1-бөлім Математика | Раздел 1 Математика | Section 1 Matematics

УДК 517

Бекмаганбетов К.А., Төлеуғазы Е.*

КФ МГУ им. М.В. Ломоносова, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева,
Республика Казахстан, г. Астана
* E-mail: erzhan1996@yandex.ru

Интерполяционные свойства анизотропных пространств Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ и теоремы вложения

В статье изучаются интерполяционные свойства анизотропных пространств Никольского-Бесова относительно анизотропной интерполяции $\mathbf{A}_{\theta\mathbf{q}}$, где $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \leq \infty$. Показано, что в случае $-\infty < \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \infty$ и $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n), \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \leq \infty$, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ пространства Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ являются ретрактом пространств $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))$, и соотвествующая интерполяционная теорема вытекает из интерполяционных свойств анизотропных пространств $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(A)$. В качестве следствия описаны интерполяционные свойства анизотропных пространств Соболева с доминирующей смешанной производной $W_{\mathbf{pr}}^{\alpha}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$. Во второй части работы доказано неравенство разных метрик Никольского для тригонометрических полиномов со спектром из параллелепипедов в анизотропных пространствах Лоренца $L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$. На основе данного неравенства и интерполяционных теорем получены теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ и анизотропных пространств Лоренца $L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$. Соотношения, связывающие параметры пространств $\alpha, \mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, то есть $\alpha = (\mathbf{1}/\mathbf{p} - \mathbf{1}/\mathbf{q})$ являются предельными и неулучшаемыми. Полученные теоремы обобщают соответствующие результаты из работ Бекмаганбетова К.А. и Нурсултанова Е.Д., полученные для случая $\mathbf{d} = (1, \ldots, 1)$.

Ключевые слова: анизотропные пространства Никольского-Бесова, анизотропные пространства Лоренца, вложение, ректракт, неравенство разных метрик.

Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Ye.

Interpolation properties of anisotropic $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ Nikol'skii-Besov spaces and embedding theorems

In this paper we study interpolation properties of anisotropic spaces of Nikol'skii-Besov with respect to the anisotropic interpolation $\mathbf{A}_{\theta\mathbf{q}}$, where $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \leq \infty$. It shows that in the case $-\infty < \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \infty$ and $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n), \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \leq \infty$, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ the Nikol'skii-Besov spaces $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ are the retract spaces $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))$, and corresponding interpolation theorem follows from the interpolation properties of anisotropic $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(A)$ spaces. The interpolation properties of anisotropic Sobolev spaces $W_{\mathbf{pr}}^{\alpha}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ with dominant mixed derivative are described as a corollary. In the second part of the work the Nikol'skii inequality of different metrics for trigonometric polinomials with the spectrum from parallelepipeds in the anisotropic Lorentz spaces $L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ is proved. On the basis of the inequality and interpolation theorems the embedding theorems for anisotropic Nikol'skii-Besov spaces $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ and anisotropic Lorentz spaces $L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ are obtained. The relations, which connect the spaces parameters $\alpha, \mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$, i.e. $\alpha = (\mathbf{1}/\mathbf{p} - \mathbf{1}/\mathbf{q})$ are the limiting. This relations also can not be improved. The obtained theorems generalize the corresponding results from the works of K.A. Bekmaganbetov and E.D. Nursultanov for the case $\mathbf{d} = (1, \ldots, 1)$.

Key words: anisotropic Nikol'skii-Besov spaces, anisotropic Lorentz spaces, embedding, retract, inequality of different metrics.

Бекмағанбетов Қ.А., Төлеуғазы Е.

Никольский-Бесов $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ анизотроптық кеңістіктерінің қасиеттері және ену теоремалары

