УДК 517.956.6

Садыбеков М.А.[1*], Дилдабек Г.[2**], Тенгаева А.А.[3***]

[1]Институт математики и математического моделирования, Республика Казахстан, г. Алматы
[2]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
[3]Казахский национальный аграрный университет, Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: *sadybekov@math.kz, **dildabek.g@gmail.com, ***aijan0973@mail.ru

О новой нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

В настоящей работе сформулирована новая нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа. Рассматривается уравнение параболо-гиперболического типа. Его относят к первому роду потому, что линия изменения типа не является характеристикой уравнения. Нелокальное условие связывает между собой точки на границах параболической части области и гиперболической части области. Эта задача является обобщением хорошо известных задач типа Франкля. При ее решении возникает краевая задача для уравнения теплопроводности с условиями типа Самарского-Ионкина. В отличие от имеющихся публикаций других авторов, близких по тематике, необходимо отметить, что в этих работах нелокальные задачи рассматривались в прямоугольных областях. В нашей же постановке задачи гиперболическая часть области совпадает с характеристическим треугольником. Сформулированная задача эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Доказана однозначная сильная разрешимость сформулированной задачи.

Ключевые слова: нелокальные граничные условия, уравнение параболо-гиперболического типа, функция Грина, сильное решение.

Sadybekov M.A., Dildabek G., Tengayeva A.A.

On a new nonlocal boundary value problem for an equation of the mixed parabolic-hyperbolic type

In the present work a new nonlocal boundary value problem for an equation of the mixed type is formulated. This equation is parabolic-hyperbolic and belongs to the first kind because the line of type change is not a characteristic of the equation. Nonlocal condition links points on boundaries of the parabolic and hyperbolic parts of the domain with each other. This problem is generalization of the well-known problems of Frankl type. A boundary value problem for the heat equation with conditions of the Samarskii-Ionlin type arises in solving this problem. Unlike the existing publications of the other authors related to the theme it is necessary to note that in this papers nonlocal problems were considered in rectangular domains. But in our formulation of the problem the hyperbolic part of the domain coincides with a characteristical triangle. The formulated problem is equivalently reduced to an integral Volterra equation of the second kind. Unique strong solvability of the formulated problem is proved.

Key words: nonlocal boundary conditions; equation of the parabolic-hyperbolic type; Green's function; strong solution.

Садыбеков М.А., Ділдәбек Г., Тенгаева А.А.

Парабола-гипербола типті аралас теңдеу үшін жаңа бейлокал шеттік есеп туралы

Бұл жұмыста аралас типті теңдеу үшін жаңа бейлокал шеттік есеп қойылған.Парабола-гипербола типті теңдеу қарастырылған. Теңдеу бірінші текті теңдеуге жатады, өйткені типтің өзгеру сызығы характеристикалық сызық болып табылмайды. Бейлокалдың шарты облыстың параболалық және гиперболалық бөліктері шекараларының нүктелерін өзара байланыстырады. Бұл есеп белгілі Франкль тектес есептердің жалпыламасы болып табылады. Оны шешу кезінде жылутаралу теңдеуі үшін Самарский-Ионкин типті шартпен берілген шеттік есеп пайда болады. Өзге авторлардың мақаланың тақырыбына ұқсас белгілі зерттеулерінен айырмашылығы, ол жұмыстарда бейлокал есеп тіктөртбұрышты облыстарда қарастырылғандығы болып табылады. Біздің қарастыратын есепте облыстың гиперболалық бөлігі характеристикалық ұшбұрышпен сәйкес келеді. Қарастырылған есеп эквивалентті екінші түрдегі Вольтерра интегралдық теңдеуіне келтіріледі. Есептің бірмәнді әлді шешілімділігі дәлелденеді.

Түйін сөздер: бейлокал шекаралық шарт, парабола-гипербола типті теңдеу, Грин функциясы, әлді шешім.

1 Введение

Теория уравнений смешанного типа является одним из центральных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это связано с выявлением множества прикладных задач, математическое моделирование которых обуславливает изучение различных типов уравнений в рассматриваемой области изменения независимых переменных.

