УДК 517.946

Дильман Т.Б.

Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата, Республика Казахстан, г. Кызылорда
E-mail: DilmanTB@mail.ru

Единственность решения одной задачи интегральной геометрии в многомерном пространстве

В данной статье рассматривается следующий класс задач интегральной геометрии: о восстановлении функции, заданной интегралами по некоторому семейству кривых. Эти задачи связаны с многочисленными приложениями. В целях изучения внутреннего строения земных недр на поверхности Земли производится серия взрывов. Для каждого взрыва на системе приборов измеряются режимы колебаний земной поверхности. Цель исследования – по показаниям приборов определить внутри Земли распределение физических параметров, связанных с законами распространения сейсмических волн. Наиболее четкий функционал в показаниях приборов – время прихода сейсмической волны, именно он служит основой в практике интерпретации. Известно, что линеаризованная задача интерпретации данных сейсморазведки есть задача интегральной геометрии. К интегральной геометрии сводятся задачи, связанные с просвечиванием, в частности, задачи интерпретации рентгеновских снимков. Потемнение рентгеновской пленки функционально связано с интегралом поглощения вдоль рентгеновского луча от источника до точки на пленке. Таким образом, задача определения пространственного коэффициента поглощения есть задача интегральной геометрии -требуется определить функцию, если заданы интегралы от этой функции по семейству лучей. В работе исследуется задача интегральной геометрии для семейства пространственных кривых. Доказывается теорема единственности решения рассматриваемой задачи интегральной геометрии.
Ключевые слова: интегральная геометрия, семейство кривых, интегральное уравнение, решение, единственность.

Dilman T.B.

Uniqueness theorem of solution the integral geometry problem for family curves in multidimensional space

In this article the following class of integral geometry problems is considered: about the function reconstruction, shared by the integrals on some set of curves. These problems are correlated with several applications. In order to study internal earth structure multiple explosions are held on Earth surface. Then, fluctuations regimes of earth surface are measured on equipment for each explosion. The purpose of research is to determine distribution of physical parameters inside the Earth according to equipment measurements correlated with laws on dissemination of seismic waves. The most clear functional of such equipment is arrival time of seismic wave, which exactly serves as a base for interpretation practice. It is known that linearized problem of seismic-exploration data interpretation is actually the problem of integral geometry. Integral geometry also includes problems related to radiography, particularly interpretation problem of X-ray images. For instance, an X-ray film darkening is functionally correlated with absorption coefficient is also actually an integral geometry problem. In this case, it is required to determine the function if the integrals of this function on set of rays were set. An integral geometry problem in multidimensional space is studied in this work. The theorem of solution uniqueness is proven for the considered integral geometry problem.
Key words: integral geometry, family of curves, integral equation, solution, uniqueness.

Ділман Т.Б.

Көп өлшемді кеңістіктегі бір интегралдық геометрия есебі туралы

Бұл мақалада интегралдық геометрия есептерінің келесі класы қарастырылады: белгілі бір қисықтар үйірі бойынша алынған интегралдар арқылы интеграл астындағы функция ізделінеді. Бұл есептер қолданыстағы көптеген есептермен тығыз байланысты. Сейсмикалық барлаудың нәтижелерін түсіндіру мәселесінде Жердің ішкі құрылымын зерттеу үшін оның бетінде жарылыстар жасалынады. Әрбір жарылыс кезінде арнаулы құралдармен Жер қыртысында пайда болған тербелістер өлшенеді. Зерттеу мақсаты – құралдар көрсеткіштері бойынша сейсмикалық толқындардың таралу заңдылықтарымен байланысты физикалық параметрлерді анықтау. Құрал көрсеткіштерінің негізгі функционалы ретінде сейсмикалық толқындардың келу уақыттары алынады. Сейсмикалық барлаудың нәтижелерін түсіндірудің сызықтандырылған есебі интегралдық геометрия есебі екені белгілі. Рентгендік түсірілімдерді түсіндіріп беру мәселесі қарастырылған интегралдық геометрия есептеріне келтіреді. Пленкадағы қоюлану рентгендік сәуленің қайнар көзінен пленкадағы нүктеге дейінгі алынған жұтылу интегралымен функционалды байланыста болады. Сонымен кеңістіктегі жұтылу коэффициентін анықтау мәселесі келесі интегралдық геометрия есебіне келтіріледі: сәулелер үйірі бойынша алынған интегралдар арқылы интеграл астындағы функцияны табу керек. Мақалада көп өлшемді кеңістіктегі қисықтар үйірі үшін интегралдық геометрия есебі зерттеліп, шешімнің жалғыздығы туралы теорема дәлелденеді.