Бұл мақалада анизотропты $\mathbf{A}_{\theta\mathbf{q}}$ интерполяцияға қатысты анизотропты Никольский-Бесов кеңістіктерінің интерполяциялық қасиеттері зерттеледі, мұнда $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \leq \infty$. Параметрлер $-\infty < \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \infty$ және $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n), \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \leq \infty$, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ болған жағдайда $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ Никольский-Бесов кеңістіктері $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))$ кеңістіктерінің ректракты болатындығы, және сәйкес интерполяциялық теорема $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(A)$ анизотроптық кеңістіктерінің интерполяциялық қасиеттерінен шығатыны көрсетілген. Салдар ретінде үстем аралас туындысы бар анизотропты $W_{\mathbf{pr}}^{\alpha}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ Соболев кеңістігінің интерполяциялық қасиеттері сипатталды. Жұмыстың екінші бөлігінде спектры анизотропты $L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ Лоренц кеңістігіндегі параллелепипедтерден тұратын тригонометриялық полиномдар үшін Никольскийдің әр түрлі метрикалық теңсіздігі дәлелденді. Осы теңсіздік және интерполяциялық теоремалар негізінде анизотропты $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ Никольский-Бесов кеңістіктері және анизотропты $L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ Лоренц кеңістіктері үшін ену теоремалары алынды. Кеңістіктерді байланыстыратын параметрлер қатынастары $\alpha, \mathbf{p}$ және $\mathbf{q}$, яғни, $\alpha = (\mathbf{1}/\mathbf{p} - \mathbf{1}/\mathbf{q})$ шекті және жақсартылмайтын болады. $\mathbf{d} = (1, \ldots, 1)$ жағдайы үшін алынған теоремалар Бекмағанбетов Қ.А. және Нұрсұлтанов Е.Д. жұмыстарында алынған сәйкес нәтижелерді жалпылайды.

Түйін сөздер: Никольский-Бесов анизотроптық кеңістіктері, Лоренц анизотроптық кеңістіктері, ену, ректракт, әр түрлі метрикалық теңсіздіктер.

1 Введение

Теория вложения пространств дифференцируемых функций берет начало с работы С.Л. Соболева [1]. Эта теория изучает важные связи и соотношения дифференциальных (гладкостных) свойств функций в различных метриках. Дальнейшее развитие данной теории связано с новыми классами функциональных пространств С.М. Никольского [2], О.В. Бесова [3], П.И. Лизоркина [4], Х. Трибеля [5] и других и определялось как собственной внутренней проблематикой, так и ее приложениями в теории краевых задач математической физики [6] – [8].

Настоящая работа посвящена исследованию интерполяционных свойств анизотропных пространств Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$, которые имеют гибридный характер, смесь обычных пространств и пространств со "смешанной гладкостью".

Перейдем к краткому описанию работы. В разделе 2 приведены необходимые определения и вспомогательные результаты. В разделе 3 определены анизотропные пространства Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$, изучены их интерполяционные свойства относительно метода анизотропной интерполяции. В разделе 4 на основе неравенств разных метрик для тригонометрических полиномов и интерполяционных теорем получены предельные теоремы вложения между анизотропными пространствами Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ и анизотропными пространствами Лоренца $L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$.

2 Необходимые определения и вспомогательные результаты

Пусть $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$, тогда $\mathbb{T}^{\mathbf{d}} = \{\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) : \mathbf{x}_i \in [0, 2\pi)^{d_i}, i = 1, \ldots, n\}$.

Пусть $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ измеримая в $\mathbb{T}^{\mathbf{d}}$ функция. Через $f^*(\mathbf{t}) = f^{*_1, \ldots, *_n}(t_1, \ldots, t_n)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки к функции $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ последовательно по мультипеременным $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ при фиксированных остальных переменных.

Пусть мультииндексы $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ такие, что если $1 \leq p_i < \infty$, то $1 \leq r_i \leq \infty$, если же $p_i = \infty$, то и $r_i = \infty$, $i = 1, \dots, n$.

Анизотропным пространством Лоренца $L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ [9] назовем множество функций, для которых конечна следующая величина

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} =$$

$$= \left(\int_0^{(2\pi)^{d_n}} \left(t_n^{1/p_n} \dots \left(\int_0^{(2\pi)^{d_1}} \left(t_1^{1/p_1} f^{*_1,\dots,*_n}(t_1,\dots,t_n) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n}.$$

При $r_i = \infty$ выражение $\left(\int_0^{(2\pi)^{d_i}} |f(t_i)|^{r_i} \frac{dt_i}{t_i} \right)^{1/r_i}$ понимается как $\sup\limits_{0 \leq t < 2\pi} |f(t_i)|$.

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon_i = 1, i = 1, \dots, n\}$ – вершины n-мерного единичного куба в $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ – семейство банаховых пространств, являющихся подпространствами некоторого линейного хаусдорфова пространства, которое называется совместимым семейством банаховых пространств [10]. Для элемента a пространства $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$ определим функционал

$$K(\mathbf{t}, a; \mathbf{A}) = \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{t}^\varepsilon \|a_\varepsilon\|_{A_\varepsilon},$$

где $t^\epsilon = t_1^{\epsilon_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{\epsilon_n}$.