Проблемам теории краевых задач для уравнений смешанного типа посвящены многочисленные работы авторов из ближнего и дальнего зарубежья. Достаточно полный обзор полученных результатов содержится в книгах А.В. Бицадзе, Л. Берса, М.М. Смирнова, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, Т.Ш. Кальменова.

Впервые на важность изучения уравнений смешанного типа указал С.А. Чаплыгин в 1902 году в своей работе "0 газовых струях". Начало же исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в 20 - 30 годы прошлого века работами Ф. Трикоми, С. Геллерстедта. Новым толчком в развитии этой теории послужили работы М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе, Ф.И. Франкля, К.И. Бабенко, где наряду с теоретическими исследованиями ряда существенных вопросов этой теории была указана и их практическая значимость. В большинстве своем, это были работы, посвященные теоретическим и прикладным аспектам уравнений смешанного эллиптико - гиперболического типа. Исследование уравнений параболо - гиперболического типа получило бурное развитие сравнительно недавно. Особый интерес эти задачи представляют в связи с их приложением к различным задачам механики и физики.

Существенный вклад в развитие теории краевых задач для параболо - гиперболических уравнений внесли исследования М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, А.М. Нахушева, А.С. Бердышева. Вопросы обобщенной разрешимости в классе L_2 на основе представления решения в виде билинейного ряда рассмотрены в работах Н.Ю. Капустина [1], [2].

В отличие от теории локальных краевых задач, гораздо менее исследованными являются нелокальные краевые задачи. Известные к сегодняшнему дню результаты можно проследить из списка цитирований монографий А.В. Бицадзе, Л. Берса, М.М. Смирнова, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева. Особенно для уравнений параболо-гиперболического типа – в недавно вышедшей монографии А.С. Бердышева [3].

В газовой динамике Ф.И. Франкль [4], [5] для уравнения Чаплыгина:

$$k(y)\,u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

где $k(0) = 0$, $k'(y) > 0$, впервые поставил краевую задачу, в которой носителем нелокального краевого условия ("скачка уплотнения")

$$u(0,y) - u(0,-y) = f(y)$$

является часть $-a < y < a$ границы $x = 0$ области, состоящей из частей границ подобластей эллиптичности и гиперболичности уравнения. Поэтому нелокальные краевые условия такого типа – связывающие значения функций на границах областей разного типа уравнения, называют условиями типа Франкля.

Из недавних публикаций, близких по тематике, можно отметить работы [6 – 9]. Однако в этих работах нелокальные задачи рассматривались в прямоугольных областях. В нашей же постановке задачи гиперболическая часть области совпадает с характеристическим треугольником.

2 Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ - конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B, $A = (0,1)$, $B_0 = (1,1)$, $B = (1,0)$, а при $y < 0$ - характеристиками $AC: \ x + y = 0$ и $BC: \ x - y = 1$ уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \left\{ \begin{array}{c} u_x - u_{yy}, y > 0 \\ \\ u_{xx} - u_{yy}, y < 0 \end{array} \right\} = f(x,y) \tag{1}$$

Это уравнение смешанного типа. Его относят к первому роду потому, что линия изменения типа $y = 0$ не является характеристикой уравнения.

Через $W_2^l(\Omega) = H^l(\Omega)$ обозначим пространство С.Л. Соболева со скалярным произведением $(\cdot, \ \cdot)_l$ и нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$; $\Omega_1 = \Omega \bigcap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \bigcap \{y < 0\}$.

В области Ω рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу, являющуюся обобщением аналога задачи Франкля для параболо - гиперболического уравнения (1). Задача F. *Найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее классическим краевым условиям*

$$u|_{AA_0} = 0, \quad u_y|_{A_0B_0} = 0 \tag{2}$$

и нелокальному краевому условию

$$u(\theta(t)) = (1+\alpha)\,u(\theta_0(t)) + (1-\alpha)\,u(\theta_1(t)), \quad 0 \le t \le 1, \tag{3}$$

где $\theta(t) = (t,1)$, $\theta_0(t) = \left(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}\right)$, $\theta_1(t) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2}\right)$, α – произвольное число.

