УДК 517.956

Қытайбеков Е.

Казахский национальный педагогический университет имени Абая,
Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: Er-kaz_89@mail.ru

Задача Дирихле для трехмерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка

Краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены,где исследованы задача Трикоми и первая краевая задача. Смешанная задача, характеристическая задача Коши и задача Дарбу для многомерных гиперболо-параболических уравнений ранее рассмотрены. Проблема задачи Трикоми для гиперболо-параболических уравнений в многомерных областях ставилась и исследовалась разными авторами. Теория краевых задач для вырождающихся гиперболо - параболических уравнений на плоскости также хорошо изучены. Многомерные аналоги этих задач в обобщенных пространствах исследованы. Корректности задач Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений доказаны. В данной работе в цилиндрической области для трехмерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка цилиндрической области показана разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле.
Ключевые слова: задача Дирихле, вырождение типа и порядка, разрешимость, плотность.

Kitaybekov E.T.

Dirichlet problem for three-dimensional hyperbolic-parabolic equations with type and order extinction

Boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations in the plane have been studied properly, where Tricomi problem and the first boundary value problem were investigated. The mixed problem, Cauchy characteristic problem and Darboux problem for multidimensional hyperbolic-parabolic equations have been considered before. Different authors have defined and investigated Tricomi problem for hyperbolic-parabolic equations in multidimensional domains. The theory of boundary value problems for degenerating hyperbolic-parabolic equations in the plane has also been studied properly. Besides, multidimensional analogues of these problems in generalized spaces have been investigated. Correctness of Dirichlet problems for degenerating multidimensional hyperbolic equations has been proved. In this work the author showed solvability and obtained an explicit classical solution of Dirichlet problem in a cylindrical domain for three-dimensional hyperbolic-parabolic equations with type and order extinction.
Key words:Dirichlet problem, degeneration of the type and order, solvability, density.

Қытайбеков Е.

Түрі мен реті азғындалған үш өлшемді гиперболо-параболалық теңдеулерге Дирихле есебі

Гиперболо-параболалық теңдеулер үшін шеттік есептер жазақтықтарда жақсы таныс, мұнда Трикоми есебі және бірінші шеттік есеп зерттелген. Сипатамалық Коши есебі және Дарбу есебі үшін көп өлшемді гиперболо-параболалық теңдеулерге аралас есеп бұрын қаралған. Көпөлшемді облыста Трикоми есебінің шешілу мәселесі қойлған. Және де бұл сұрақтар әр түрлі аторлармен зерттелген. Азғындалған гиперболо-параболалық теңдеулерге шеттік есептер теориясы сондай-ақ жазақтықтар үшін жақсы зерттелген. Көпөлшемді аналогтары осы міндеттерді жалпылама кеңістіктерде зерттелді. Азғындалған көпөлшемді гиперболалық теңдеулер үшін Дирихле есебінің қисындылығы дәлелденді. Бұл жұмыста түрі мен реті азғындалған үш өлшемді гиперболо-параболалық теңдеулердің цилиндрлік облыста шешімділігі көсетілген және Дирихле есебінің классикалық шешімің айқын түрі алынған.
Түйін сөздер: Дирихле есебі, түрі мен реті азғындалған, шешімділік, тығыздық.

1 Введение

Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x,t), x = (x_1, ..., x_m), m \geq 2$, то по принципу Гамильтона приходим к многомерным вырождающимся гиперболическим уравнениям.

Математическое моделирование процесса распространения тепла в среде заполненой массой берет свое начало еще с работ Фурье.

Обозначим через $u(x,t)$ температуру в среде в точке x в момент времени t . Тогда в силу закона Фурье задача распространения тепла в среде описываются многомерными вырождающимся параболическими уравнениями.

Теория краевых задач для вырождающихся гиперболо - параболических уравнений на плоскости изучены в [1]. Многомерные аналоги этих задач в обобщенных пространствах исследованы в [2]. Корректности задач Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений доказаны [3, 4].