Пусть $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$. Через $\mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}} = (A_\varepsilon; \varepsilon \in E)_{\theta\mathbf{r}}$ обозначим линейное подмножество множества $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$, для элементов которого верно

$$\|a\|_{\mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}}} = \left(\int_0^\infty \left(t_n^{-\theta_n} \dots \left(\int_0^\infty \left(t_1^{-\theta_1} K(\mathbf{t}, a; \mathbf{A}) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n} < \infty.$$

Лемма 1 ([9]) *Пусть $\mathbf{0} < \theta < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < \mathbf{r} \leq \infty$, $\mathbf{A} = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}, \mathbf{B} = \{B_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ – два совместимых семейства банаховых пространств. Если найдутся два вектора $\mathbf{M_0} = (M_1^0, \dots, M_n^0), \mathbf{M_1} = (M_1^1, \dots, M_n^1)$ с положительными компонентами такие, что для линейного оператора имеет место $T : \mathbf{A}_\varepsilon \to \mathbf{B}_\varepsilon$ с оценкой нормы $C_\varepsilon \prod\limits_{i=1}^n M_i^{\varepsilon_i}$ для любого $\varepsilon \in E$, то*

$$T : \mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}} \to \mathbf{B}_{\theta\mathbf{r}},$$

с нормой $\|T\|_{\mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}} \to \mathbf{B}_{\theta\mathbf{r}}} \leq \max\limits_{\varepsilon \in E} C_\varepsilon \prod\limits_{i=1}^n \left(M_i^0 \right)^{1-\theta_i} \left(M_i^1 \right)^{\theta_i}$.

Для мультииндексов $\mathbf{b}_0 = (b_1^0, \dots, b_n^0), \mathbf{b}_1 = (b_1^1, \dots, b_n^1)$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$ введем обозначение $\mathbf{b}_\varepsilon = (b_1^{\varepsilon_1}, \dots, b_n^{\varepsilon_n})$.

Лемма 2 ([9]) *а) Пусть* $\mathbf{1} \le \mathbf{p_0} = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \mathbf{p_1} = (p_1^1, \dots, p_n^1) \le \infty$, $\mathbf{1} \le \mathbf{r_0} = (r_1^0, \dots, r_n^0), \mathbf{r_1} = (r_1^1, \dots, r_n^1) \le \infty$. *Тогда для* $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \le \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \le \infty$ *справедливо равенство*

$$\left(L_{\mathbf{p}_\varepsilon \mathbf{r}_\varepsilon}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}); \varepsilon \in E\right)_{\theta \mathbf{q}} \hookrightarrow L_{\mathbf{pq}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}),$$

где $\mathbf{1}/\mathbf{p} = (\mathbf{1} - \theta)/\mathbf{p_0} + \theta/\mathbf{p_1}$.
б) Пусть $\mathbf{1} \le \mathbf{p_0} = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \mathbf{p_1} = (p_1^1, \dots, p_n^1) \le \infty$. *Тогда для* $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \le \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \le \infty$ *справедливо равенство*

$$\left(L_{\mathbf{p}_\varepsilon}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}); \varepsilon \in E\right)_{\theta \mathbf{q}} = L_{\mathbf{pq}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}),$$

где $\mathbf{1}/\mathbf{p} = (\mathbf{1} - \theta)/\mathbf{p_0} + \theta/\mathbf{p_1}$ *и* $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ *- пространство Лебега со смешанной метрикой*

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} = \left(\int_{\mathbb{T}^{d_n}} \left(\dots \left(\int_{\mathbb{T}^{d_1}} |f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n|^{p_1} d\mathbf{x}_1\right)^{p_2/p_1} \dots\right)^{p_n/p_{n-1}} d\mathbf{x}_n\right)^{1/p_n} < \infty.$$

Лемма 3 *Пусть* $\alpha_1 < \alpha < \alpha_0$, $1 \le q \le \infty$. *Для последовательности неотрицательных чисел* $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ *определим преобразования*

$$I_0(a; j) = \sum_{k=-\infty}^{j} 2^{\alpha_0(k-j)} a_k, \tag{1}$$

$$I_1(a; j) = \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{\alpha_1(k-j)} a_k. \tag{2}$$

Тогда справедливы неравенства

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha j} I_0(a; j)\right)^q\right)^{1/q} \le C_1 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha j} a_j\right)^q\right)^{1/q}, \tag{3}$$