Легко видеть, что $\theta(t) \in A_0B_0$, $\theta_0(t) \in AC$, $\theta_1(t) \in BC$. Поэтому новое нелокальное краевое условие (3) связывает между собой значения искомого решения на параболической части границы A_0B_0 и на гиперболических частях границы области – на характеристиках AC и BC. Отметим, что краевые условия в гиперболической части области вида

$$\alpha u(\theta_0(t)) + \beta u(\theta_1(t)) = 0$$

хорошо известны и носят название краевых условий со смещением. Они впервые введены А.М. Нахушевым для волнового уравнения (см. [10]).

Определение. *Функцию $u \in L_2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи, если существует последовательность функций $\{u_n\}$,*

$$u_n \in W = C^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^{1,2}_{x,y}\left(\overline{\Omega}_1\right) \cap C^2\left(\overline{\Omega}_2\right),$$

удовлетворяющих краевым условиям (2) - (3) *задачи, такая, что последовательности u_n и Lu_n сходятся в пространстве $L_2(\Omega)$, к функциям u и f, соответственно.*

3 Формулировка основного результата

Теорема. *Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $u(x,y)$ задачи F. Это решение принадлежит классу $H^1(\Omega) \cap H^{1,2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, и удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_1 \le C\,\|f\|_0. \tag{4}$$

Доказательство. В силу однозначной разрешимости задачи Коши для волнового уравнения, решение уравнения (1) при $y < 0$ представляется в виде

$$u(x,y) = -\int_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1 + \frac{1}{2}\left[\tau(\xi) + \tau(\eta)\right] - \frac{1}{2}\int_{\xi}^{\eta} \nu(s)\,ds, \tag{5}$$

где

$$\tau(x) = u(x,0), \quad \tau(0) = 0, \quad \xi = x + y, \quad \eta = x - y,$$

$$\nu(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0), \quad f_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right).$$

Отсюда, с учетом $\tau(0) = 0$, непосредственным вычислением, получаем

$$(1+\alpha)\,u(\theta_0(t)) + (1-\alpha)\,u(\theta_1(t)) = \tau(t) - \frac{(1+\alpha)}{2}\int_0^t \nu(s)\,ds - \frac{(1-\alpha)}{2}\int_t^1 \nu(s)\,ds +$$

$$+\frac{(1-\alpha)}{2}\tau(1) - (1+\alpha)\int_0^t d\xi_1 \int_{\xi_1}^t f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1 - (1-\alpha)\int_t^1 d\xi_1 \int_{\xi_1}^1 f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1.$$

Вводя дополнительное обозначение $u\left(t,0\right)-u\left(t,1\right)=\varphi\left(t\right)$, отсюда и из краевого условия (3), получаем

$$\varphi\left(t\right)=u\left(t,0\right)-u\left(t,1\right)=\tau\left(t\right)-u\left(\theta\left(t\right)\right)=\frac{\left(1+\alpha\right)}{2}\int_0^t\nu\left(s\right)ds+\frac{\left(1-\alpha\right)}{2}\int_t^1\nu\left(s\right)ds-$$

$$-\frac{\left(1-\alpha\right)}{2}\tau\left(1\right)+\left(1+\alpha\right)\int_0^t d\xi_1\int_{\xi_1}^t f_1\left(\xi_1,\eta_1\right)d\eta_1+\left(1-\alpha\right)\int_t^1 d\xi_1\int_{\xi_1}^1 f_1\left(\xi_1,\eta_1\right)d\eta_1.$$

Дифференцируя полученное по переменной t, будем иметь

$$\varphi'\left(t\right)=\alpha\nu\left(t\right)+\Phi_2\left(t\right),\ \ 0<t<1, \tag{6}$$

где

$$\Phi_2\left(t\right)=\left(1+\alpha\right)\int_0^t f_1\left(\xi_1,t\right)d\xi_1+\left(1-\alpha\right)\int_t^1 f_1\left(t,\eta_1\right)d\eta_1. \tag{7}$$

Это есть основное соотношение между $\varphi'\left(t\right)$ и $\nu\left(t\right)$, полученное из гиперболической части области.

