. Для этого сначала функцию $\tau_n^k(r)$ продолжим гладким образом на отрезок [0,1] в виде

$$g_n^k(r)=\begin{cases}0, \varepsilon\leq r\leq 1\\ \tilde{\tau}_0^1(r), 0\leq r\leq\varepsilon,\\ n^{-l}\tilde{\tau}_n^k(r), 0\leq r\leq\varepsilon, k=\overline{1,k_n}, n=1,2,...\end{cases} \tag{20}$$

где $\tilde{\tau}_n^k(r)\in C([0,\varepsilon])$, причем $\tilde{\tau}_n^k(\varepsilon)=0, \tilde{\tau}_n^k(r)=r^\alpha\tilde{\tau}_n^k(r), \alpha\geq(m-1)/2$,

В силу оценок ([3])

$$k_n\leq cn^{m-2}, \left|\frac{\partial^p}{\partial\theta_j^p}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leq cn^{\frac{m}{2}-p+1}, c=const, j=\overline{1,m-1}, p=0,1,...$$

ряд $u(r,\theta,0)=g(r,\theta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}r^{(1-m)/2}g_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)$, сходится абсолютно и равномерно, если $l>3m/2$.

В области D^- рассмотрим первую краевую задачу для уравнения

$$\Delta_x u-u_t=0 \tag{21}$$

с условиями

$$u|_{S_0}=g(r,\theta),\quad u|_\Gamma=0. \tag{22}$$

Решение задачи (21), (22) будем искать в виде (5).

Подставляя (5) в (21) получим уравнение

$$u_{nrr}^k-u_{nt}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}u_n^k=0, л=\overline{1,k_n}, n=0,1,.... \tag{23}$$

при этом краевое условие (22) имеет вид

$$u_n^k(r,0) = g_n^k(r), u_n^k(1,t) = 0, k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,.... \tag{24}$$

Решение задачи (23),(24), аналогично [8], рассмотрим в виде

$$u_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{25}$$

при этом пусть

$$g_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s R_s(r). \tag{26}$$

Подставляя (25) в (23), с учетом (24), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s + \mu R_s = 0, 0 < r < 1, \tag{27}$$

$$R_s(0) = 0, R_s(1) = 0, \tag{28}$$

$$T_{st} + \mu T_s = 0. \tag{29}$$

Ограниченное решение задачи (27), (28) имеет вид ([7])

$$R_s(r) = \sqrt{r}J_\nu(\gamma_s r), \tag{30}$$

где $\nu = n + (m-2)/2$, $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода, γ_s – ее нули, $\mu = \gamma_s^2$, а решение уравнения (29) является

$$T_s(t) = \exp(-\gamma_s^2 t). \tag{31}$$

Далее подставляя (30) в (26) будем иметь

$$r^{-\frac{1}{2}}g_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s J_\nu(\gamma_s r), 0 < r < 1,$$

которая является рядом Фурье-Бесселя ([9]), если

$$a_s = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\gamma_s)]^2}\int_0^1 \sqrt{\xi}g_n^k(\xi)J_\nu(\gamma_s\xi)d\xi, \tag{32}$$

где $\gamma_s, s = 1,2,...$ – положительные нули функций Бесселя, расположенные в порядке возрастания их величины. Таким образом из (25), (30), (31) следует, что решением задачи (21), (22) в области D^- является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{s=1}^{\infty} a_s r^{(2-m)/2} J_\nu(\gamma_s r)Y_{n,m}^k(\theta)\exp(-\gamma_s^2 t) \tag{33}$$

и принадлежит классу $C(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^1(D^- \cup S) \cap C^2(D^-)$, где a_s определяется из (32).

Так как продолжение (20) неоднозначно, то решение (33), также является неоднозначным.

Следовательно, задача Т имеет нетривиальные решения вида (33)

Теорема доказана.

Литература

[1] *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных, М.: Наука, 2006.- 287 с.

[2] *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, Новосибирск: НГУ, 1983 - 84 с.

[3] *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М.: Физматгиз, 1962 - 254 с.

[4] *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа, М.: Изд-во АН СССР, 1959 - 164 с.

[5] *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений, Алматы: Гылым, 1994 - 170 с.

[6] *Copson E.T.* On the Riemann-Green function // J. Rath. Mech. and Anal., 1958, vol.1, pp. 324-348.

[7] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: Наука, 1965. - 703 с.

[8] *Тихонов А.А., Самарский А.А.* Уравнения математической физики,М.:Наука, 1977 - 659 с.

[9] *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функций, т.2 - М.: Наука, 1974 - 295 с.