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha j} I_1(a; j)\right)^q\right)^{1/q} \le C_2 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha j} a_j\right)^q\right)^{1/q}. \tag{4}$$

Доказательство. Докажем неравенство (3). Выберем число κ_0 так, что $\alpha < \kappa_0 < \alpha_0$. Тогда применяя неравество Гельдера и изменяя порядок суммирования получаем

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha j} I_0(a; j)\right)^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha j} \sum_{k=-\infty}^{j} 2^{\alpha_0(k-j)} a_k\right)^q\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{(\alpha-\alpha_0)j} \sum_{k=-\infty}^{j} 2^{(\alpha_0-\kappa_0)k + \kappa_0 k} a_k\right)^q\right)^{1/q} \le$$

$$\leq \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{(\alpha-\alpha_0)qj} \left(\sum_{k=-\infty}^{j} 2^{(\alpha_0-\kappa_0)q'k} \right)^{q/q'} \sum_{k=-\infty}^{j} \left(2^{\kappa_0 k} a_k\right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= C \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{(\alpha-\kappa_0)qj} \sum_{k=-\infty}^{j} 2^{\kappa_0 qk} a_k^q \right)^{1/q} = C \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\kappa_0 qk} a_k^q \sum_{j=k}^{\infty} 2^{(\alpha-\kappa_0)qj} \right)^{1/q} =$$

$$= C_1 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha j} a_j\right)^q \right)^{1/q}.$$

Неравенство (3) доказано.

Докажем неравенство (4). Выберем число κ_1 так, что $\alpha_1 < \kappa_1 < \alpha$. Тогда также как и в предыдущем случае получаем

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha j} I_1(a;j)\right)^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha j} \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{\alpha_0(k-j)} a_k \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{(\alpha-\alpha_1)j} \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{(\alpha_1-\kappa_1)k+\kappa_1 k} a_k \right)^q \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{(\alpha-\alpha_1)qj} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{(\alpha_1-\kappa_1)q'k} \right)^{q/q'} \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(2^{\kappa_1 k} a_k\right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= C \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{(\alpha-\kappa_1)qj} \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{\kappa_1 qk} a_k^q \right)^{1/q} = C \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\kappa_1 qk} a_k^q \sum_{j=-\infty}^{k-1} 2^{(\alpha-\kappa_1)qj} \right)^{1/q} =$$

$$= C_2 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha j} a_j\right)^q \right)^{1/q}.$$

Неравенство (4) доказано.

Лемма полностью доказана.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \leq \infty$. Через $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(A)$ мы будем обозначать мультипоследовательность $\{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^n}$ со значениями в A, для которой конечна норма

$$\|a\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(A)} = \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \left(2^{(\alpha,\mathbf{k})} \|a_{\mathbf{k}}\|_A\right)^{\mathbf{q}} \right)^{\mathbf{1/q}},$$

здесь $(\alpha, k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_j$.

Теорема 1 *Пусть* $\alpha_0 = (\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0) \neq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1)$, $\varepsilon \in E$, $\alpha_\varepsilon = (\alpha_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \alpha_n^{\varepsilon_n})$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q}_\varepsilon = (q_1^{\varepsilon_1}, \ldots, q_n^{\varepsilon_n}) \leq \infty$. *Тогда для* $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \leq \infty$ *справедливо равенство*

$$\left(l_{\mathbf{q}_\varepsilon}^{\alpha_\varepsilon}(A); \varepsilon \in E\right)_{\theta\mathbf{q}} = l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(A),$$

где $\alpha = (\mathbf{1} - \theta)\alpha_{\mathbf{0}} + \theta\alpha_{\mathbf{1}}$.

Доказательство. *Шаг 1.* В силу вложений

$$l^{\alpha}_{\mathbf{1}}(A) \hookrightarrow l^{\alpha}_{\mathbf{q}}(A) \hookrightarrow l^{\alpha}_{\infty}(A),$$

достаточно доказать вложения

$$(l^{\alpha_\varepsilon}_{\infty}(A); \varepsilon \in E)_{\theta\mathbf{q}} \hookrightarrow l^{\alpha}_{\mathbf{q}}(A), \tag{5}$$

и

$$l^{\alpha}_{\mathbf{q}}(A) \hookrightarrow (l^{\alpha_\varepsilon}_{\mathbf{1}}(A); \varepsilon \in E)_{\theta\mathbf{q}}, \tag{6}$$

где $\alpha = (\mathbf{1} - \theta)\alpha_{\mathbf{0}} + \theta\alpha_{\mathbf{1}}$.