4 Вспомогательная параболическая задача

В параболической части области рассмотрим задачу с краевым условием типа Самарского-Ионкина:

Задача SI. *Найти в области Ω_1 решение уравнения теплопроводности*

$$u_x-u_{yy}=f(x,y),$$

удовлетворяющее классическим начально-краевым условиям

$$u|_{AA_0}=0,\quad u_y|_{A_0B_0}=0 \tag{8}$$

и нелокальному краевому условию

$$u\left(t,0\right)-u\left(t,1\right)=\varphi\left(t\right),\ \ \ 0\leq t\leq 1. \tag{9}$$

Очевидно, что необходимым условием существования решения является естественное условие согласования $\varphi\left(0\right)=0$. В дальнейшем его будем считать выполненным. Эта задача впервые была предложена А.А. Самарским, в начале 70-х годов XX века. Задача возникла при моделировании нелинейной нестационарной теории неустойчивости в токовой плазме при малом превышении порога (параметрической неустойчивой плазмы). Математически задача была решена Н.И. Ионкиным [11], а в более общей постановке Н.И. Ионкиным и Е.И. Моисеевым [12]. В связи с этим, краевые задачи такого вида называют задачами Самарского-Ионкина. В [13] рассмотрена задача для обыкновенного дифференциального оператора с возмущенными краевыми условиями Самарского-Ионкина. Система собственных функций задачи полна, но образует базиса. На основе этой системы построен новый базис и показано его применение для решения методом разделения переменных задач для уравнений в частных производных. Очевидно, что решение задачи F в параболической части области может быть представлено в виде решения задачи SI при специальном выборе граничной функции $\varphi\left(x\right)$. Считая эту функцию известной, построим соотношение между $\nu\left(x\right)=\frac{\partial u}{\partial y}\left(x,0\right)$ и $\varphi\left(x\right)$. Имеет место

Лемма. *Пусть $\varphi\left(0\right)=0$, а $u\left(x,y\right)$ - решение задачи SI. Тогда имеет место соотношение*

$$\nu\left(x\right)=-\int_0^x k\left(x-t\right)\varphi'\left(t\right)dt+\Phi_1\left(x\right),\ \ 0<x<1, \tag{10}$$

где

$$k\left(x-t\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi\left(x-t\right)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{n^2}{4\left(x-t\right)}\Big\}, \tag{11}$$

$$\Phi_1\left(x\right)=\int_0^x dx_1\int_0^1 G_0\left(x-x_1,y_1\right)f\left(x_1,y_1\right)dy_1, \tag{12}$$

$$G_0\left(x,y\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(y+n\right)\exp\Big\{-\frac{\left(y+n\right)^2}{4x}\Big\}. \tag{13}$$

Доказательство. Решение задачи SI представим в виде

$$u\left(x,y\right)=C\left(x,y\right)+S\left(x,y\right), \tag{14}$$

где $C\left(x,y\right)$ и $S\left(x,y\right)$ - четные и нечетные по переменной y на интервале $(0,1)$ части функции $u\left(x,y\right)$:

$$2C\left(x,y\right)=u\left(x,y\right)+u\left(x,1-y\right),\ \ 2S\left(x,y\right)=u\left(x,y\right)-u\left(x,1-y\right). \tag{15}$$

