1-бөлім Математика | Раздел 1 Математика | Section 1 Matematics

УДК 517.968.2

Айсагалиев С.А.*, Жунусова Ж.Х.**

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: *serikbai.aisagaliev@kaznu.kz, **zhzhkh@mail.ru

Разрешимость и построение решения уравнения Фредгольма первого рода

Разрешимость и построение общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода относятся к числу мало исследованных проблем математики. Существуют различные подходы к решению данной проблемы. Следует отметить следующие методы решения некорректной задачи: метод регуляризации, метод последовательных приближений, метод неопределенных коэффициентов. Цель данной работы создание нового метода для разрешимости и построение решения интегрального уравнения первого рода. Как следует из вышеизложенного, исследования разрешимости и построение решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода является актуальным. В данной работе рассматриваются разрешимость и построение решения матричного интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Построение приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Полученные результаты верны для матричного интегрального уравнения Фредгольма первого рода, как с несимметричным ядром, так и с симметричным. Предлагается новый метод исследования разрешимости и построения решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Получены необходимое и достаточное условия существования решения при заданной правой части, для двух случаев: когда искомая функция принадлежит пространству L_2; искомая функция принадлежит заданному множеству из L_2. Получены условия разрешимости и метод построения приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

Ключевые слова: интегральное уравнение, разрешимость, построения решения, экстремальная задача, градиент функционала, минимизирующие последовательности.

Aisagaliev S.A., Zhunussova Zh.Kh.

Solvability and construction of solution of the first kind Fredholm integral equation

The solvability and construction of the general solution of the the first kind Fredholm integral equation are among the few studied problems in mathematics. There are various approaches to solving this problem. Note the following methods for solving ill-posed problem: regularization method, the method of successive approximations, the method of undetermined coefficients. The purpose of this work to create a new method for solvability and construction of solution of integral equation of the first kind. It follows from the foregoing, the study of the solvability and construction of the solution of the Fredholm integral equation of the first kind is topical. In this paper the solvability and construction of the solution matrix Fredholm integral equation of the first kind is considered. Construction of an approximate solution of Fredholm integral equation of the first kind. The results are valid for the matrix Fredholm integral equation of the first kind, like with asymmetric core and symmetric. A new method for studying of solvability and construction of a solution for Fredholm integral equation of the first kind is proposed. Necessary and sufficient conditions for existence of solutions for a given right-hand side are obtained in two cases: when the origin function belongs to the space L_2; origin function belongs to a given set of L_2. Solvability conditions and the method of construction an approximate solution of the integral Fredholm equation of the first kind are obtained.

Key words: integral equation, solvability, construction of a solution, extreme problem, functional gradient, minimizing sequences.

Айсағалиев С.А., Жүнісова Ж.Х.

Бірінші текті Фредгольмнің теңдеуінің шешімінін құру мен шешімділігі

Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің шешілімділігі мен құрылуы аз зерттелген математиканың проблемаларына жатады. Осы проблеманы шешудің әртүрлі әдістері бар. Ол келесі әдістер: регуляризация әдісі, біртіндеп жуықтау әдісі, анықталмаған коэффициенттер әдісі. Бірінші текті интегралдық теңдеуінің шешілімділігі мен құрылуына жана әдіс ұсыну осы жұмыстың мақсаты. Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің шешілімділігі мен құрылуын зерттеу маңызды мәселе. Осы жұмыста Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің шешілімділігі мен құрылуы қарастырылады. Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің жуықтау шешімін құру. Алынған нәтижелер матрицалық Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің симметриялық және симметриялық емес өзегіне дұрыс. Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің шешілімділігін зерттеудің және оның шешімін құрудың жана әдісі ұсынылады. Оң жақ бөлігі алдын ала анықталған шешімнің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары: а) ізделініп отырған функция L_2 кеңістігіне және б) ізделініп отырған функция L_2 кеңістігіне тиісті берілген жиынға жататын екі жағдай үшін алынған. Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің шешімділігінің шарттары мен оның жуық шешімін құрудың әдісі алынған.

Түйін сөздер: интегралдық теңдеу, шешілімділік, шешім құру, экстремалды есеп, функционалдың градиенті, минималдаушы тізбек.

1 Введение

Решения проблем управляемости динамических систем [1-3], математической теории оптимальных процессов [4-6], краевых задач дифференциальных уравнений с фазовыми и интегральными ограничениями [7-9] сводятся к разрешимости и построению общего решения интегрального уравнения первого рода

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u(\tau)d\tau = f(t), \tag{1}$$

где $K(t,\tau)$ – измеримая функция на множестве $S_0 = \{(t,\tau) \in R^2 \ / \ t_0 \le t \le t_1, \ \ t_0 \le \tau \le t_1\}$ и существует интеграл

$$P^2 = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} |K(t,\tau)|^2 dt d\tau < \infty,$$

функция $f(t) \in L_2(I,R^1)$. Необходимо найти решение $u(\tau) \in L_2(I,R^1)$, где $I = [t_0,t_1]$.