Шаг 2. Докажем вложение (5). Если $a = \{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \in l^{\alpha_{\mathbf{1}}}_{\infty}(A)$, то

$$K(\mathbf{t}, a; l^{\alpha_\varepsilon}_{\infty}(A); \varepsilon \in E) = \inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon\in E} \mathbf{t}^{\varepsilon} \|a_\varepsilon\|_{l^{\alpha_\varepsilon}_{\infty}(A)} =$$

$$= \inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon\in E} \mathbf{t}^{\varepsilon} \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})} \left\|a^{(\varepsilon)}_{\mathbf{k}}\right\|_A = \inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon\in E} \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \mathbf{t}^{\varepsilon} 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})} \left\|a^{(\varepsilon)}_{\mathbf{k}}\right\|_A \geq$$

$$\geq \inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon\in E} \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} (\mathbf{t}^{\varepsilon} 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})}) \left\|a^{(\varepsilon)}_{\mathbf{k}}\right\|_A = \inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E} a_\varepsilon} \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(\mathbf{t}^{\varepsilon} 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})}\right) \sum_{\varepsilon\in E} \left\|a^{(\varepsilon)}_{\mathbf{k}}\right\|_A \geq$$

$$\geq \inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E} a_\varepsilon} \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(\mathbf{t}^{\varepsilon} 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})}\right) \left\|\sum_{\varepsilon\in E} a^{(\varepsilon)}_{\mathbf{k}}\right\|_A = \inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E} a_\varepsilon} \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(\mathbf{t}^{\varepsilon} 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})}\right) \|a_{\mathbf{k}}\|_A =$$

$$= \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(\mathbf{t}^{\varepsilon} 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})}\right) \|a_{\mathbf{k}}\|_A .$$

Так как $\alpha_0 > \alpha_1$, то $\mathbb{R}^n_+$ можно разбить на параллелепипеды вида $\left[2^{(\alpha_0-\alpha_1)(\mathbf{j}-\mathbf{1})}; 2^{(\alpha_0-\alpha_1)\mathbf{j}}\right)$, $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n$. Тогда

$$\|a\|_{(l^{\alpha_\varepsilon}_{\infty}(A);\varepsilon\in E)_{\theta\mathbf{q}}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \left(\mathbf{t}^{-\theta} K(\mathbf{t}, a; l^{\alpha_\varepsilon}_{\infty}(A); \varepsilon \in E)\right)^{\mathbf{q}} \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{t}}\right)^{\mathbf{1/q}} \geq$$

$$\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \left(\mathbf{t}^{-\theta} \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(\mathbf{t}^{\varepsilon} 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})}\right) \|a_{\mathbf{k}}\|_A\right)^{\mathbf{q}} \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{t}}\right)^{\mathbf{1/q}} =$$

$$= \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \int_{2^{(\alpha_0-\alpha_1)(\mathbf{j}-\mathbf{1})}}^{2^{(\alpha_0-\alpha_1)\mathbf{j}}} \left(\mathbf{t}^{-\theta} \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(\mathbf{t}^{\varepsilon} 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})}\right) \|a_{\mathbf{k}}\|_A\right)^{\mathbf{q}} \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{t}}\right)^{\mathbf{1/q}} \geq$$

$$\geq C_1 \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \left(2^{-(\theta(\alpha_0-\alpha_1),\mathbf{j})} \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(2^{(\varepsilon(\alpha_0-\alpha_1),\mathbf{j})+(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})}\right) \|a_{\mathbf{k}}\|_A\right)^{\mathbf{q}}\right)^{\mathbf{1/q}} =$$

$$= C_1 \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \left(\sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(2^{((\varepsilon-\theta)(\alpha_0-\alpha_1),\mathbf{j})+(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})}\right) \|a_{\mathbf{k}}\|_A\right)^{\mathbf{q}}\right)^{\mathbf{1/q}} =$$

$$= C_1 \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \left(\sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(2^{((\varepsilon-\theta)(\alpha_0-\alpha_1)+\alpha_\varepsilon,\mathbf{j})+(\alpha_\varepsilon,(\mathbf{k}-\mathbf{j}))} \right) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \right)^{\mathbf{1/q}}.$$