В данной работе в цилиндрической области для трехмерных гиперболо - параболических уравнений с вырождением типа и порядка показано разрешимость задачи Дирихле.

2 Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}-$ цилиндрическая область евклидова пространства E_3 точек $(x_1,\, x_2,\, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|-$ длина вектора $x = (x_1, x_2)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, $\Gamma_\beta-$ части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; $\sigma_\alpha-$ верхнее, а $\sigma_\beta-$ нижнее основания области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S - общая часть границ областей Ω_α и Ω_β представляющее множество $\{t = 0,\, 0 < |x| < 1\}$ в E_2.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающихся трехмерные гиперболо-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} p_i(t) u_{x_i x_i} - p_3(t) u_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{2} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u, \ t > 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} g_i(t) u_{x_i x_i} - u_t + \sum\limits_{i=1}^{2} d_i(x,t) u_{x_i} + e(x,t) u, \ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $p_i(t) > 0$ при $t > 0$, $p_i(0) = 0, g_i(t) > 0$ при $t < 0$ и могут обращаться в нуль при $t = 0$, $p_i(t) \in C([0,\alpha]) \cap C^2((0,\alpha))$, $g_j(t) \in C([\beta,0])$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$.

В дальнейшем нам понадобиться связь декартовых координат x_1, x_2, t с полярными $r, \theta, t : x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta,\ r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$.

Задача 1(Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), \quad u\Big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r,\theta). \tag{3}$$

при этом $\varphi_1(1,\theta)=\psi_1(\alpha,\theta), \psi_1(0,\theta)=\psi_2(0,\theta), \psi_2(\beta,\theta)=\varphi_2(1,\theta)$.

Пусть $\frac{a_i(r,\theta,t)}{p_3(t)}, \frac{b(r,\theta,t)}{p_3(t)}, \frac{c(r,\theta,t)}{p_3(t)} \in C^1(\bar{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$, $d_i(r,\theta,t)$, $e(r,\theta,t)\in C^1(\bar{\Omega}_\beta)\cap C^2(\Omega_\beta)$.

Тогда справедлива

Теорема 1. Если $\varphi_1(r,\theta)\in C^1(\bar{\sigma}_\alpha)\cap C^3(\sigma_\alpha)$ $\varphi_2(r,\theta)\in C^1(\bar{\sigma}_\beta)\cap C^3(\sigma_\beta)$, $\psi_1(t,\theta)\in C^1(\bar{\Gamma}_\alpha)\cap C^3(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta)\in\in C^1(\bar{\Gamma}_\beta)\cap C^3(\Gamma_\beta)$, и имеет место

$$\cos\mu_{s,n}\alpha'\neq 0,\ s=1,2,\dots, \tag{4}$$

то задача 1 разрешима, где $\mu_{s,n}-$ положительные нули функций Бесселя первого рода $J_n(z)$, $\alpha'=\int\limits_0^\alpha\sqrt{\frac{[p_1(\xi)+p_2(\xi)]}{2p_3(\xi)}}d\xi$, $n=0,1,\dots$.

3 Доказательство теоремы

Сначала покажем разрешимость задачи (1), (3). Ее решение будем искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t)=u_{10}(r,t)+\sum_{n=1}^{\infty}(u_{1n}(r,t)\cos n\theta+u_{2n}(r,t)\sin n\theta), \tag{5}$$

где $u_{10}(r,t)$, $u_{1n}(r,t)$, $u_{2n}(r,t)-$ функции, которые будут определены ниже.