Разрешимость и построение общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода относятся к числу мало исследованных проблем математики.

Как следует из [10], норма $\|K\| \le P$, оператор K с ядром из $L_2(S_0)$ является вполне непрерывным оператором, который всякую слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся. Обратный оператор не ограничен [11], уравнение $Ku = f$ не может быть разрешимо при всех $f \in L_2$. Это приводит к тому, что малая погрешность в f приводит к сколь угодно большой ошибке в решении уравнения (1).

Известные теоретические результаты по разрешимости уравнения (1) относятся к случаю, когда $K(t,\tau) = K(\tau,t)$ т.е. уравнению (1) с симметричным ядром. Одним из основных результатов разрешимости уравнения (1) является теорема Пикара [12]. Однако для применения данной теоремы необходимо доказать полноту собственных функций симметричного ядра.

Таким образом, разрешимость и построение решения интегрального уравнения (1) является сложной мало исследованной некорректной задачей. Существуют различные подходы к решению данной проблемы. Следует отметить следующие методы решения некорректной задачи:

1) Метод регуляризации [13], основанный на сведении исходной задачи к корректной задаче. Для регуляризации необходимо выполнения априорных требований к исходным данным задачи. В работах [14, 15] предложены методы решения корректной задачи, после регуляризации. К сожалению дополнительные требования, налагаемые к исходным данным задачи, не всегда выполняются и методы решения корректной задачи трудоемки;

2) Метод последовательных приближений [16] для решения уравнения (1). Метод применим, когда $K(t,\tau)$ симметричное положительное ядро в L_2 и требуется определение наименьшего характеристического числа;

3) Метод неопределенных коэффициентов [17]. Предлагается искать решения уравнения (1) в виде ряда. Однако, в общем случае, определение коэффициентов ряда чрезвычайно трудно.

Как следует из вышеизложенного исследования разрешимости и построение решения уравнения (1) является актуальным.

Цель данной работы создание нового метода для разрешимости и построение решения интегрального уравнения первого рода.

2 Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$Ku = \int_a^b K(t,\tau)u(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in [t_0, t_1] = I, \tag{2}$$

где $K(t,\tau) = \|K_{ij}(t,\tau)\|$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ – известная матрица порядка $n \times m$, элементы матрицы $K(t,\tau)$ функции $K_{ij}(t,\tau)$ измеримы и принадлежат классу L_2 на множестве $S_1 = \{(t,\tau) \in R^2 \ / \ t_0 \le t \le t_1, \ a \le \tau \le b\}$,

$$\int_a^b \int_{t_0}^{t_1} |K_{ij}(t,\tau)|^2 dt d\tau < \infty,$$

функция $f(t) \in L_2(I, R^n)$ – заданная, $u(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$, $I_1 = [a,b]$ – искомая функция, величины t_0, t_1, a, b – фиксированы, $K : L_2(I_1, R^m) \to L_2(I, R^n)$.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1 *Найти необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения* (2) *при заданном* $f(t) \in L_2(I, R^n)$.

Задача 2 *Найти решение интегрального уравнения* (2) *при заданном* $f(t) \in L_2(I, R^n)$.

Задача 3 *Найти необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения* (2) *при заданном* $f(t) \in L_2(I, R^n)$, *когда искомая функция* $u(\tau) \in U(\tau) \subset L_2(I_1, R^m)$.

Задача 4 *Найти решения интегрального уравнения* (2) *при заданном* $f(t) \in L_2(I_1, R^m)$, *когда* $u(\tau) \in U(\tau) \subset L_2(I_1, R^m)$.

Задача 5 *Найти приближенное решение интегрального уравнения* (2).

Как следует из постановки задачи рассматриваются разрешимость и построение решения матричного интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Построение приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Полученные результаты верны для матричного интегрального уравнения Фредгольма первого рода, как с несимметричным ядром, так и с симметричным.

Данная работа является продолжением исследований приведенных в [1-9, 18-22].

3 Разрешимость интегрального уравнения Фредгольма первого рода

Рассмотрим решения задач 1, 2. для интегрального уравнения (2). Решения задач 1, 2 могут быть сведены к исследованию экстремальной задачи: минимизировать функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} |f(t) - \int_a^b K(t,\tau)u(\tau)d\tau|^2 dt \to \inf \tag{3}$$

при условии

$$u(\tau) \in L_1(I_1, R^m), \tag{4}$$

где $f(t) \in L_2(I, R^n)$ – заданная функция, $|\ \cdot\ |$ – евклидова норма.

Теорема 1 *Пусть ядро оператора* $K(t,\tau)$ *измеримо и принадлежит классу* L_2 *в прямоугольнике* $S_1 = \{(t,\tau)\ /\ t \in I = [t_0, t_1],\ \ \tau \in I_1 = [a, b]\}$.