Не трудно убедиться в том, что функции $C\left(x,t\right)$ и $S\left(x,t\right)$ являются в области Ω решениями уравнений теплопроводности:

$$C_x\left(x,y\right)-C_{yy}\left(x,y\right)=f_0\left(x,y\right), \tag{16}$$

$$S_y\left(x,y\right)-S_{yy}\left(x,y\right)=f_1(x,y), \tag{17}$$

и удовлетворяют однородным начальным условиям

$$C\left(0,y\right)=0,\quad 0\leq y\leq 1, \tag{18}$$

$$S\left(0,y\right)=0,\quad 0\leq y\leq 1, \tag{19}$$

где $2f_0\left(x,y\right)=f\left(x,y\right)+f\left(x,1-y\right)$, $2f_1\left(x,y\right)=f\left(x,y\right)-f\left(x,1-y\right)$. Найдем краевые условия по переменной y, которым на границе области Ω удовлетворяют функции $C\left(x,y\right)$ и $S\left(x,y\right)$. Подчиняя функцию (14) краевым условиям (8), (9), с учетом соотношений (15), получаем:

$$S\left(x,0\right)=\frac{1}{2}\varphi\left(x\right),\ \ S\left(x,1\right)=-\frac{1}{2}\varphi(x),\ \ 0\leq x\leq 1, \tag{20}$$

$$C_y\,(x,0) = S_y\,(x,0)\,, \quad C_y\,(x,1) = -S_y\,(x,0)\,, \quad 0 \le x \le 1, \tag{21}$$

Таким образом, для построения решения задачи SI получаем две (более простые) задачи, которые нужно решить последовательно. Сначала решаем задачу для $S\,(x,y)$. Это первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности (17) с однородным начальным условием (19) и неоднородными краевыми условиями Дирихле (20). Это классическая задача, ее решение существует и единственно. Оно может быть построено с помощью функции Грина первой начально-краевой задачи.

Имея решение $S\,(x,y)$, решаем вторую задчу для $C\,(x,y)$. Это вторая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности (16) с однородным начальным условием (18) и неоднородными краевыми условиями Неймана (21). Это также классическая задача, ее решение существует и единственно. Оно также может быть построено с помощью функции Грина второй начально-краевой задачи.

Легко видеть, что

$$\nu\,(x) = \frac{\partial u}{\partial y}\,(x,0) = \left(\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial y}\right)(x,0) = 2S_y\,(x,0)\,. \tag{22}$$

Поэтому для получения соотношения (10) достаточно решить задачу (17), (19), (20) для $S\,(x,y)$. Это первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Ее функция Грина имеет вид [14, с. 197]:

$$G\,(x,y,y_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left\{-\frac{(y-y_1+2n)^2}{4x}\right\} - \exp\left\{-\frac{(y+y_1+2n)^2}{4x}\right\}\right]. \tag{23}$$

Поэтому для решения задачи (17), (19), (20) имеет место представление

$$S\,(x,y) = \int_0^x dx_1 \int_0^1 G\,(x-x_1,y,y_1)\, f_1\,(x_1,y_1)\, dy_1 +$$

$$+ \int_0^x G_{y_1}\,(x-x_1,y,0)\, S\,(x_1,0)\, dx_1 - \int_0^x G_{y_1}\,(x-x_1,y,1)\, S\,(x_1,1)\, dx_1.$$

Отсюда, с учетом краевых условий (20) и явного вида (23) функции Грина, непосредстенным вычислением получаем

$$S\,(x,y) = \int_0^x dx_1 \int_0^1 G\,(x-x_1,y,y_1)\, f_1\,(x_1,y_1)\, dy_1 + \frac{1}{2}\int_0^x G_0\,(x-x_1,y)\,\varphi(x_1) dx_1, \tag{24}$$

где G_0 определяется по формуле (13). Интегрированием по частям, с учетом условия $\varphi\,(0) = 0$, второе слагаемое в (24) представим в виде

$$\frac{1}{2}\int_0^x G_0\,(x-x_1,y)\,\varphi(x_1) dx_1 = \frac{1}{2}\int_0^x G_1\,(x-x_1,y)\,\varphi'(x_1) dx_1, \tag{25}$$

где

$$G_1\,(x-x_1,y) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^{\frac{y+n}{2\sqrt{(x-x_1)}}} e^{-z^2} dz + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\frac{y+n}{2\sqrt{(x-x_1)}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz.$$

