УДК 517.51

Кыдырмина Н.А.

РГКП «Институт прикладной математики» КН МОН РК, Республика Казахстан, г. Караганда
E-mail: nurgul-k@mail.ru

Прямые и обратные теоремы приближения в метрике глобального пространства типа Морри

В последние годы увеличивается число исследований в теории общих пространств типа Морри. Пространство Морри первоначально придумано самим Морри в 1938 году для изучения локальных свойств решений эллиптических уравнений. А в дальнейшем теория пространства Морри стала самостоятельно развиваться и находить широкое применение в функциональном анализе, в теории дифференциальных уравнений в частных производных. В данной работе рассматриваются глобальные пространства типа Морри с точки зрения теории приближения. В начале статьи приводится небольшой исторический экскурс в историю развития такого важного раздела теории приближения, как прямая теорема приближения, также известной как неравенство Джексона, и обратная теорема приближения. Для функций из данных пространств доказываются аналоги неравенства Минковского и неравенства Бернштейна. Далее на их основе устанавливаются прямые и обратные теоремы приближения посредством целых функций экспоненциального типа в метрике глобального пространства типа Морри и показывается зависимость скорости приближения от дифференциальных свойств функции.
Ключевые слова: пространство Морри, прямая теорема приближения, обратная теорема приближения.

Kydyrmina N.

The direct and inverse approximation theorems in metrics of the global Morrey-type space

In recent years, number of research works in the theory of the general Morrey type spaces are increased. The Morrey space was originally introduced by C. Morrey in 1938 to study the local properties of solutions of elliptic equations. Then theory of the Morrey spaces continued to develop at its own discretion and found wide application in functional analysis, theory of partial differential equations. In this paper we consider the global Morrey type spaces in terms of approximation theory. At the beginning of this work we take a short journey into the history of such important section of approximation theory as direct approximation theorem, also known as Jackson's inequality, and inverse approximation theorem. For functions from this spaces there are proved the analogue of the Minkowski inequality and analogue of the Bernstein inequality. Further, exploiting them and entire functions of exponential type, we obtain the direct and inverse approximation theorems in metrics of the global Morrey-type space and show that the degree of approximation depends on differential properties of function.
Key words: Morrey space, direct approximation theorem, inverse approximation theorem.

Кыдырмина Н.А.

Глобалды Морри типті кеңістікте тура және кері жуықтау теоремалары

Соңғы кезде Морридің жалпыланған кеңістіктері туралы мақалалар ғылыми журналдарда көптеп басылуда. Морри кеңістігін 1938 жылы, Морридың өзі, эллиптикалық теңдеулердің жергілікті қасиеттерін зерттеу үшін енгізген болатын. Ал, соңынан Морри кеңістігі функционалдық талдау, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теорияларында кең қолданыс тауып, өз бетінше қарыштап дами бастады. Бұл жұмыста глобалды Морри кеңістігі жуықтау теориясының тұрғысынан зерттелді. Статьяның басында функциялар теориясының манызды бір тармағы болып табылатын тура және кері жуықтау теоремалары жөнінде қысқаша тарихи мәлімет келтірілді. Бұл екі теореманы, сәйкесінше, Джексон теңсіздігі және кері жуықтау теоремасы деп атайды. Глобалды Морри кеңістігінде Минковскийдің және экспоненциалды типті бүтін функциялар үшін Бернштейннің теңсіздіктерінің аналогтары дәлелденді. Осылардың көмегімен глобалды Морри кеңістігінде экспоненциалды типті бүтін функциялармен жуықтаудың тура және кері теоремалары дәлелденіп, Морри кеңістігінің элементтерінің дифференциалдық қасиеттерінен осы функцияны жуықтаудың жылдамдығының тәуелділігі көрсетілді.

Түйін сөздер: Морри кеңістігі, тура жуықтау теоремасы, кері жуықтау теоремасы.

1 Введение

В 1911 году Д. Джексон [1] уточнил классическую теорему Вейерштрасса о стремлении к нулю в равномерной метрике, показав зависимость скорости стремления к нулю от структурного свойства функции

$$E_n(f;a,b) \leq C\,\omega\left(f, \frac{b-a}{n}\right). \tag{1}$$

Здесь $E_n(f;a,b)$ – наилучшее приближение произвольной непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции f алгебраическими многочленами степени $\leq n$, $C>0$ – константа, не зависящая от f и n, $\omega(f;\delta)$ – модуль непрерывности функции на $[a,b]$.