Тогда:

1) функционал (3) *при условии* (4) *непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала* $J'(u) \in L_2(I_1, R^m)$ *в любой точке* $u(\cdot) \in L_2(I_1, R^m)$ *определяется по формуле*

$$J'(u) = -2\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)f(t)dt + 2\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K^*(t,\tau)K(t,\sigma)u(\sigma)d\sigma dt \in L_2(I_1, R^m); \tag{5}$$

2) градиент функционала $J'(u) \in L_2(I_1, R^m)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|J'(u+h) - J'(u)\| \le l\|h\|,\ \ \forall u,\ u+h \in L_2(I_1, R^m); \tag{6}$$

3) функционал (3) *при условии* (4) *является выпуклым, т.е.*

$$J(\alpha u+(1-\alpha)v)\le \alpha J(u)+(1-\alpha)J(v),\ \ \forall u,v\in L_2(I_1,R^m),\ \ \forall\alpha,\ \alpha\in[0,1]; \tag{7}$$

4) вторая производная по Фреше равна

$$J''(u)=2\int\limits_{t_0}^{t_1}K^*(t,\sigma)K(t,\tau)dt. \tag{8}$$

5) если выполнено неравенство

$$\begin{gathered}\int\limits_a^b\int\limits_a^b\xi^*(\sigma)\left[\int\limits_{t_0}^{t_1}K^*(t,\sigma)K(t,\tau)dt\right]\xi(\tau)d\tau d\sigma=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t,\tau)\xi(\tau)d\tau\right]^2dt\ge\\ \ge\mu\int\limits_a^b|\xi(\tau)|^2d\tau,\ \ \mu>0,\ \ \forall\xi,\ \xi\in L_2(I_1,R^m),\end{gathered} \tag{9}$$

то функционал (3) *при условии* (4) *является сильно выпуклым.*

Доказательство. Как следует из (3) функционал

$$J(u)=\int\limits_{t_0}^{t_1}[f^*(t)f(t)-2f^*(t)\int\limits_a^bK(t,\tau)u(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_a^b\int\limits_a^bu^*(\tau)K^*(t,\tau)K(t,\sigma)u(\sigma)d\sigma]dt.$$

Тогда приращение функционала

$$\begin{gathered}\Delta J=J(u+h)-J(u)=\int\limits_a^b<-2\int\limits_{t_0}^{t_1}K^*(t,\sigma)f(t)dt,h(\sigma)>d\sigma+\\ +\int\limits_a^b<2\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^bK^*(t,\sigma)K(t,\tau)u(\tau)d\tau dt,h(\sigma)>d\sigma+\\ +\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b\int\limits_a^bh^*(\tau)K^*(t,\tau)K(t,\sigma)h(\sigma)d\sigma d\tau dt=\\ =<J'(u),h>_{L_2}+o(h),\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$|o(h)|=|\int\limits_{t_0}^{t_1}[\int\limits_a^b\int\limits_a^bh^*(\tau)K^*(t,\tau)K(t,\sigma)h*(\sigma)d\sigma d\tau]|dt\le c_1\|h\|^2_{L_2}.$$

Из (10) следует, что $J'(u)$ определяется по формуле (5). Так как

$$J'(u+h) - J'(u) = 2\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b K^*(t,\tau)K(t,\sigma)h(t,\sigma)d\sigma dt,$$

то

$$|J'(u+h) - J'(u)| \leq 2\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b \|K^*(t,\tau)\|\ \|K(t,\sigma)\|\ |h(t,\sigma)|d\sigma dt \leq$$

$$\leq c_2(\tau)\|h\|_{L_2},\ \ c_2(\tau) > 0,\ \ \tau \in I_1.$$

Тогда

$$\|J'(u+h) - J'(u)\|_{L_2} = \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} |J'(u+h) - J'(u)|^2 d\tau\right)^{1/2} \leq l\|h\|_{L_2},$$

для любых $u,\ u+h \in L_2(I_1, R^m)$. Отсюда следует неравенство (6).

Покажем, что функционал (3) при условии (4) является выпуклым. В самом деле, для любых $u,\ w \in L_2(I_1, R^m)$ верно неравенство

$$< J'(u) - J'(w), u - w >_{L_2} = < 2\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b K^*(t,\tau)K(t,\sigma)[u(\sigma) - w(\sigma)]d\sigma dt,\ u - w >_{L_2} =$$

$$= 2\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\{\int\limits_a^b\int\limits_a^b [u(\sigma) - w(\sigma)]^* K^*(t,\tau)K(t,\sigma)[u(\sigma) - w(\sigma)]d\sigma dt\right\} d\tau =$$

$$= 2\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\int\limits_a^b K(t,\sigma)[u(\sigma) - w(\sigma)]d\sigma\right]^2 dt \geq 0.$$

Это означает, что функционал (3) является выпуклым, т.е. выполнено неравенство (7). Как следует из (5)

$$J'(u+h) - J'(u) = < J''(u), h > = < 2\int\limits_{t_0}^{t_1} K^*(t,\sigma)K(t,\tau)dt, h >_{L_2} =$$

$$= 2\int\limits_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)K(t,\sigma)h(\sigma)d\sigma dt.$$

Следовательно, $J''(u)$ определяется по формуле (8). Из (8), (9) следует, что

$$< J''(u)\xi, \xi >_{L_2} \geq \mu\|\xi\|^2,\ \ \forall u,\ u \in L_2(I_1, R^m),\ \ \forall\xi,\ \xi \in L_2(I_1, R^m).$$

Это означает, что функционал $J(u)$ сильно выпуклый в $L_2(I_1, R^m)$. Теорема доказана.