Теперь непосредственным вычислением из (24), с учетом (25), получаем

$$S_y(x,0)=\int_0^x dx_1\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial y}(x-x_1,y,y_1)\Big|_{y=0} f_1(x_1,y_1)\,dy_1-\frac{1}{2}\int_0^x k(x-t)\,\varphi'(t)\,dt,$$

где $k(x-t)$ определяется по формуле (11). Первое слагаемое представляем в виде

$$\int_0^x dx_1\int_0^1 \left\{\frac{\partial G}{\partial y}(x-x_1,y,y_1)\Big|_{y=0}-\frac{\partial G}{\partial y}(x-x_1,y,1-y_1)\Big|_{y=0}\right\} f(x_1,y_1)\,dy_1.$$

Для него непосредственным вычислением находим, что

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x-x_1,y,y_1)\Big|_{y=0}-\frac{\partial G}{\partial y}(x-x_1,y,1-y_1)\Big|_{y=0}=G_0(x-x_1,y_1).$$

Суммируя полученное, с учетом (22), приходим к формуле (10). Лемма доказана. Формула (10) дает основное соотношение между $\nu(x)$ и $\varphi(x)$, получаемое из параболической части области.

5 Основное интегральное уравнение

Исключая $\nu(x)$ из соотношений (6) и (10), получаем для $\varphi'(x)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi'(x)+\alpha\int_0^x k(x-t)\,\varphi'(t)\,dt=\Phi(x),\qquad \Phi(x)=\alpha\Phi_1(x)+\Phi_2(x). \tag{26}$$

Таким образом, задача F эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода (26). Заметим, что полученное интегральное уравнение совпадает (за исключением правой части уравнения и коэффициента перед интегральным оператором) с интегральными уравнениями, возникающими при решении локальных краевых задач Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа. Методы решения таких интегральных уравнений широко известны.

Также необходимо отметить, что наиболее простым случаем является $\alpha=0$. При этом из (26) сразу отпределяется значение $\varphi'(x)$ и решение задачи F строится в явном виде.

В общем же случае, так как ядро $k(x)$ представимо в виде

$$k(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}+\tilde{k}(x),$$

где $\tilde{k}(x)\in C^\infty[0,1]$, то $k(x)$ – ядро со слабой особенностью. Поэтому существует единственное сильное решение уравнения (26) и оно имеет вид

$$\varphi'(x)=\Phi(x)+\int_0^x \Gamma(x-t)\,\Phi(t)\,dt, \tag{27}$$

где $\Gamma(x)$ – резольвента уравнения (26):

$$\Gamma(x) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j(x), \quad K_1(x) = -\alpha k(x),$$

$$K_{j+1}(x) = \int_0^x K_1(x-t) K_j(t)\, dt, \quad j \in N.$$

Из (27) легко убедиться в справедливости оценки

$$\|\varphi'(x)\|_{L_2(0,1)} \leq c_1 \|\Phi(x)\|_{L_2(0,1)},$$

а из (7) и (12) находим, что

$$\|\Phi(x)\|_{L_2(0,1)} \leq c_2\, \|f\|_0.$$

Таким образом, получаем оценку

$$\|\varphi'(x)\|_{L_2(0,1)} \leq c\, \|f\|_0. \tag{28}$$

6 Построение решения задачи F

Из (27), с учетом $\varphi(0) = 0$, после несложных преобразований получим

$$\varphi(x) = \int_0^x \Gamma_1(x-t)\,\Phi(t)\, dt, \quad \Gamma_1(x) = 1 + \int_0^x \Gamma(t)\, dt. \tag{29}$$

Теперь решение задачи F восстанавливается в области Ω_1, как решение задачи SI с граничной функцией $\varphi(x)$ из (29). По построенному в области Ω_1 решению находим $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Поэтому в области Ω_2 для решение задачи F однозначно восстанавливается, как решение задачи Коши по формуле Даламбера (5).

Отсюда и из свойств решения первой начально - краевой задачи для уравнения теплопроводности следует, что решение задачи F принадлежит $H^1(\Omega) \cap H^{1,2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ и, как следствие оценки (28), удовлетворяет неравенству (4).