Это неравенство называется неравенством Джексона или прямой теоремой теории приближения. Данное неравенство справедливо и в периодическом случае.

Н.И.Ахиезер получил подобное неравенство с использованием модуля непрерывности второго порядка [2], а в 1951 году С.Б. Стечкин [3] в периодическом случае еще раз уточнил упомянутый результат, получив неравенство типа неравенств Джексона (1) с модулем гладкости порядка k:

$$E_n(f) \leq C\,\omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right).$$

Здесь k – целое число, $k \geq 3$.

Для классов функций из $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq q \leq +\infty$ в случае приближения функции целыми функциями экспоненциального типа неравенства типа неравенств Джексона

$$A_\nu(f)_{L_q(\mathbb{R})} \leq C_k \omega_k\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_{L_q(\mathbb{R})}$$

были получены в [2], [4]. Здесь $A_\nu(f)_{L_q(\mathbb{R})}$ – наилучшее приближение функции f посредством целых функций экспоненциального типа ν в метрике пространства $L_q(\mathbb{R})$, $1 \leq q \leq +\infty$, а $\omega_k\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_{L_q(\mathbb{R})}$ – модуль гладкости функции в метрике $L_q(\mathbb{R})$.

В 1950 году А.Ф. Тиман и М.Ф. Тиман [4] установили в метрике $L_q[0,2\pi)$, $1 \le q < +\infty$ для периодических функций неравенство:

$$\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)_{L_q[0,2\pi)} \le \frac{c_k}{n_k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f)_{L_q[0,2\pi)},$$

называемое в последующем обратной теоремой теории приближения. Здесь сомножитель $c_k > 0$ зависит лишь от порядка модуля гладкости.

В случае $q = +\infty$ подобный результат был получен в [3]. На случай классов функций из $L_q(\mathbb{R})$, $1 \le q < +\infty$ подобное неравенство перенесено в [5].

Более подробные исторические сведения по данной тематике можно получить в [6] и [7].

В данной работе прямые и обратные теоремы приближения посредством целых функций получены для классов функций из обобщенного пространства типа Морри [8], [9] и определена зависимость скорости приближения от дифференциальных свойств функции.

2 Предварительные сведения

Пространства Морри в настоящее время, являясь бурно развивающимся разделом теории функциональных пространств, все больше находят применение в теории дифференциальных уравнений в частных переменных, поэтому исследования конструктивных и структурных свойств функций являются одной из важных задач в теории пространств Морри.

Определение 1 ([8]) *Пусть $0 < p, \theta \le +\infty$ и w – неотрицательная измеримая по Лебегу функция на $(0,+\infty)$. Через $LM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$ обозначим локальное пространство типа Морри всех измеримых на $\mathbb{R}$ функций f с конечной квази-нормой*

$$\|f\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \|w(r)\|f\|_{L_p(B(0,r))}\|_{L_\theta(0,\infty)}.$$

А через $GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$ обозначим глобальное пространство типа Морри всех измеримых на $\mathbb{R}$ функций f с конечной квази-нормой

$$\|f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\|f(x+\cdot)\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\|w(r)\|f\|_{L_p(B(x,r))}\|_{L_\theta(0,\infty)}.$$

Заметим, что если $w(r) \equiv 1$, то $LM_{p\infty,1}(\mathbb{R}) = GM_{p\infty,1}(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R})$. Более того,

$$GM_{p\infty,r^{-\lambda}}(\mathbb{R}) \equiv M_p^\lambda(\mathbb{R}), \quad 0 < p \le +\infty, \quad 0 \le \lambda \le \frac{n}{p},$$

где $M_p^\lambda(\mathbb{R})$ – классическое пространство Морри.

Определение 2 *Пусть $0 < p, \theta \le +\infty$. Через Ω_θ обозначим множество всех неотрицательных, измеримых на $(0,+\infty)$ функций w не равных 0 и таких, что для некоторого $t > 0$*

$$\|w(r)\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty.$$

Через $\Omega_{p\theta}$ *обозначим множество всех неотрицательных, измеримых на* $(0,+\infty)$ *функций* w *не равных* 0 *и таких, что для всех* $t>0$

$$\|w(r)r^{\frac{1}{p}}\|_{L_\theta(0,t)}<\infty, \quad \|w(r)\|_{L_\theta(t,\infty)}<\infty.$$

В работах [10, 11] была доказана следующая лемма.