Теорема 2 *Пусть для экстремальной задачи* (3), (4) *построена последовательность* $\{u_n(\tau)\} \in L_2(I_1, R^n)$ *по алгоритму [21]*

$$u_{n+1}(\tau) = u_n(\tau) - \alpha_n J'(u_n), \;\; g_n(\alpha_n) = \min g_n(\alpha), \;\; \alpha \geq 0,$$

$$g_n(\alpha) = J(u_n - \alpha J'(u_n)), \;\; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Тогда числовая последовательность $\{J(u_n)\}$ *монотонно убывает, предел* $\lim\limits_{n\to\infty} J'(u_n) = 0$.

Если, кроме того, множество $M(u_0) = \{u(\cdot) \in L_2(I_1, R^n)/J(u) \leq J(u_0)\}$ *ограничено, то:*

1) последовательность $\{u_n(\tau)\} \subset M(u_0)$ *является минимизирующей, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = J_* = \inf J(u), \;\; u \in L_2(I, R^m);$$

2) последовательность $\{u_n\}$ *слабо сходится к множеству* U_*, *где* $U_* = \{u_*(\tau) \in L_2(I_1, R^m)/J(u_*) = \min\limits_{u\in M(u_0)} J(u) = J_* = \inf\limits_{u\in L_2(I_1,R^m)} J(u)\}$, $u_n \overset{сл}{\to} u_*$ *при* $n \to \infty$;

3) справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(u_n) - J(u_*) \leq \frac{m_0}{n}, \;\; m_0 = const > 0, \;\; n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

4) если выполнено неравенство (9), *то последовательность* $\{u_n\} \subset L_2(I_1, R^n)$ *сильно сходится к точке* $u_* \in U_*$. *Справедливы следующие оценки*

$$\begin{gathered} 0 \leq J(u_n) - J(u_*) \leq [J(u_0) - J_*]q^n, \;\; q = 1 - \frac{\mu}{l}, \;\; 0 \leq q \leq 1, \;\; \mu > 0, \\ \|u_n - u_*\| \leq \left(\frac{2}{\mu}\right)[J(u_0) - J(u_*)]q^n, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{12}$$

где $J_* = J(u_*)$;

5) для того, чтобы интегральное уравнение Фредгольма первого рода (2) *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы значение* $J(u_*) = 0$, $u_* \in U_*$. *В этом случае функция* $u_*(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$ *– решение интегрального уравнения* (2).

6) если значение $J(u_*) > 0$, *то интегральное уравнение* (2) *не имеет решения при заданном* $f(t) \in L_2(I, R^n)$.

Доказательство. Так как $g_n(\alpha_n) \leq g_n(\alpha)$, то $J(u_n) - J(u_{n+1}) \geq J(u_n) - J(u_n - \alpha J'(u_n))$, $\alpha \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. С другой стороны из включения $J(u) \in C^{1,1}(L_2(I_1, R^m))$ следует, что

$$J(u_n) - J(u_n - \alpha J'(u_n)) \geq \alpha(1 - \frac{\alpha l}{2})\|J'(u_n)\|^2, \;\; \alpha \geq 0, \;\; n - 0, 1, 2, \ldots .$$

Тогда

$$J(u_n) - J(u_{n+1}) \geq \frac{1}{2l}\|J'(u_n)\|^2 > 0.$$

Отсюда следует, что числовая последовательность $\{J(u_n)\}$ монотонно убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} J'(u_n) = 0$. Первое утверждение теоремы доказано.

Поскольку функционал $J(u)$ выпуклый при $u \in L_2$, то множество $M(u_0)$ выпукло. Тогда

$$0 \le J(u_n) - J(u_*) \le < J'(u_n), u_n - u_* >_{L_2} \le \|J'(u_n)\| \, \|u_n - u_*\| \le D\|J'(u_n)\|,$$

$$u_n \in M(u_0), \;\; u_* \in M(u_0),$$

где D – диаметр множества $M(u_0)$. Так как $M(u_0)$ – ограниченное выпуклое замкнутое множество в L_2, то оно слабо бикомпактно. Выпуклый непрерывно дифференцируемый функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу. Тогда множество $U_* \ne \varnothing$, $\varnothing$ – пустое множество, $U_* \subset M(u_0)$, $\{u_n\} \subset M(u_0)$, $u_* \in M(u_0)$. Заметим, что

$$0 \le \lim_{n\to\infty} J(u_n) - J(u_*) \le D \lim_{n\to\infty} \|J'(u_n)\| = 0, \;\; \lim_{n\to\infty} J(u_n) = J(u_*) = J_*.$$

Следовательно, на множестве $M(u_0)$ достигается нижняя грань функционала $J(u)$ в точке $u_* \in U_*$, последовательность $\{u_n\} \subset M(u_0)$ является минимизирующей. Итак, доказано второе утверждение теоремы.