Подставляя (5) в (1), в области Ω_β, полярных координатах будем иметь

$$\begin{gathered}
L_1u\equiv g_1(t)\left(\cos^2\theta u_{10rr}+\frac{\sin^2\theta}{r}u_{10r}\right)+g_2(t)\left(\sin^2\theta u_{10rr}+\frac{\cos^2\theta}{r}u_{10r}\right)-u_{10t}+\\
+d_1(r,\theta,t)\cos\theta u_{10r}+d_2(r,\theta,t)\sin\theta u_{10r}+e(r,\theta,t)u_{10}+\\
+\sum_{i=1}^{2}\left\{g_1(t)\left[\cos^2\theta(\cos n\theta u_{1nrr}+\sin n\theta u_{2nrr})+\frac{\sin^2\theta}{r}(\cos n\theta u_{1nr}+\sin n\theta u_{2nr})+\right.\right.\\
+\frac{n\sin 2\theta}{r}(\sin n\theta u_{1nr}-\cos n\theta u_{2nr})+\frac{n\sin 2\theta}{2r^2}(\cos n\theta u_{2n}-\sin n\theta u_{1n})-\\
\left.-\frac{n^2\sin^2\theta}{r^2}(\cos n\theta u_{1n}+\sin n\theta u_{2n})\right]+g_2(t)\left[\sin^2\theta(\cos n\theta u_{1nrr}+\sin n\theta u_{2nrr})+\right.\\
+\frac{n\sin 2\theta}{r}(\cos n\theta u_{2nr}-\sin n\theta u_{1nr})+\frac{\cos^2\theta}{r}(\cos n\theta u_{1nr}-\sin n\theta u_{2nr})+\\
\left.+\frac{n\sin 2\theta}{2r^2}(\sin n\theta u_{1n}-\cos n\theta u_{2n})-\frac{n^2}{r^2}\cos^2\theta(\cos n\theta u_{1n}+\sin n\theta u_{2n})\right]-u_{1nt}\cos n\theta-\\
-u_{2nt}\sin n\theta+d_1\left[\cos\theta(\cos n\theta u_{1nr}+\sin n\theta u_{2nr})+\frac{n\sin\theta}{r}(\sin n\theta u_{1n}-\cos n\theta u_{2n})\right]+\\
+d_2\left[\sin\theta(\cos n\theta u_{1nr}+\sin n\theta u_{2nr})+\frac{n\cos\theta}{r}(\cos n\theta u_{2n}-\sin n\theta u_{1n})\right]+\\
\left.+e(\cos n\theta u_{1n}+\sin n\theta u_{2n})\right\}=0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Теперь полученное выражение (6) сначала умножим на $\rho(\theta)\neq 0$, а затем проинтегрируем от 0 до 2π. После несложных преобразований получим ряд

$$\begin{gathered}\frac{(g_1+g_2)}{2}\rho_{10}\left(u_{10rr}+\frac{1}{r}u_{10r}\right)-\rho_{10}u_{10t}+\frac{(g_1-g_2)}{2}d_{10}\left(u_{10rr}-\frac{1}{r}u_{10}\right)+\\ +a_{10}(r,t)u_{10r}+c_{10}(r,t)u_{10}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{(g_1+g_2)}{2}\rho_{jn}(u_{jnrr}+\right.\right.\\ +\frac{1}{r}u_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}u_{jn})-\rho_{jn}u_{jnt}+\frac{(g_1-g_2)}{2}d_{jn}\left(u_{jnrr}-\frac{1}{r}u_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right)+\\ \left.\left.+\frac{(g_2-g_1)n}{2}e_{jn}\left(u_{jnr}-\frac{u_{jn}}{2r}\right)+a_{jn}(r,t)u_{jnr}+c_{jn}(r,t)u_{jn}\right]\right\}=0,\end{gathered}\tag{7}$$

где

$$\begin{gathered}\rho_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho(\theta)\cos n\theta d\theta,\ \rho_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho\sin n\theta d\theta,\ d_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\cos n\theta d\theta,\\ d_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\sin n\theta d\theta,\ e_{1n}=-\int_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\sin n\theta d\theta,\ e_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\cos n\theta d\theta,\\ a_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho(d_1\cos\theta+d_2\sin\theta)\cos n\theta d\theta,\ a_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho(d_1\cos\theta+d_2\sin\theta)\sin n\theta d\theta,\\ c_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho\left[(d_1\sin\theta-d_2\cos\theta)\frac{n\sin n\theta}{r}+e\cos n\theta\right]d\theta,\\ c_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho\left[(d_2\cos\theta-d_1\sin\theta)\frac{n\cos n\theta}{r}+e\sin n\theta\right]d\theta,\ n=0,1,\dots.\end{gathered}$$