Түйін сөздер: интегралдық геометрия, қисықтар үйірі, интегралдық теңдеу, шешім, жалғыздық.

1 Введение

Обратными задачами для дифференциальных уравнений, как известно, принято называть задачи определения дифференциальных уравнений по известной информации о решениях этих уравнений [1,2]. Многие прикладные вопросы, касающиеся исследования кинематических задач сейсмики, теории потенциала, уравнения Штурма-Лиувилля и других процессов, привели к обратным задачам.

Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений часто некорректны в классическом смысле Адамара. Поэтому актуальность приобретают вопросы единственности и поиск минимальной информации, которая делает обратную задачу определенной. Требуется установить условную корректность в смысле Тихонова некорректно поставленных задач.

Обратные задачи приводят к операторным уравнениям 1-рода. Например, некоторые обратные задачи для гиперболических уравнений могут быть редуцированы к исследованию интегральных уравнений типа Вольтерра 1-рода. Это позволяет для одномерных обратных задач получить интегральное уравнение Вольтерра 2-рода с оператором, обладающими достаточно хорошими свойствами. В многомерных обратных задачах информации о решениях уравнений задается лишь на части границы рассматриваемой области и поэтому такую обратную задачу невозможно свести к интегральному уравнению 2-рода. Как известно, причиной является некорректность многих обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Многие обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики тесно связаны с задачами интегральной геометрии. Возникает необходимость исследования новых задач интегральной геометрии, когда интегрирование искомой функции (или нескольких функций) производится по семейству сложных многообразий.

Рассмотрим следующую задачу интегральной геометрии

$$v(\xi,\eta,\zeta)=\iint\limits_{S(\xi,\eta,\zeta)} u(x,y,z)dS, \tag{1}$$

где $S(\xi,\eta,\zeta)$ – семейство конусов

$$(\zeta-z)^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2 \quad (0\le z\le\zeta)$$

или $z=\zeta-\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ с вершинами в точках (ξ,η,ζ), опирающихся на плоскость $z=0$.

Учитывая, что

$$p=z'_x=\frac{\xi-x}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}},\quad q=z'_y=\frac{\eta-y}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{2}$$

поверхностный интеграл (1) можно свести к повторному интегралу

$$v(\xi,\eta,\zeta)=\iint\limits_{D(\xi,\eta,\zeta)} u(x,y,\zeta-\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2})dxdy.$$

Вводим полярную систему координат $\xi=x+r\cos\varphi$, $\eta=y+r\sin\varphi$, тогда имеем

$$v(\xi,\eta,\zeta)=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\zeta} u(\xi-r\cos\varphi,\eta-r\sin\varphi,\zeta-r)rdrd\varphi.$$

Применяем преобразование Фурье к обеим частям уравнения по переменным ξ, η :

$$\widetilde{v}(\lambda,\mu,\zeta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(\xi,\eta,\zeta)e^{i(\lambda\xi+\mu\eta)}d\xi d\eta=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\zeta} rdrd\varphi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\xi-r\cos\varphi,\eta-r\sin\varphi,\zeta-r)e^{i(\lambda\xi+\mu\eta)}d\xi d\eta.$$

Далее вводя замену переменных $\xi-r\cos\varphi=t$, $\eta-r\sin\varphi=\tau$ последнее уравнение преобразуем к виду

$$\widetilde{v}(\lambda,\mu,\zeta)=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\zeta} re^{ir(\lambda\cos\varphi+\mu\sin\varphi)}\widetilde{u}(\lambda,\mu,\zeta-r)drd\varphi,$$