Третье утверждение теоремы следует из включения $\{u_n\} \subset M(u_0)$, $M(u_0)$ – слабо бикомпактное множество, $J(u_*) = \min J(u) = J_* = \inf J(u)$, $u \in M(u_0)$. Следовательно, $u_n \overset{\text{сл}}{\to} u_*$ при $n \to \infty$.

Из неравенств

$$J(u_n) - J(u_{n+1}) \le \frac{1}{2l}\|J'(u_n)\|^2, \;\; 0 \le J(u_n) - J(u_*) \le D\|J'(u_n)\|,$$

$$u_n \overset{\text{сл}}{\to} u_* \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

следует оценка (11), где $m_0 = 2D^2 l$. Четвертое утверждение теоремы доказано.

Если выполнено неравенство (9), то функционал (3) при условии (4) является сильно выпуклым. Тогда

$$J(u_n) - J(u_*) \le < J'(u_n), u_n - u_* > -\frac{\mu}{2}\|u_n - u_*\|^2 \le 2\mu\|J'(u_n)\|^2, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$J(u_n) - J(u_{n+1}) \ge \frac{1}{2l}\|J'(u_n)\|^2, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Отсюда следует, что $a_n - a_{n+1} \ge \dfrac{\mu}{l} a_n$, где $a_n = J(u_n) - J(u_*)$. Следовательно, $0 \le a_{n+1} \le a_n(1 - \dfrac{\mu}{l}) = q a_n$. Тогда $a_n \le q a_{n-1} \le q^2 a_{n-2} \le \ldots \le q^n a_0$, где $a_0 = J(u_0) - J(u_*)$. Отсюда следует оценки (12). Пятое утверждение теоремы доказано.

Как следует из (3), значение $J(u) \ge 0$, $\forall u$, $u \in L_2(I_1, R^m)$. Последовательность $\{u_n\} \subset L_2(I_1, R^m)$ является минимизирующей для любой начальной точки $u_0 = u_0(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$ т.е. $J(u_*) = \min\limits_{u \in L_2(I_1, R^m)} J(u) = J_* = \inf\limits_{u \in L_2(I_1, R^m)} J(u)$.

Если $J(u_*) = 0$, то $f(t) = \int\limits_a^b K(t,\tau) u_*(\tau) d\tau$. Таким образом, интегральное уравнение (2) имеет решение тогда и только тогда, когда значение $J(u_*) = 0$, где $u_* = u_*(\tau) \in L_2(I_p, R^n)$ – решение интегрального уравнения (2). Если значение $J(u_*) > 0$, то $f(t) \ne$

$\int\limits_a^b K(t,\tau)u_*(\tau)d\tau$, следовательно, $u_* = u_*(\tau)$, $\tau \in I_1$ не является решением интегрального уравнения (2). Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда искомая функция $u(\tau) \in U(\tau) \subset L_2(I_1, R^m)$, где, в частности, либо

$$U(\tau) = \{u(\cdot) \in L_2(I_1, R^m)/\alpha(\tau) \le u(\tau) \le \beta(\tau), \ \text{ п.в. } \ \tau \in I_1\},$$

либо

$$U(\tau) = \{u(\cdot) \in L_2(I_1, R^m)/\|u\|^2 \le R^2\}.$$

Решения задач 3, 4 могут быть получены из решения оптимизационной задачи: минимизировать функционал

$$J_1(u,v) = \int\limits_{t_0}^{t_1} |f(t) - \int\limits_a^b K(t,\tau)u(\tau)d\tau|^2 dt + \|u-v\|^2_{L_2} \to \inf \tag{13}$$

при условии

$$u(\cdot) \in L_2(I_1, R^m), \ \ v(\tau) \in U(\tau) \subset L_2(I_1, R^m), \ \ \tau \in I_1, \ \ f(t) \in L_2(I, R^n). \tag{14}$$

Теорема 3 *Пусть ядро оператора $K(t,\tau)$ измеримо и принадлежит L_2. В прямоугольнике $S_1 = \{(t,\tau) \in R^2/t \in I, \ \ \tau \in I_1\}$. Тогда:*

1) функционал (13) *при условии* (14) *непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*

$$J_1'(u,v) = (J_{1u}'(u,v), J_{1v}'(u,v)) \in L_2(I_1, R^m) \times L_2(I_1, R^m)$$

в любой точке $(u,v) \in L_2(I_1, R^m) \times L_2(I_1, R^m)$ определяется по формуле

$$\begin{gathered} J_{1u}'(u,v) = -2\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)f(t)dt + 2\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b K^*(t,\tau)K(t,\sigma)u(\sigma)d\sigma dt + \\ +2(u-v) \in L_2(I_1, R^m), \quad J_{1v}'(u,v) = -2(u-v) \in L_2(I_1, R^m); \end{gathered} \tag{15}$$