Лемма 1 *Пусть* $0<p,\theta\le+\infty$ *и* w *– неотрицательная измеримая по Лебегу функция на* $(0,+\infty)$ *не равная нулю. Тогда пространство* $LM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$ *нетривиально, в том смысле что* $LM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})\ne\Theta$*, тогда и только тогда, когда* $w\in\Omega_\theta$*, а пространство* $GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$ *нетривиально тогда и только тогда, когда* $w\in\Omega_{p\theta}$.

Более того, если $w\in\Omega_\theta$ *и* $\tau=\inf\{s>0\colon \|w\|_{L_\theta(s,\infty)}<\infty\}$*, тогда пространство* $LM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$ *содержит в себе все функции* $f\in L_p$ *такие, что* $f=0$ *на* $B(0,t)$ *для некоторого* $t>\tau$*. Если же* $w\in\Omega_{p\theta}$*, то*

$$L_p\cap L_\infty\subset GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R}).$$

Держа в уме данное утверждение, всегда будем предполагать, что $w\in\Omega_\theta$ для случая локального пространства типа Морри, и что $w\in\Omega_{p\theta}$ для случая глобального пространства типа Морри.

Теперь докажем неравенство Минковского для глобальных пространств типа Морри.

Лемма 2 *Пусть* $A\subset\mathbb{R}$ *– измеримое множество,* $1\le p\le+\infty$*,* $w\in\Omega_{p\theta}$*. Предположим, что* f *– измеримая функция из* $A\times\mathbb{R}$ *в* $\mathbb{R}$*. Пусть* $f(\cdot,y)\in GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$ *для почти всех* $y\in A$ *и*

$$\int_A \|f(\cdot,y)\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}dy<+\infty.$$

Тогда интеграл $\int_A f(x,y)dy$ *имеет смысл для почти всех* $x\in\mathbb{R}$ *и имеет место неравенство Минковского для глобальных пространств типа Морри*

$$\left\|\int_A f(\cdot,y)dy\right\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\le\int_A\|f(\cdot,y)\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}dy.$$

Доказательство. Применив неравенство Минковского для лебеговых пространств в $B(x,r)\times A$ и в $(0,\infty)\times A$, получим

$$\left\|\int_A f(\cdot,y)dy\right\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left\|w(r)\left\|\int_A f(\cdot,y)dy\right\|_{L_p(B(x,r))}\right\|_{L_\theta(0,\infty)}\le$$

$$\le\sup_{x\in\mathbb{R}}\left\|w(r)\int_A\|f(\cdot,y)\|_{L_p(B(x,r))}dy\right\|_{L_\theta(0,\infty)}\le$$

$$\le\int_A\sup_{x\in\mathbb{R}}\big\|w(r)\|f(\cdot,y)\|_{L_p(B(x,r))}\big\|_{L_\theta(0,\infty)}dy=\int_A\|f(\cdot,y)\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}dy.$$

$\square$

Определение 3 *Пусть $f \in GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$. Для любого числа $h \in \mathbb{R}$ определим разность*

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и по индукции определим k-разность функции

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h \left(\Delta^{k-1} f(x)\right), \quad \Delta_h^0 f(x) = f(x), \;\; \Delta_h^1 = \Delta_h.$$

Известно, что

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k+\nu}\, c_k^\nu f(x+\nu h).$$

Отсюда элементарным образом следует нужное нам в дальнейшем неравенство

$$\left\|\Delta_h^k f\right\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le 2^k \|f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}. \tag{2}$$

Далее нам необходимо будет и следующее соотношение для функции f, для которой существует $f^{(r)} \in GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$

$$\|\Delta_h^r f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le |h|^r \|f^{(r)}\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}. \tag{3}$$

Его доказательство основано на обобщенном неравенстве Минковского и инвариантности квазинормы глобальных пространств типа Морри относительно сдвига

$$\|\Delta_h^r f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \left\| \int_0^h du_1 \ldots \int_0^h f^{(r)}(\cdot + u_1 + u_2 + \ldots + u_r) du_r \right\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le$$

$$\le \int_0^{|h|} du_1 \ldots \int_0^{|h|} \left\|f^{(r)}(\cdot + u_1 + u_2 + \ldots + u_r)\right\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} du_r = |h|^r \|f^{(r)}\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}.$$

Определение 4 *Модулем непрерывности k-порядка функции f по норме глобального пространства типа Морри назовем величину*

$$\omega_k\,(f;\delta)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \sup_{|h|\le\delta} \left\|\Delta_h^k f\right\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})},$$

где $\delta > 0$.