где $\widetilde{u}(\lambda,\mu,z)$ – преобразование Фурье функции $u(x,y,z)$ по переменным x, y. Меняя порядок интегрирования получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно функции $\widetilde{u}(\lambda,\mu,z)$:

$$\widetilde{v}(\lambda,\mu,\zeta)=\int\limits_0^{\zeta} rK(\lambda,\mu,r)\widetilde{u}(\lambda,\mu,\zeta-r)dr, \tag{2}$$

где

$$K(\lambda,\mu,r)=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} e^{ir(\lambda\cos\varphi+\mu\sin\varphi)}d\varphi.$$

Замена $\zeta-r=\rho$ позволяет получить уравнение

$$\widetilde{v}(\lambda,\mu,\zeta)=\int\limits_0^{\zeta}(\zeta-r)K(\lambda,\mu,\zeta-\rho)\widetilde{u}(\lambda,\mu,\rho)d\rho.$$

Дифференцируя это уравнение по ζ получаем

$$\widetilde{v}'_{\zeta}(\lambda,\mu,\zeta)=\int\limits_0^{\zeta}[K(\lambda,\mu,\zeta-\rho)+(\zeta-r)K'_{\zeta}(\lambda,\mu,\zeta-\rho)]\widetilde{u}(\lambda,\mu,\rho)d\rho.$$

Продифференцировав еще раз по ζ приходим к уравнению

$$\begin{gathered}\widetilde{v}''_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu,\zeta)=K(\lambda,\mu,0)\widetilde{u}(\lambda,\mu,\zeta)+\\ +\int\limits_0^{\zeta}\left[2K'_{\zeta}(\lambda,\mu,\zeta-\rho)+(\zeta-r)K''_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu,\zeta-\rho)\right]\widetilde{u}(\lambda,\mu,\rho)d\rho.\end{gathered} \tag{3}$$

Вычислим интеграл $K(\lambda,\mu,r)=2\sqrt{2}\pi[J_0(\lambda r)+J_0(\mu r)]$ [3, формула (3.715)] где $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Как известно, $J_0(0)=1$, поэтому $K(\lambda,\mu,0)=4\sqrt{2}\pi$. Следовательно, уравнение (3) можно записать в виде интегрального уравнения Вольтерра второго рода [4]

$$\widetilde{v}''_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu,\zeta)=4\sqrt{2}\pi\widetilde{u}(\lambda,\mu,\zeta)+\int\limits_0^{\zeta}\Psi(\lambda,\mu,\zeta-\rho)\widetilde{u}(\lambda,\mu,\rho)d\rho,$$

$$\begin{gathered}\Psi(\lambda,\mu,\zeta-\rho)=4\sqrt{2}\pi[\lambda J'_0(\lambda(\zeta-\rho))+\mu J'_0(\mu(\zeta-\rho))]+\\ +2\sqrt{2}\pi(\zeta-\rho)[\lambda^2J''_0(\lambda(\zeta-\rho))+\mu^2J''_0(\mu(\zeta-\rho))].\end{gathered}$$

Таким образом доказана

Теорема 1 *Если функция $v(\xi,\eta,\zeta)$ имеет финитную непрерывность по переменным ξ, η и дважды дифференцируема по ζ, то решение $u(x,y,z)$ рассматриваемой задачи интегральной геометрии единственно в классе финитных непрерывных функций.*

Рассмотрим более общую задачу интегральной геометрии

$$v(\vec{\xi},\eta) = \int\limits_{S(\vec{\xi},\eta)} u(\vec{x},y)dS, \tag{4}$$

где $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $S(\vec{\xi},\eta)$ – семейство поверхностей

$$|\eta - y| = |\vec{x} - \vec{\xi}| \quad (0 \le y \le \eta) \quad \text{или} \quad y = \eta - \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2}.$$

Учитывая, что

$$p_i = y'_{x_i} = -(x_i - \xi_i)\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2} \quad (i = \overline{1,n}), \quad \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} p_i^2} = \sqrt{2}$$

преобразуем поверхностный интеграл (4) к виду

$$v(\vec{\xi},\eta) = \sqrt{2}\int\limits_{D(\vec{\xi},\eta)} u(\vec{x}, \eta - |\vec{x} - \vec{\xi}|)d\vec{x},$$

где $D(\vec{\xi},\eta)$ – проекция поверхности $S(\vec{\xi},\eta)$ на гиперплоскость $y = 0$.