2) градиент функционала $J_1'(u,v)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|J_1'(u+h, v+h_1) - J_1'(u,v)\| \le l_2(\|h\| + \|h_1\|),$$

$$\forall (u,v), \ \ (u+h, v+h_1) \in L_2(I_1, R^m) \times L_2(I_1, R^m);$$

3) функционал (13) *при условии* (14) *является выпуклым.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 4 *Пусть для оптимизационной задачи* (13), (14) *построены последовательности (см.* (15)*)*

$$u_{n+1} = u_n - \alpha_n J_{1u}'(u_n, v_n), \ \ v_{n+1} = P_U[v_n - \alpha_n J_1'(u_n, v_n)], \ \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\varepsilon_0 \le \alpha \le \frac{2}{l_2 + 2\varepsilon_1}, \ \ \varepsilon_0 > 0, \ \ \varepsilon_1 > 0, \ \ n = 0, 1, 2, \dots .$$

Тогда числовая последовательность $\{J_1(u_{n1}, v_n)\}$ *монотонно убывает, предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u_{n+1}\| = 0, \ \lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v_{n+1}\| = 0.$

Если, кроме того, множество $M(u_0, v_0) = \{(u, v) \in L_2 \times U / J_1(u, v) \le J(u_0, v_0)\}$ *ограничено, то:*

1) последовательность $\{u_n, v_n\} \subset M(u_0, v_0)$ *является минимизирующей, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} J_1(u_n, v_n) = J_* = \inf J(u, v), \ \ (u, v) \in L_2 \times U;$$

2) $u_n \overset{сл}{\to} u_*, \ v_n \overset{сл}{\to} v_*$ *при* $n \to \infty$, $(u_*, v_*) \in U_* = \{(u_*, v_*) \in L_2 \times U / J_1(u_*, v_*) = \min J_1(u, v) = J_* = \inf J_1(u, v), \ \ (u, v) \in L_2 \times U\};$

3) для того, чтобы интегральное уравнение (2) *при условии* $u(\tau) \in U$ *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы значение* $J_1(u_*, v_*) = 0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

4 Приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$Ku = \int_a^b K(t, \tau) u(\tau) d\tau = f(t), \ \ t \in I = [t_0, t_1] \tag{16}$$

Пусть в L_2 дана полная система, в частности, $1, t, t^2, \dots$, а соответствующая полная ортонормированная система $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $t \in I = [t_0, t_1]$. Так как выполнено условие теоремы Фубини о перемене порядка интегрирования, то (см. (16))

$$\int_{t0}^{t_1} \left(\int_a^b K_{ij}(t, \tau) u_j(\tau) d\tau \right) \varphi_k(t) dt = \int_a^b \left(\int_{t0}^{t_1} K_{ij}(t, \tau) \varphi_k(t) dt \right) u_j(\tau) d\tau =$$

$$= \int_a^b L_{ij}^{(k)}(\tau) u_j(\tau) d\tau, \ \ i = \overline{1, n}, \ \ j = \overline{1, m}, \ k = 1, 2, \dots,$$

$$\int_{t0}^{t_1} f_i(t) \varphi_k(t) dt = a_{ik}, \ \ i = \overline{1, n}, \ k = 1, 2, \dots,$$

где $K(t, \tau) = \|K_{ij}(t, \tau)\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$, $t \in I$, $\tau \in I_1$, через $L_{ij}^{(k)}(\tau)$ обозначено $\int_{t_0}^{t_1} K_{ij}(t, \tau) \varphi_k(t) dt$.

Тогда

$$\int\limits_{t0}^{t_1}\left(\int\limits_a^b K(t,\tau)u(\tau)d\tau\right)\varphi_k(t)dt =$$

$$= \begin{pmatrix} \int\limits_a^b \left(\int\limits_{t0}^{t_1} K_{11}(t,\tau)\varphi_k(t)dt\right)u_1(\tau)d\tau + \ldots + \int\limits_a^b \left(\int\limits_{t0}^{t_1} K_{1m}(t,\tau)\varphi_k(t)dt\right)u_m(\tau)d\tau \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \int\limits_a^b \left(\int\limits_{t0}^{t_1} K_{n1}(t,\tau)\varphi_k(t)dt\right)u_1(\tau)d\tau + \ldots + \int\limits_a^b \left(\int\limits_{t0}^{t_1} K_{nm}(t,\tau)\varphi_k(t)dt\right)u_m(\tau)d\tau \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \int\limits_a^b L_{11}^{(k)}(\tau)u_1(\tau)d\tau + \ldots + \int\limits_a^b L_{1m}^{(k)}(\tau)u_m(\tau)d\tau \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \int\limits_a^b L_{n1}^{(k)}(\tau)u_1(\tau)d\tau + \ldots + \int\limits_a^b L_{nm}^{(k)}(\tau)u_m(\tau)d\tau \end{pmatrix} =$$

$$= \int\limits_a^b L^{(k)}(\tau)u(\tau)d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\overline{a}^{(k)} = \int\limits_{t0}^{t_1} f(t)\varphi_k(t)dt = \begin{pmatrix} \int\limits_{t0}^{t_1} f_1(t)\varphi_k(t)dt \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \int\limits_{t0}^{t_1} f_n(t)\varphi_k(t)dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a}_1^{(k)} \\ \vdots \\ \overline{a}_n^{(k)} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Теперь для каждого индекса k имеем

$$\int\limits_a^b L^{(k)}(\tau)u(\tau)d\tau = \overline{a}^{(k)} \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