Из неравенств (2) и (3) вытекают соответственно

$$\omega_k\,(f;\delta)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le 2^k \|f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}. \tag{4}$$

если существует $f^{(r)} \in GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$, то

$$\omega_r\,(f;\delta)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le \delta^r \|f^{(r)}\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}. \tag{5}$$

Через $\mathfrak{M}_{\nu p\theta}^{w(\cdot)}$ обозначим множество целых функций экспоненциального типа ν, которые принадлежат пространству $GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$, $0 < p, \theta \le +\infty$, $w \in \Omega_{p\theta}$.

Определение 5 *Через $A_\nu(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}$ обозначим наилучшее приближение функции f посредством целых функций экспоненциального типа в $GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$, т.е.*

$$A_\nu(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \inf \left\{ \|f - g_k\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \colon\; g_k \in \mathfrak{M}_{\nu p\theta}^{w(\cdot)},\; 0 \le k \le \nu \right\}.$$

3 Прямая теорема приближения

Теорема 1 *Пусть* $1 \le p \le +\infty$, $w \in \Omega_{p\theta}$. *Пусть для функции* $f \in GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$ *существует обобщенная производная* $f^{(r)} \in GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$. *Тогда для этой функции при любом фиксированном* $k \in \mathbb{N}$ *имеет место следующее неравенство*

$$A_\nu(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le \frac{c_{prk}}{\nu^r}\,\omega_k\left(f^{(r)};\frac{1}{\nu}\right)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}.$$

Здесь сомножитель $c_{prk} > 0$ *зависит лишь от указанных параметров.*

Доказательство. Пусть $l = r+k$. Выберем целую функцию экспоненциального типа 1 так, чтобы она была неотрицательной четной функцией, удовлетворяющей следующим условиям:

$$2\int_0^{+\infty} g(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} g(|\xi|)d\xi = 1, \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|)|t|^l dt < +\infty. \tag{7}$$

Примером такой функции является функция

$$g(z) = \mu\left(\frac{\sin\frac{z}{\lambda}}{z}\right)^\lambda \in \mathfrak{M}_{1,1}.$$

Здесь $\lambda > (l+1)$ и является четным числом.

Согласно определению конечной разности имеем

$$(-1)^{l+1}\Delta_h^l(f)(x) = \sum_{s=0}^{l}(-1)^{s+1}c_l^s f(x+sh) =$$

$$= \sum_{s=1}^{l}(-1)^{s+1}c_l^s f(x+sh) - f(x) = \sum_{s=1}^{l} d_s f(x+sh) - f(x).$$

Здесь $d_s = (-1)^{s+1}c_l^s$, $s = \overline{1,l}$, к тому же $\sum\limits_{s=1}^{l} d_s = 1$, поскольку $\sum\limits_{s=0}^{l}(-1)^{s+1}c_l^s = 0$.

Теперь для функции $f \in LM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$ рассмотрим конструкцию:

$$g_\nu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|)\left\{(-1)^{l+1}\Delta^l_{\frac{t}{\nu}}(f)(x) + f(x)\right\}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|)\sum_{s=1}^{l} d_s f\left(x + s\frac{t}{\nu}\right)dt =$$

$$= \left(u = x + s\frac{t}{\nu}; \;\; t = \frac{u-x}{s}\,\nu; \;\; dt = \frac{\nu}{s}\,du \right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_\nu(u-x) f(u) du,$$

где $R_\nu(u) = \sum\limits_{s=1}^{l} d_s \, \frac{\nu}{s} \, g\left(\frac{\nu|u|}{s}\right)$.

Мы знаем, что $R_\nu(z)$ – целая функция экспоненциального типа ν.

С учетом (6) будем иметь, что

$$\|g_\nu\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) \sum_{s=1}^{l} d_s \left\| f\left(\cdot + s\frac{t}{\nu}\right)\right\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(|t|)\, \|f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} dt = \|f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) dt =$$

$$= \|f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} < +\infty.$$

Таким образом, мы можем утверждать, что $g_\nu \in \mathfrak{M}^{w(\cdot)}_{\nu p\theta}$.