Покажем, что найденное решение будет сильным. Так как $C^1_0\left(\overline{\Omega}\right)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует последовательность функций $f_n \in C^1_0\left(\overline{\Omega}\right)$ таких, что $\|f_n - f\| \to 0, \;\; n \to \infty$. Обозначим $u_n = L^{-1} f_n$.

При $f_n \in C^1_0\left(\overline{\Omega}\right)$ нетрудно видеть, что $\Phi_n(x) \in C^1[0,1]$. Поэтому уравнение (27) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в пространстве $C^1[0,1]$. Следовательно, $\varphi'_n(x) \in C^1[0,1]$. Отсюда $u_n(x,0) \in C^2[0,1]$, $\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,0) \in C^1[0,1]$. Из свойств решений первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности и задачи Коши для волнового уравнения, получаем, что $u_n \in W$ для всех $f_n \in C^1_0\left(\overline{\Omega}\right)$.

В силу неравенства (4) имеем

$$\|u_n - u\|_1 \leq c\|f_n - f\|_0 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $\{u_n\}$ – есть последовательность, отвечающая определению сильного решения. Поэтому задача F сильно разрешима для любой правой части f, и сильное решение принадлежит классу $H^1(\Omega) \cap H^{1,2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$. Теорема доказана.

7 Заключение

В работе предложена новая нелокальная краевая задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что нелокальные краевые условия связывают значения искомой функции на частях границы параболической и гиперболической областей. В отличие от работ других авторов, в предлагаемой новой постановке гиперболическая часть области совпадает с характеристическим треугольником.

Задача редуцирована к интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода. При этом полученное уравнение аналогично интегральным уравнениям, возникающим при решении задач Трикоми (которые можно считать классическими).

Доказана однозначная сильная разрешимость сформулированной задачи. Полученный результат позволяет в дальнейшем рассмотреть спектральную задачу с таким нелокальным краевым условием, наподобии исследований спектральных свойств задачи Трикоми [15 - 17].

8 Благодарности

В заключение авторы выражают признательность Т.Ш. Кальменову, Б.Е. Кангужину и всем участникам Общегородского научного семинара "Дифференциальные операторы и их приложения" за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0825/ГФ4.

Литература

[1] *Капустин Н.Ю.* Об обобщенной разрешимости задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 274, № 6. – С. 1294 – 1298.

[2] *Капустин Н.Ю.* Существование и единственность L_2–решения задачи Трикоми для одного параболо-гиперболического уравнения // Доклады АН СССР. – 1986. – Т. 291, № 2. – С. 288 – 292.

[3] *Бердышев А.С.* Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов. – Алматы. – 2015. – 224 с.

[4] *Франкль Ф.И.* О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Серия математика. — 1945. – Т. 9, № 2. – С. 121 – 142.

[5] *Франкль Ф.И.* Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уклонения. – Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, № 2. – С. 196 – 202.

[6] *Рахманова Л.Х.* Решение нелокальной задачи спектральным методом для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной // Известия вузов. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 36 – 40.

[7] *Сабитов К.Б., Рахманова Л.Х.* Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т.44, № 9. – С. 1175 – 1181.

[8] *Сабитов К.Б.* Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. – 2011. – Т. 89, №4. – С. 596 – 602.

[9] *Моисеев Е.И., Нефедов П.В., Холомеева А.А.* Аналоги задач Трикоми и Франкля в трехмерных областях для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 12. – С. 1677 – 1680.

[10] *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

[11] *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т.13, № 2. – С. 294 – 304.

[12] *Ионкин Н.И., Моисеев Е.И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т.15, № 7. – С. 1284 – 1295.

[13] *Dildabek G., Tengayeva A.A.* Constructing a basis from systems of eigenfunctions of one not strengthened regular boundary value problem // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2015. – № 1(84). – С. 36 – 44.

[14] *Бабич В.М. и др. Под. ред. СГ Михлина.* Справочная математическая библиотека. Линейные уравнения математической физики. – М.: Наука. – 1964.