где $L^{(k)}(\tau)$ матрица порядка $n \times m$, $\overline{a}^{(k)} \in R^n$,

$$L^{(k)}(\tau) = \begin{pmatrix} L_1^{(k)}(\tau) \\ \vdots \\ L_n^{(k)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad L_j^{(k)}(\tau) = (L_{j1}^{(k)}(\tau), \ldots, L_{jm}^{(k)}(\tau)), \ k = 1, 2, \ldots.$$

Обозначим через

$$L(\tau) = \begin{pmatrix} L^{(1)}(\tau) \\ L^{(2)}(\tau) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \overline{a} = \begin{pmatrix} \overline{a}^{(1)} \\ \overline{a}^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Тогда соотношения (17) запишутся в виде

$$\int\limits_a^b L(\tau)u(\tau)d\tau = \overline{a}, \tag{18}$$

где $L(\tau)$ – матрица порядка $Nn \times m$, $N = \infty$.

Следует отметить, что если для некоторого $k = k_*$, $L_j^{(k_*)}(\tau) = 0$ и соответствующие $\overline{a}_j^{(k_*)} = 0$, то из системы (18) необходимо исключить соотношения

$$\int_a^b L_j^{(k_*)}(\tau)u(\tau)d\tau = \overline{a}_j^{(k_*)}.$$

Заметим, что если $L_j^{(k_*)}(\tau) = 0$, однако $a_j^{(k_*)} \neq 0$, то интегральное уравнение (16) не имеет решения.

Теорема 5 *Пусть матрица*

$$C_N = \int_a^b L_N(\tau)L_N^*(\tau)d\tau$$

порядка $nN \times nN$ положительно определена. Тогда общее решение интегрального уравнения (**??**) *определяется по формуле*

$$u_N(\tau) = L_N^*(\tau)C_N^{-1}\overline{a}_N + p_N(\tau) - L_N^*(\tau)C_N^{-1}\int_a^b L_N(\eta)p_N(\eta)d\eta, \quad \tau \in I_1, \tag{19}$$

где $p_N(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$ – произвольная функция.

Доказательство теоремы для конечного N можно найти в [18].

5 Заключение

В данной работе предложен новый метод исследования разрешимости и построения решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Получены необходимое и достаточное условия существования решения при заданной правой части, для двух случаев: когда искомая функция принадлежит пространству L_2; искомая функция принадлежит заданному множеству из L_2. Получены условия разрешимости и метод построения приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

По сравнению с традиционными методами построения решения согласно предлагаемому методу можно построить приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Доказаны несколько теорем о разрешимости вышесказанного уравнения. Приведен пример иллюстрирующий данный метод. В дальнейшем планируется продолжить исследования в данном направлении и разработать приложения на основе предложенного метода.

Литература

[1] *Айсагалиев С.А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения.-1991. т. 27, - No.9. - с. 1475-1486.

[2] *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П.* Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением // Сибирский математический журнал, январь- февраль, т. 53, 2011, No. 1, с. 3-21.

[3] *Айсагалиев С.А.* Теория управляемости динамических систем. – Алматы, Қазақ университетi, -2014. – 158 с.

[4] *Aisagaliev S.A.* Controllability and Optimal Control in Nonlinear Systems. Journal of Computer and Systems. – Sciences International, No. 32(5), 1994, p. 73-80.

[5] *Aisagaliev S.A., Кабидолданова А.А.* Оптимальное управление динамических систем. Verlag, Palmarium Academic Publishing (Германия), 2012. – 288 с.

[6] *Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А.* Об оптимальном управлении линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями // Дифференциальные уравнения, 2012, т. 48, No. 6, с. 826-838.

[7] *Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С.* Методы решения краевых задач. – Алматы, Қазақ университетi, 2002. – 348 с.

[8] *Айсагалиев С.А., Калимолдаев М.Н.* Конструктивный метод решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 2015, том 51, № 2, с. 147-160.

[9] *Aisagaliev S.A., Zhunussova Zh.Kh.* To the boundary value problem of ordinary differential equations. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations (EJQTDE), 2015, No. 57, 1-17; doi: 10.14232/ejqtde.2015.1.57 http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

[10] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Том IV, часть первая, М.: 1974. 336 с.

[11] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989, – 624 с.

[12] *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975, 304 с.