Рассмотрим разность

$$f(x) - g_\nu(x) = (-1)^l \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) \Delta^l_{\frac{t}{\nu}}(f)(x) dt.$$

Тогда, используя свойство модуля гладкости $\omega_k(\varphi; \alpha\delta)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le (1+\alpha)^k \omega_k(\varphi, \delta)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}$, $\alpha > 0$, получим

$$A_\nu(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le \|f - g_\nu\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \left\| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) \Delta^l_{\frac{t}{\nu}} f(\cdot) dt \right\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) \left\| \Delta^l_{\frac{t}{\nu}}(f) \right\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} dt \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) \left(\frac{|t|}{\nu}\right)^r \left\| \Delta^k_{\frac{t}{\nu}} f^{(r)} \right\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} dt \le$$

$$\le \frac{1}{\nu^r} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(|t|)\, |t|^r \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{|t|}{\nu}\right)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} dt \le$$

$$\le \frac{\omega_k\left(f^{(r)}; \frac{1}{\nu}\right)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}}{\nu^r} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) |t|^r (1+|t|)^k dt.$$

Согласно построению функции $g_\nu(x)$, можно утверждать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) |t|^r (1+|t|)^k dt = c_{kr} < +\infty.$$

Таким образом,

$$A_\nu(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le \frac{c_{kr}}{\nu^r}\,\omega_k\left(f^{(r)};\frac{1}{\nu}\right)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}.$$

□

4 Обратная теорема приближения

Лемма 3 *Для любой целой функции* $g_\nu \in \mathfrak{M}^{w(\cdot)}_{\nu p\theta}(\mathbb{R})$ *справедлив аналог неравенства Бернштейна*

$$\|g'_\nu\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le \nu\|g_\nu\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}.$$

Доказательство. Для целых функций экспоненциального типа $g_\nu \in \mathfrak{M}^{w(\cdot)}_{\nu p\theta}(\mathbb{R})$ справедлива следующая интерполяционная формула

$$g'_\nu(x) = \nu\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(\pi/2-k\pi)^2}\,g_\nu\left(\frac{k\pi-\pi/2}{\nu}+x\right),$$

$\forall\, x\in\mathbb{R}$. Тогда для всех $x\in\mathbb{R}$ и $\forall\, r>0$ имеем

$$\|g'_\nu\|_{L_p(B(x,r))} \le \nu\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-k\pi)^2}\left\|g_\nu\left(\frac{k\pi-\frac{\pi}{2}}{\nu}+\cdot\right)\right\|_{L_p(B(x,r))} \le$$

$$\le \nu\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-k\pi)^2}\|g_\nu\|_{L_p\left(B\left(x+\frac{k\pi-\frac{\pi}{2}}{\nu},r\right)\right)}.$$

Следовательно,

$$\|g'_\nu\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left\|w(r)\|g'_\nu\|_{L_p(B(x,r))}\right\|_{L_\theta(0,\infty)} \le$$

$$\le \nu\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-k\pi)^2}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left\|w(r)\|g_\nu\|_{L_p\left(B\left(x+\frac{k\pi-\frac{\pi}{2}}{\nu},r\right)\right)}\right\|_{L_\theta(0,\infty)} \le$$

$$\le \nu\sup_{z\in\mathbb{R}}\left\|w(r)\|g_\nu\|_{L_p(B(z,r))}\right\|_{L_\theta(0,\infty)} = \nu\|g_\nu\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}.$$

□

Теорема 2 *Пусть* $1\le p\le+\infty$, $w\in\Omega_{p\theta}$. *Тогда для любого фиксированного* $k\in\mathbb{N}$ *существует константа* $c_{p\nu k}>0$ *такая, что для любой функции* $f\in GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$ *и* $\forall\, n\in\mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\omega_k\left(f;\frac{1}{n}\right)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le \frac{c_{p\nu k}}{n^k}\left\{\sum_{s=0}^{n}(s+1)^{k-1}A_s(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right\}.$$

Здесь $c_{p\nu k}>0$ *зависит лишь от указанных параметров.*

Доказательство. Пусть $\{g_\nu(x)\}_{\nu=0}^{+\infty}$ – последовательность целых функций экспоненциального типа из $\mathfrak{M}_{\nu p\theta}^{w(\cdot)}(\mathbb{R})$ наилучшего приближения функции $f \in GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$ по норме этого пространства, т.е.:

$$A_\nu(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \|f - g_\nu\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{Z}^+,$$

$$A_0(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \|f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}.$$