Далее, рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$g(t)\rho_{10}\left(u_{10rr}+\frac{1}{r}u_{10r}\right)-\rho_{10}u_{10t}=0,\ g(t)=\frac{g_1(t)+g_2(t)}{2},\tag{8}$$

$$g(t)\rho_{j1}\left(u_{j1rr}+\frac{1}{r}u_{j1r}-\frac{u_{j1}}{r^2}\right)-\rho_{10}u_{j1t}=\frac{(g_2-g_1)d_{10}}{2}\left(u_{10rr}-\frac{u_{10r}}{r}\right)-a_{10}u_{10r}-c_{10}u_{10},\tag{9}$$

$$\begin{gathered}g(t)\rho_{jn}\left(u_{jnrr}+\frac{1}{r}u_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right)-\rho_{jn}u_{jnt}=-\frac{(g_1-g_2)d_{jn}}{2}\left(u_{jn-1rr}-\frac{1}{r}u_{jn-1r}-\right.\\ \left.-\frac{(n-1)^2}{r^2}u_{jn-1}\right)-\frac{(g_2-g_1)(n-1)}{r}e_{jn-1}\left(u_{jn-1r}-\frac{u_{jn-1}}{2r}\right)-\\ -a_{jn-1}u_{jn-1r}-c_{jn-1}u_{jn-1},\ j=1,2,\ n=2,3,\dots.\end{gathered}$$

Нетрудно показать, что если $\{u_{10},\, u_{jn}\}$, $j=1,2$, $n=1,2,...$– решение системы (8),(9), то оно является и решением уравнения (7).

Далее, учитывая ортогональность [5] систем тригонометрических функций $\{\frac{1}{2},\ \cos n\theta, \sin n\theta,\ n=1,2,...\}$ на отрезке $[0,2\pi]$ из краевого условия (3) в силу (5) будем иметь

$$u_{10}(r,\beta)=\varphi_{210}(r),\ u_{10}(1,t)=\psi_{210}(t),\tag{10}$$

$$u_{jn}(r,\beta)=\varphi_{2jn}(r),\ u_{jn}(1,t)=\psi_{2jn}(t),\ j=1,2,\ n=1,2,\dots,\tag{11}$$

$$\varphi_{210}(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_2(r,\theta)d\theta,\ \varphi_{210}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi_2(t,\theta)d\theta,$$

$$\varphi_{21n}(r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_2(r,\theta)\cos n\theta d\theta,\ \psi_{21n}(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi_2(t,\theta)\cos n\theta d\theta,$$

$$\varphi_{22n}(r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_2(r,\theta)\sin n\theta d\theta,\ \psi_{22n}(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi_2(t,\theta)\sin n\theta d\theta,\ n=1,2,\dots.$$

Таким образом, задача (1)-(3) сведена к системе уравнений (8) -(9) с данными (10) и (11). Теперь будем находить решения этих задач. Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8),(9) можно представить в виде

$$g(t)\left(u_{nrr}^k+\frac{1}{r}u_{nr}^k-\frac{n^2}{r^2}u_n\right)-u_{nt}=f_n^k(r,t), \tag{12}$$

где $f_n(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0(r,t)\equiv 0$.

В [6] показана, что краевые задачи для уравнения (12) с условиями (10) и (11) имеют единственные решения.

Следовательно, сначала решив задачу (8), (10) ($j=1,\ n=0$), а затем (9), (11) ($j=1,2,\ n=1$) и т.д. найдем последовательно все $u_{10}(r,t)$, $u_{jn}(r,t)$, $j=1,2, n=1,2,\dots$.

Итак, показано, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\rho(\theta)L_1ud\theta=0. \tag{13}$$

Пусть $f(r,\theta,t)=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$, V_0- плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta)\in C^\infty((0,2\pi))-$ плотна в $L_2((0,2\pi))$, а $T(t)\in V_1$, V_1- плотна в $L_2((\beta,0))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in V$, $V=V_0\otimes(0,2\pi)\otimes V_1-$ плотна в $L_2(\Omega_\beta)$ [5].