[13] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. –М.: Наука, 1986. – 288 с.

[14] *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд-во СО РАН СССР, 1962, – 305 с.

[15] *Иванов В.К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода. – Дифференциальные уравнения, 1967, 3, No. 3, с. 21-32.

[16] *Фридман В.М.* Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода, УМН XI, вып. I, 1956. с. 56-85.

[17] *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы математической физики. ТТ. I, II. ИЛ, 1958. – 536 с.

[18] *Айсагалиев С.А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал, 2005, т. 5, No. 4 (18), с. 17-34.

[19] *Айсагалиев С.А.* Конструктивная теория краевых задач оптимального управления. – Алматы: Қазақ университетi, 2007. – 328 с.

[20] *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П., Севрюгин И.В* К решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода для функции нескольких переменных // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2011, No. 1(68), с. 3-16.

[21] *Айсагалиев С.А.* Лекции по оптимальному управлению. – Алматы: Қазақ университетi, 2007. – 278 с.

[22] *Айсагалиев С.А., Севрюгин И.В* Управляемость и быстродействие процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2014, No. 2(81), с. 20-37.

References

[1] *S.A. Aisagaliev.* Controllability of a differential equation system. Differential Equations, Vol 27, No. 9, 1991, pp. 1037-1045.

[2] *S.A. Aisagaliev, A.P. Belogurov.* Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control. © Aisagaliev S.A. and Belogurov A.P. Siberian Mathematical Journal, Vol. 53, No. 1, 2012, pp. 13-28.

[3] *S.A. Aisagaliev.* Controllability theory of the dynamic systems. – Almaty, Kazakh university, 2014. – 158 p.

[4] *S.A. Aisagaliev.* Controllability and Optimal Control in Nonlinear Systems. Journal of Computer and Systems. – Sciences International, No. 32(5), 1994, p. 73-80.

[5] *S.A. Aisagaliev, A.A. Kabidoldanova.* Optimal control by dynamic systems. Palmarium Academic Publishing (Verlag, Germany) – 2012. - P. 288.

[6] *S.A. Aisagaliev, A.A. Kabidoldanova.* On the Optimal Control of Linear Systems with Linear Performance Criterion and Constraints. Differential Equations. 2012, Vol. 48, No. 6, pp. 832-844.

[7] *S.A. Aisagaliev, T.S. Aisagaliev.* Methods for solving the boundary value problems. – Almaty, Kazakh university, 2002. – 348 p.

[8] *S.A. Aisagaliev, M.N. Kalimoldaev.* Constructive method for solving a boundary value problem for ordinary differential equations. MAIK NAUKA/INTERPERIODICA/SPRINGER, 233 SPRING ST, NEW YORK, NY 10013-1578 USA. Differential Equations. Volume: 51. Issue: 2. Pages: 149-162. Published: FEB 2015. DOI: 10.1134/S0012266115020019)

[9] *S.A. Aisagaliev, Zh.Kh. Zhunussova.* To the boundary value problem of ordinary differential equations. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations (EJQTDE), 2015, No. 57, 1-17; doi: 10.14232/ejqtde.2015.1.57 http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

[10] *V.I. Smirnov.* Course of higher mathematics. - M.: Science, 1974, - v. 4, - P. 336.

[11] *A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin.* Elements of the function theory and functional analysis. – M.: Science, 1989, – 624 p.

[12] *M.L. Krasnov.* Integral equations. M.: Science, 1975, 304 p.

[13] *A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin.* Methods for solving of the ill-posed problems. –M.: Science, 1986. – 288 p.

[14] *M.M. Lavrentev.* About some ill-posed problems of mathematical physics. RAS, 1962, – 305 p.

[15] *V.K. Ivanov.* On Fredholm integral equations of the first kind. – Differential equations, 1967, 3, No. 3, p. 21-32.

[16] *V.M. Fridman.* Method of successive approximatioms for Fredholm integral equations of the first kind, UMN XI, Vol. I, 1956, pp. 56-85.

[17] *F.M. Mors, G. Feshbah.* Methods of mathematical physics. Vol. I, II. 1958. – 536 p.

[18] *S.A. Aisagaliev.* General solution of a class integral equations // Mathematical journal. Institute of Mathematics MES RK. - 2005. - Vol. 5, No. 4. - P. 7-13.

[19] *S.A. Aisagaliev.* Constructive theory of the optimal control boundary value problems. – Almaty: Kazakh university, 2007. – 328 p.

[20] *S.A. Aisagaliev, A.P. Belogurov, I.V. Sevrugin.* To solution of Fredholm integral equations of the first kind for function with several variables // Bulletin KazNU, – 2011, No. 1(68), pp. 3-16.

[21] *S.A. Aisagaliev.* Lectures on optimal control. – Almaty: Kazakh university, 2007. – 278 p.

[22] *S.A. Aisagaliev, I.V. Sevrugin.* Controllability and high-speed performance of processes described by ordinary differential equations // Bulletin KazNU, – 2014, No. 2(81), pp. 20-37.