Вводим замену переменных $x_i = \xi_i - r\cos\varphi_i$ $(i = \overline{1,n})$, где $\cos\varphi_i$ $(i = \overline{1,n})$ – направляющие косинусы нормального вектора $\vec{\psi}$ к заданной поверхности семейства $S(\vec{\xi},\eta)$; $r = |\vec{\psi}|$. Учитывая соотношение

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^2\varphi_i = 1$$

получим $x_i = \xi_i - r\cos\varphi_i$ $(i = \overline{1,n-1})$, $x_n = \xi_n - r\sqrt{1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1}\cos^2\varphi_i}$.

Якобиан такого преобразования (приложения 1) $R(r,\vec{\varphi}) = r^{n-1}S(\vec{\varphi})$, где

$$\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \quad S(\vec{\varphi}) = \prod_{i=1}^{n-1}\sin\varphi_i\Big/\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1}\cos^2\varphi_i}.$$

Тогда

$$v(\vec{\xi},\eta) = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\eta} u(\vec{\xi} - r\vec{\psi}, \eta - r)R(r,\vec{\varphi})drd\vec{\varphi}.$$

К обеим частям уравнения применяем преобразование Фурье по вектору $\vec{\xi}$:

$$\widetilde{v}(\vec{\lambda},\eta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\vec{\lambda},\vec{\xi})}d\vec{\xi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\eta}\sqrt{2}u(\vec{\xi}-r\vec{\psi},\eta-r)R(r,\vec{\varphi})drd\vec{\varphi}.$$

Теперь изменяем порядок интегрирования

$$\widetilde{v}(\vec{\lambda},\eta)=\sqrt{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\eta}R(r,\vec{\varphi})drd\vec{\varphi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(\vec{\xi}-r\vec{\psi},\eta-r)e^{i(\vec{\lambda},\vec{\xi})}d\vec{\xi}.$$

С помощью замены $\vec{\xi}-r\vec{\psi}=\vec{t}$ ($\vec{t}=(t_1,t_2,\dots,t_n)$) имеем

$$\widetilde{v}(\vec{\lambda},\eta)=\sqrt{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\eta}R(r,\vec{\varphi})e^{i(\vec{\lambda},r\vec{\psi})}drd\vec{\varphi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(\vec{t},\eta-r)e^{i(\vec{\lambda},\vec{t})}d\vec{t},$$

отсюда

$$\widetilde{v}(\vec{\lambda},\eta)=\int\limits_{0}^{\eta}r^{n-1}\left(\sqrt{2}\int\limits_{0}^{2\pi}S(\vec{\varphi})e^{ir(\vec{\lambda},\vec{\psi})}d\vec{\varphi}\right)\widetilde{u}(\vec{\lambda},\eta-r)dr,$$

где $\widetilde{u}$ – преобразование Фурье функции u по вектору $\vec{\xi}$.

Замена переменной $\eta-r=\rho$ позволяет написать последнее уравнение в виде

$$\widetilde{v}(\vec{\lambda},\eta)=\int\limits_{0}^{\eta}(\eta-\rho)^{n-1}T(\vec{\lambda},\eta-\rho)\widetilde{u}(\vec{\lambda},\rho)d\rho,$$

или

$$\widetilde{v}(\vec{\lambda},\eta)=\int\limits_{0}^{\eta}K(\vec{\lambda},\eta-\rho)\widetilde{u}(\vec{\lambda},\rho)d\rho, \qquad (5)$$

где

$$K(\vec{\lambda},\eta-\rho)=(\eta-\rho)^{n-1}T(\vec{\lambda},\eta-\rho),\quad T(\vec{\lambda},\eta-\rho)=\sqrt{2}\int\limits_{0}^{2\pi}S(\vec{\varphi})e^{i(\eta-\rho)(\vec{\lambda},\vec{\psi})}d\vec{\varphi}.$$