Произвольным образом берем $n \in \mathbb{N}$ и $\nu \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^\nu \le n < 2^{\nu+1}$. Пусть $k \in \mathbb{N}$ – фиксированное число. Тогда

$$\omega_k\left(f; \frac{1}{n}\right)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \omega_k\left(f - g_{2^{\nu+1}} + g_{2^{\nu+1}}; \frac{1}{n}\right)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le$$

$$\le \omega_k\left(f - g_{2^{\nu+1}}; \frac{1}{n}\right)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \omega_k\left(g_{2^{\nu+1}}; \frac{1}{n}\right)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le$$

$$\le \left[\omega_k(\varphi,\delta)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le 2^k\|f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}, \quad \omega_k(\varphi,\delta)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le \delta^r\|f^{(r)}\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right] \le$$

$$\le 2^k\|f - g_{2^{\nu+1}}\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \frac{1}{n^k}\left\|g_{2^{\nu+1}}^{(k)}\right\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}. \tag{8}$$

Нам в дальнейшем понадобится равенство:

$$g_{2^{\nu+1}}^{(k)}(x) = g_1^{(k)}(x) + \sum_{s=0}^{\nu}\left(g_{2^{s+1}}^{(k)}(x) - g_{2^s}^{(k)}(x)\right).$$

Так как $g_0(x) \equiv const$ на $\mathbb{R}$, то

$$g_{2^{\nu+1}}^{(k)}(x) = (g_1(x) - g_0(x))^{(k)} + \sum_{s=0}^{\nu}(g_{2^{s+1}}(x) - g_{2^s}(x))^{(k)}.$$

Далее, применяя неравенство Бернштейна в $GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})$ для целых функций и учитывая свойство монотонности последовательности $\{A_\nu(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\}$, имеем

$$\left\|g_{2^{\nu+1}}^{(k)}\right\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le \left\|(g_1 - g_0)^{(k)}\right\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{s=0}^{\nu}\left\|(g_{2^{s+1}} - g_{2^s})^{(k)}\right\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le$$

$$\le 1^k\|g_1 - g_0\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{s=0}^{\nu}2^{(s+1)k}\|g_{2^{s+1}} - g_{2^s}\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} \le$$

$$\le \|g_1 - f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \|f - g_0\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\nu}2^{(s+1)k}\left(\|g_{2^{s+1}} - f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \|f - g_{2^s}\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right) =$$

$$= A_1(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} + A_0(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})} +$$

$$+\sum_{s=0}^{\nu} 2^{(s+1)k}\left(A_{2^{s+1}}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right)\leq$$

$$\leq 2A_0(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+\sum_{s=0}^{\nu} 2^{(s+1)k}2A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}=$$

$$=2\left\{A_0(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+\sum_{s=0}^{\nu} 2^{(s+1)k}A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right\}. \tag{9}$$

Теперь из неравенств (8) и (9) следует, что

$$\omega_k\left(f;\frac{1}{n}\right)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\leq 2^k A_{2^{\nu+1}}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+$$

$$+\frac{2}{n^k}\left\{A_0(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+\sum_{s=0}^{\nu} 2^{(s+1)k}A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right\}\leq$$

$$\leq\frac{2^{k+1}}{n^k}\left(n^k A_{2^{\nu+1}}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+A_0(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+\sum_{s=0}^{\nu} 2^{sk}A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right)\leq$$

$$\leq\frac{2^{k+1}}{n^k}\left(A_0(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+2^{(\nu+1)k}A_{2^\nu}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+\sum_{s=0}^{\nu} 2^{sk}A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right)\leq$$

$$\leq\frac{2^{2k+1}}{n^k}\left(A_0(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+2^{\nu k}A_{2^\nu}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+\sum_{s=0}^{\nu} 2^{sk}A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right)\leq$$

$$\leq\frac{2^{2k+1}}{n^k}\left(A_0(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+2\sum_{s=0}^{\nu} 2^{sk}A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right)\leq$$

$$\leq\frac{2^{2k+2}}{n^k}\left(A_0(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+\sum_{s=0}^{\nu} 2^{sk}A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right)=$$

$$=\frac{B_{p\lambda k}}{n^k}\left(A_0(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+\sum_{s=0}^{\nu} 2^{sk}A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right). \tag{10}$$