Отсюда и из (13) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\beta}f(r,\theta,t)L_1ud\Omega_\beta=0$$

и

$$L_1u=0,\ \forall(r,\theta,t)\in\Omega_\beta.$$

Таким образом, решением задачи (1),(3) в области Ω_β является функция (4), где $u_{10}(r,t)$, $u_{jn}(r,t)$, $j=1,2$, $n=1,2,...$ определяются из предыдущих двумерных задач.

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\varphi_2(r,\theta),\psi_2(t,\theta)$, аналогично, как в [6], можно показать, что полученное решение (4) принадлежит классу $C^1(\bar{\Omega}_\beta)\cap C^2(\Omega_\beta)$.

Далее, из (4) при $t\to-0$ имеем

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=u_{10}(r,0)+\sum_{n=0}^{\infty}(u_{1n}(r,0)\cos n\theta+u_{2n}(r,0)\sin n\theta), \tag{14}$$

при этом $\tau(r,\theta)\in C^1(\bar{S})\cap C^3(S)$.

Следовательно, учитывая краевые условия (14) и (2) приходим в области Ω_α к задаче Дирихле для вырождающихся гиперболических уравнений

$$L_2 u \equiv \sum_{i=1}^{2} p_i(t) u_{x_i x_i} - p_3(t) u_{tt} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0,$$

с данными

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \ u\Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_2(r,\theta),$$

которое имеет решение [7], если выполняется условие (4).

Следовательно, разрешимость задачи 1 установлено.

4 Заключение

В данной работе в цилиндрической области для трехмерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка показана разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле.

Литература

[1] *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных, -М.: Наука, 2006. - 287 с.

[2] *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. -Новосибирск: НГУ, 1983. - 84 с.

[3] *Алдашев С.А.* Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина // Научные ведомости БелГУ. «Математика, Физика». - Белгород: 2012. – Т. 26, №5(124) - С. 12-25.

[4] *Алдашев С.А.* Задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений// Матер. IV междунар. конф. «Математическая физика и ее приложения». – Самара: СамГУ, 2014. - С. 46.

[5] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука, 1976. – 543 с.

[6] *Алдашев С.А.* Корректность задачи Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений// Владикавказский матем. журнал. -2014. -Т. 16, №4. -С. 3-8.

[7] *Китайбеков Е.Т.* Задача Дирихле в цилиндрической области для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «Физ.-мат. науки». - Алматы, 2015. - №4(52). -С. 27-31.

References

[1] *Nakhushev A. M.* Displacement problems for partial differential equation, M:, Nauka, -2006. - 287 p.

[2] *Vragov V.N.* Boundary value problems for nonclassical equations of Math Physics. -Novosibirsk: NSU, 1983.- 84 p.

[3] *Aldashev S. A.* Correctness of Dirichlet and Poincare problem in a cylindrical domain for degenerating multi-dimensional hyperbolic equations with Chaplygin operator // HScientific gazette of BelSU. «Mathematics, Physics». -Belgorod: 2012, - Vol. 26, No. 5(124). – P. 12-25.

[4] *Aldashev S. A.* DirichletandPoincareproblemsinacylindricaldomainfordegeneratingthree-dimensionalhyperbolicequations // Mater. of IV internation. conf. «Math Physics and its applications». – Samara: SamSU, 2014. – P. 46.

[5] *Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elements of function theory and functional analysis. –M.: Nauka, 1976, - P. 543.

[6] *Aldashev S. A.* Correctness of Dirichlet problem for degenerating multi-dimensional hyperbolic-parabolic equations// Vladicaucasusmath journal. -2014. -vol. 16, No.4 . P. 3-8.

[7] *Kitaybekov. E.T.* Dirichlet problem in a cylindrical domain for three-dimensional hyperbolic equations with type and order confluence // Bulletin of KazNPU named after. Abay. Series of physical-math sciences. –Almaty. 2015. No. 4(52). – P. 27-31.