Дифференцируем по η семейство интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\widetilde{v}'_{\eta}(\vec{\lambda},\eta)=K(\vec{\lambda},0)\widetilde{u}(\vec{\lambda},\eta)+\int\limits_{0}^{\eta}K_{\eta}^{(1)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)\widetilde{u}(\vec{\lambda},\rho)d\rho.$$

Учитывая, что $K(\vec{\lambda},0)=0$, продифференцируем последнее уравнение еще раз по η

$$\widetilde{v}''_{\eta\eta}(\vec{\lambda},\eta) = K_\eta^{(1)}(\vec{\lambda},0)\widetilde{u}(\vec{\lambda},\rho) + \int\limits_0^\eta K_\eta^{(2)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)\widetilde{u}(\vec{\lambda},\rho)d\rho.$$

Из формул

$$K_\eta^{(j)}(\vec{\lambda},\eta-\rho) = \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!}(\eta-\rho)^{n-j-1}T(\vec{\lambda},\eta-\rho) +$$
$$+C_j^1\frac{(n-1)!}{(n-j)!}(\eta-\rho)^{n-j}T_\eta^{(1)}(\vec{\lambda},\eta-\rho) +$$
$$+C_j^2\frac{(n-1)!}{(n-j+1)!}(\eta-\rho)^{n-j+1}T_\eta^{(2)}(\vec{\lambda},\eta-\rho) + \ldots +$$
$$+C_j^{j-1}(n-1)(\eta-\rho)^{n-2}T_\eta^{(j-1)}(\vec{\lambda},\eta-\rho) + (\eta-\rho)^{n-1}T_\eta^{(j)}(\vec{\lambda},\eta-\rho),$$

где C_j^2 – количество сочетаний,

$$T_\eta^{(j)}(\vec{\lambda},\eta-\rho) = i^j\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} S(\vec{\varphi})e^{i(\eta-\rho)(\vec{\lambda},\vec{\psi})}(\vec{\lambda},\vec{\psi})^j d\vec{\varphi},$$

следует, что

$$K_\eta^{(1)}(\vec{\lambda},0) = K_\eta^{(2)}(\vec{\lambda},0) = \ldots = K_\eta^{(n-2)}(\vec{\lambda},0) = 0.$$

Из формулы

$$K_\eta^{(n-1)}(\vec{\lambda},\eta-\rho) = (n-1)!T(\vec{\lambda},\eta-\rho) +$$
$$+C_{n-1}^1(n-1)!(\eta-\rho)T_\eta^{(1)}(\vec{\lambda},\eta-\rho) + \ldots + (\eta-\rho)^{n-1}T_\eta^{(n-1)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)$$

получим

$$K_\eta^{(n-1)}(\vec{\lambda},0) = (n-1)!T(\vec{\lambda},0) = (n-1)!\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} S(\vec{\varphi})d\vec{\varphi} \neq 0,$$

так как можно доказать неравенство (приложение 2)

$$\int\limits_0^{2\pi} S(\vec{\varphi})d\vec{\varphi} \geq (2\pi)^{n-1}.$$

Таким образом, дифференцируя интегральное уравнение (5) всего n раз по η получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\widetilde{v}_\eta^{(n)}(\vec{\lambda},\eta) = K_\eta^{(n-1)}(\vec{\lambda},0)\widetilde{u}(\vec{\lambda},\rho) + \int\limits_0^\eta K_\eta^{(n)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)\widetilde{u}(\vec{\lambda},\rho)d\rho,$$

или

$$\frac{\widetilde{v}_\eta^{(n)}(\vec{\lambda},\eta)}{K_\eta^{(n-1)}(\vec{\lambda},0)}=\widetilde{u}(\vec{\lambda},\rho)+\int\limits_0^\eta\frac{K_\eta^{(n)}(\vec{\lambda},\eta-\rho)}{K_\eta^{(n-1)}(\vec{\lambda},0)}\widetilde{u}(\vec{\lambda},\rho)d\rho.$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2 *Если $v(\vec{\xi},\eta)$ имеет финитную непрерывность по вектору $\vec{\xi}$ и n раз дифференцируема по η, то решение $u(\vec{x},y)$ задачи (4) единственно в классе финитных непрерывных функций.*

Приложение 1.