Так как $A_\nu(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\downarrow 0$ при $\nu\to+\infty$, то

$$2^{sk}A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\leq 2^k\sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} l^{k-1}A_l(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})},\quad \forall\, s\in\mathbb{N}.$$

В силу этого факта, (10) продолжим следующим образом:

$$\omega_k\left(f;\frac{1}{n}\right)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\leq\frac{B_{p\lambda k}}{n^k}\Big(A_0(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+$$

$$+A_1(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+\sum_{s=1}^{\nu}2^k\sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s}l^{k-1}A_l(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\Bigg)\le$$

$$\le\frac{c_{p\lambda k}}{n^k}\left(A_0(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+A_1(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+\sum_{l=2}^{2^\nu}l^{k-1}A_l(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right)\le$$

$$\le\frac{c_{p\lambda k}}{n^k}\left(A_0(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+1^{k-1}A_1(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}+\sum_{l=2}^{n}l^{k-1}A_l(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right)\le$$

$$\le\frac{c_{p\lambda k}}{n^k}\left(\sum_{l=0}^{n}(l+1)^{k-1}A_l(f)_{GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R})}\right).$$

□

5 Заключение

Для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) доказаны неравенство Бернштейна, прямая теорема Джексона теории приближения и обратная теорема приближения ц.ф.э.т. в метрике глобального пространства типа Морри и показана зависимость от скорости стремления к нулю наилучших приближений ц.ф.э.т. по метрике глобального пространства типа Морри структурных и дифференциальных свойств элементов глобального пространства типа Морри.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научных исследований Комитетом науки МОН РК (проект N 1777/ГФ4 МОН РК).

Литература

[1] *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung: Dissertation. – Göttingen, 1911.

[2] *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 323 с.

[3] *Стечкин С.Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – N 15(3). – С. 219-242.

[4] *Тиман А.Ф., Тиман М.Ф.* Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 71. – С. 17-20.

[5] *Тиман А.Ф., Тиман М.Ф.* О зависимости между модулями гладкости функций, заданных на всей вещественной оси // Докл.АН СССР. – 1957. – Т. 113, N 5. – С. 995-997.

[6] *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 624 с.

[7] *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1977. – 455 с.

[8] *Burenkov V.I.* Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I // Eurasian Mathematical Journal. – 2012. – N 3(3). – P. 11-32.

[9] *Burenkov V.I.* Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II // Eurasian Mathematical Journal. – 2013. – N 4(1). – P. 21-45.

[10] *Burenkov V.I. , Guliyev H.V.* Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in local Morrey-type spaces // Stud. Math. – 2004. – N 163(2). – P. 157-176.

[11] *Burenkov V.I. , Jain P., Tararykova T.V.* On boundedness of the Hardy operator in Morrey-type spaces // Eurasian Mathematical Journal. – 2011. – N 2(1). – P. 52-80.

References

[1] *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung: Dissertation. – Göttingen, 1911.

[2] *Akhiezer N.I.* Theory of approximation. – Dover Publications, 1992. – 307 p.

[3] *Stechkin S.B.* On the Order of the Best Approximations of Continuous Functions // Izv. AN SSSR, Ser. Mat. – 1951. – N 15(3). – P. 219-242.

[4] *Timan A.F., Timan M.F.* Generalized modulus of continuity and best approximation in the mean // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1950. – Vol. 71. – P.17-20.

[5] *Timan A.F., Timan M.F.* On the relation between the moduli of smoothness of functions defined on the whole real axis // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1957. – Vol. 113, N 5. – P. 995-997.

[6] *Timan A.F.* Theory of approximation of functions of a real variable. – Dover Publications, 1994. – 643 p.

[7] *Nikol'skii S.M.* Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1975. – 420 p.

[8] *Burenkov V.I.* Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I // Eurasian Mathematical Journal. – 2012. – N 3(3). – P. 11-32.

[9] *Burenkov V.I.* Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II // Eurasian Mathematical Journal. – 2013. –N 4(1). – P. 21-45.

[10] *Burenkov V.I. , Guliyev H.V.* Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in local Morrey-type spaces // Stud. Math. – 2004. –N 163(2). – P. 157-176.

[11] *Burenkov V.I. , Jain P., Tararykova T.V.* On boundedness of the Hardy operator in Morrey-type spaces // Eurasian Mathematical Journal. – 2011. – N 2(1). – P. 52-80.