[15] *Садыбеков М.А., Тойжанова Г.Д.* Спектральные свойства одного класса краевых задач для параболо-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 176 – 179.

[16] *Бердышев А.С.* О вольтерровости некоторых задач с условиями типа Бицадзе – Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения // Сибирский математический журнал. – 2005. – Т. 46, №3. — С. 500 – 510.

[17] *Ахтаева Н.С., Каримов Э.Т.* О краевой задаче с условием сопряжения интегрального вида для смешанного параболо - гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2013. – № 2(77). – С. 64 – 70.

References

[1] *Kapustin N.Yu.* A generalized solvability of Tricomi problem for parabolic-hyperbolic equation // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1984. – T. 274, № 6. – C. 1294 – 1298.

[2] *Kapustin N.Yu.* The existence and uniqueness of L_2–solutions of Tricomi problem for a parabolic-hyperbolic equation // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1986. – T. 291, № 2. – C. 288 – 292.

[3] *Berdyshev A.S.* Kraevye zadachi i ih spektral'nye svoistva dlya uravneniya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo i smeshanno-sostavnogo tipov. – Almaty. – 2015. – 224 p. (in Russ.).

[4] *Frankl F.* To the theory of the Laval nozzle // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. — 1945. – T. 9, № 2. – P. 121 – 142.

[5] *Frankl F.I.* Subsonic flow about a profile with a supersonic zone // Prikl. Mat. Mekh. – 1956. – T. 20, № 2. – P. 196 – 202.

[6] *Rakhmanova L.Kh.* Solution of a nonlocal problem for a mixed-type parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain by the spectral method // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. – 2007. – № 11 (546). – P. 36 – 40.

[7] *Sabitov K.B., Rakhmanova L.K.* Initial-boundary value problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type in a rectangular domain // Differential Equations. – 2008. – T.44, № 9. – P. 1175 – 1181.

[8] *Sabitov K.B.* Nonlocal Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation in a Rectangular Domain // Mat. Zametki. – 2011. – T. 89, №4. – P. 596 – 602.

[9] *Moiseev E.I., Nefedov P.V., Kholomeeva A.A.* Analogs of the Tricomi and Frankl problems for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in three-dimensional domains // Differential Equations. – 2014. – T. 50, № 12. – C. 1677 – 1680.

[10] *Nakhushev A.M.* Problems with displacements for partial differential equations. -– Nauka, Moscow. — 2006.

[11] *Ionkin N.I.* Solution of a boundary value problem with non-classical boundary condition in heat conduction theory // Differential Equations. – 1977. – T.13, № 2. – P. 294 – 304.

[12] *Ionkin N.I., Moiseev E.I.* A problem for the heat conduction equation with two-point boundary condition // Differential Equations. – 1979. – T.15, № 7. – P. 1284 – 1295.

[13] *Dildabek G., Tengayeva A.A.* Constructing a basis from systems of eigenfunctions of one not strengthened regular boundary value problem // BVestnik KazNU, ser. mat., meh., inf. – 2015. – № 1(84). – P. 36 – 44.

[14] *Babich V.M. et al., Mihlin S.G. Ed.* Linear equations of mathematical physics // Ref. Math. Library. – Nauka, Moscow. – 1964.

[15] *Sadybekov M.A., Toizhanova G.D.* Spectral properties of a class of boundary value problems for a parabolic-hyperbolic equation // Differential Equations. – 1992. – T. 28, № 1. – P. 176 – 179.

[16] *Berdyshev A.S.* The volterra property of some problems with the Bitsadze–Samarskii-type conditions for a mixed parabolic-hyperbolic equation // Sibirsk. Mat. Zh. – 2005. – T. 46, №3. — P. 500 – 510.

[17] *Akhtaeva N.S., Karimov E.T.* A boundary value problem with adjointing condition of integral type for mixed parabolic - hyperbolic equations with non-characteristic line type change // Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf. – 2013. – № 2(77). – P. 64 – 70.