Якобиан

$$R(r,\vec{\varphi})=\begin{vmatrix} x'_{1_r} & x'_{1_{\varphi_1}} & x'_{1_{\varphi_2}} & \dots & x'_{1_{\varphi n-1}}\\ x'_{2_r} & x'_{2_{\varphi_1}} & x'_{2_{\varphi_2}} & \dots & x'_{2_{\varphi n-1}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x'_{n-1_r} & x'_{n-1_{\varphi_1}} & x'_{n-1_{\varphi_2}} & \dots & x'_{n-1_{\varphi n-1}}\\ x'_{n_r} & x'_{n_{\varphi_1}} & x'_{n_{\varphi_2}} & \dots & x'_{n_{\varphi n-1}} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & -r\sin\varphi_1 & 0 & \dots & 0\\ \cos\varphi_2 & 0 & -r\sin\varphi_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \cos\varphi_{n-1} & 0 & 0 & \dots & -r\sin\varphi_{n-1}\\ \cos\varphi_n & \dfrac{r\cos\varphi_1\sin\varphi_1}{\cos\varphi_n} & \dfrac{r\cos\varphi_2\sin\varphi_2}{\cos\varphi_n} & \dots & \dfrac{r\cos\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{\cos\varphi_n} \end{vmatrix}=$$

$$=\cos\varphi_1\begin{vmatrix} 0 & -r\sin\varphi_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & -r\sin\varphi_{n-1}\\ \dfrac{r\cos\varphi_1\sin\varphi_1}{\cos\varphi_n} & \dfrac{r\cos\varphi_2\sin\varphi_2}{\cos\varphi_n} & \dots & \dfrac{r\cos\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{\cos\varphi_n} \end{vmatrix}-$$

$$-\cos\varphi_2\begin{vmatrix} -r\sin\varphi_1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & -r\sin\varphi_{n-1}\\ \dfrac{r\cos\varphi_1\sin\varphi_1}{\cos\varphi_n} & \dfrac{r\cos\varphi_2\sin\varphi_2}{\cos\varphi_n} & \dots & \dfrac{r\cos\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{\cos\varphi_n} \end{vmatrix}+\dots+$$

$$+(-1)^{n-2}\cos\varphi_{n-1}\begin{vmatrix} -r\sin\varphi_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -r\sin\varphi_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{r\cos\varphi_1\sin\varphi_1}{\cos\varphi_n} & \dfrac{r\cos\varphi_2\sin\varphi_2}{\cos\varphi_n} & \dots & \dfrac{r\cos\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{\cos\varphi_n} \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{n-1}\cos\varphi_n\begin{vmatrix} -r\sin\varphi_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -r\sin\varphi_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & -r\sin\varphi_{n-1} \end{vmatrix}=$$

$$= (-1)^{n-2}\frac{r\cos^2\varphi_1\sin\varphi_1}{\cos\varphi_n}\begin{vmatrix} -r\sin\varphi_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r\sin\varphi_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -r\sin\varphi_{n-1} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{n-2}\frac{r\cos^2\varphi_2\sin\varphi_2}{\cos\varphi_n}\begin{vmatrix} -r\sin\varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r\sin\varphi_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -r\sin\varphi_{n-1} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+(-1)^{n-2}\frac{r\cos^2\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{\cos\varphi_n}\begin{vmatrix} -r\sin\varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r\sin\varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -r\sin\varphi_{n-2} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{n-1}\cos\varphi_n\begin{vmatrix} -r\sin\varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r\sin\varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -r\sin\varphi_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{r^{n-1}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-1}}{\cos\varphi_n}[\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \dots + \cos^2\varphi_{n-1}] +$$

$$+r^{n-1}\cos\varphi_n\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-1} =$$

$$= \frac{r^{n-1}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-1}}{\cos\varphi_n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\varphi_k = \frac{r^{n-1}}{\cos\varphi_n}\prod_{i=1}^{n-1}\sin\varphi_i.$$

Приложение 2.

При $n = 2$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi_1}{\sqrt{1-\cos^2\varphi_1}}d\varphi_1 = 2\pi.$$

При $n = 3$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\sqrt{1-\cos^2\varphi_1-\cos^2\varphi_2}}d\varphi_1 d\varphi_2 \geq$$

$$\geq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\sqrt{1-\cos^2\varphi_1-\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2}}d\varphi_1 d\varphi_2 =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\sqrt{(1-\cos^2\varphi_1)(1-\cos^2\varphi_2)}}d\varphi_1 d\varphi_2 = (2\pi)^2.$$

При $n = 4$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3}{\sqrt{1-\cos^2\varphi_1-\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_3}}d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 \geq$$

$$\geq \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3 d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3}{\sqrt{1-\cos^2\varphi_1-\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_3+\cos^2\varphi_1(\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3)+I}} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3}{\sqrt{(1-\cos^2\varphi_1)(1-\cos^2\varphi_2)(1-\cos^2\varphi_3)}}d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 = (2\pi)^3,$$

так как

$$\cos^2\varphi_1(\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3)+I\geq 0,$$

где

$$I=\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2\cos^2\varphi_3.$$

По методу математической индукции полагаем при $n=k$

$$\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{k-2}\sin\varphi_{k-1}}{\sqrt{1-\cos^2\varphi_1-\ldots-\cos^2\varphi_{k-2}-\cos^2\varphi_{k-1}}}d\varphi_1\dots d\varphi_{k-2}d\varphi_{k-1}\geq (2\pi)^{k-1}.$$

Докажем при $n=k+1$

$$\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{k-1}\sin\varphi_k d\varphi_1\dots d\varphi_{k-1}d\varphi_k}{\sqrt{1-\cos^2\varphi_1-\ldots-\cos^2\varphi_{k-1}-\cos^2\varphi_k}}\geq$$

$$\geq\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{k-1}\sin\varphi_k d\varphi_1\dots d\varphi_{k-1}d\varphi_k}{\sqrt{1-\cos^2\varphi_1-\ldots-\cos^2\varphi_{k-1}-\cos^2\varphi_k+U}}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{k-1}\sin\varphi_k d\varphi_1\dots d\varphi_{k-1}d\varphi_k}{\sqrt{1-\cos^2\varphi_1-\ldots-\cos^2\varphi_{k-1}-\cos^2\varphi_k+U\cos^2\varphi_k}}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{k-1}\sin\varphi_k d\varphi_1\dots d\varphi_{k-1}d\varphi_k}{\sqrt{1-\cos^2\varphi_1-\ldots-\cos^2\varphi_{k-1}-\cos^2\varphi_k(1-U)}}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{k-1}\sin\varphi_k d\varphi_1\dots d\varphi_{k-1}d\varphi_k}{\sqrt{(1-\cos^2\varphi_1-\ldots-\cos^2\varphi_{k-1})(1-\cos^2\varphi_k)}}\geq$$

$$\geq (2\pi)^{k-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_k = (2\pi)^k,$$

где $u = \cos^2 \varphi_1 + \ldots + \cos^2 \varphi_{k-1}$. Следовательно, для любого натурального $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} S(\vec{\varphi}) d\vec{\varphi} \geq (2\pi)^{n-1}.$$

Литература

[1] *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – Москва: Наука, 1980. – 286 с.

[2] *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2008. – 460 с.

[3] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.

[4] *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. Москва: Наука, 1959. – 232 с.

References

[1] *Lavrentev M.M., Romanov V.G., Shishatskij S.P.* Nekorrektnye zadachi matematicheskoj fiziki I analiza. – Moskva: Nauka, 1980. – 286 s.

[2] *KabanikhinS.I.* Obratnyei nekorrektnye zadachi. – Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatelstvo, 2008. – 460 s.

[3] *Gradshtein I.S., Ryzhik I.M.* Tablitsy integralov, sum, ryadov I proizvedenij. – Moskva: Nauka, 1971. – 1108 s.

[4] *Mikhlin S.G.* Lektsii po lineinym integralnym uravneniyam. – Moskva: Fizmatgiz, 1959. – 232 s.