Так как для любого $\varepsilon \in E$ выполняется равенство

$$(\varepsilon-\theta)(\alpha_0-\alpha_1)+\alpha_\varepsilon = (\varepsilon-\theta)(\alpha_0-\alpha_1)+(\mathbf{1}-\varepsilon)\alpha_0+\varepsilon\alpha_1 =$$

$$= (\mathbf{1}-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1 = \alpha,$$

то далее получаем

$$\|a\|_{(l_\infty^{\alpha_\varepsilon}(A);\varepsilon\in E)_{\theta\mathbf{q}}} \geq C_1 \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \left(\sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(2^{(\alpha,\mathbf{j})+(\alpha_\varepsilon,(\mathbf{k}-\mathbf{j}))} \right) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \right)^{\mathbf{1/q}} =$$

$$= C_1 \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \left(2^{(\alpha,\mathbf{j})} \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(2^{(\alpha_\varepsilon,(\mathbf{k}-\mathbf{j}))} \right) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \right)^{\mathbf{1/q}} \geq$$

$$\geq C_1 \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \left(2^{(\alpha,\mathbf{j})} \|a_{\mathbf{j}}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \right)^{\mathbf{1/q}} = C_1 \|a\|_{l_{\mathbf{q}}^\alpha(A)}.$$

Последнее неравенство означает вложение (5).

Шаг 3. Докажем вложение (6). Пусть $a = \{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \in l_{\mathbf{q}}^\alpha(A)$. Далее

$$K(\mathbf{t},a;l_{\mathbf{1}}^{\alpha_\varepsilon}(A);\varepsilon\in E) = \inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon\in E} \mathbf{t}^\varepsilon \|a_\varepsilon\|_{l_{\mathbf{1}}^{\alpha_\varepsilon}(A)} =$$

$$= \inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon\in E} \mathbf{t}^\varepsilon \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})} \left\| a_{\mathbf{k}}^{(\varepsilon)} \right\|_A = \inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon\in E} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})} \left\| a_{\mathbf{k}}^{(\varepsilon)} \right\|_A \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})} \right) \|a_{\mathbf{k}}\|_A,$$

здесь мы положили $a_{\mathbf{k}}^{(\varepsilon)} = a_{\mathbf{k}}$ для того ε, которому соответствует $\min\limits_{\varepsilon\in E} \left(\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})} \right)$.

Так как и на шаге 2, получаем, что

$$\|a\|_{\left(l_{\mathbf{1}}^{\alpha_\varepsilon};\varepsilon\in E\right)_{\theta\mathbf{q}}} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\mathbf{t}^{-\theta} K(\mathbf{t},a;l_{\mathbf{1}}^{\alpha_\varepsilon}(A);\varepsilon\in E) \right)^{\mathbf{q}} \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{t}} \right)^{\mathbf{1/q}} \leq$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\mathbf{t}^{-\theta} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})} \right) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{t}} \right)^{\mathbf{1/q}} =$$

$$= \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \int_{2^{(\alpha_0-\alpha_1)(\mathbf{j}-\mathbf{1})}}^{2^{(\alpha_0-\alpha_1)\mathbf{j}}} \left(\mathbf{t}^{-\theta} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})} \right) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{t}} \right)^{\mathbf{1/q}} \leq$$

$$\leq C_2 \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \left(2^{-(\theta(\alpha_0-\alpha_1),\mathbf{j})} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(2^{(\varepsilon(\alpha_0-\alpha_1),\mathbf{j})+(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})} \right) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \right)^{\mathbf{1/q}} =$$

$$= C_2 \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \left(2^{(\alpha-\alpha_0,\mathbf{j})} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(2^{(\varepsilon(\alpha_0-\alpha_1),\mathbf{j})+(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k})} \right) \|a_\mathbf{k}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \right)^{\mathbf{1/q}} =$$

$$= C_2 \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \left(2^{(\alpha,\mathbf{j})} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon\in E} \left(2^{(\alpha_\varepsilon,\mathbf{k}-\mathbf{j})} \right) \|a_\mathbf{k}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \right)^{\mathbf{1/q}} =$$

$$= C_2 \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \left(2^{(\alpha,\mathbf{j})} \sum_{\varepsilon\in E} I_\varepsilon(\|a\|_A;\mathbf{j}) \right)^{\mathbf{q}} \right)^{\mathbf{1/q}} \le C_2 \sum_{\varepsilon\in E} \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \left(2^{(\alpha,\mathbf{j})} I_\varepsilon(\|a\|_A;\mathbf{j}) \right)^{\mathbf{q}} \right)^{\mathbf{1/q}},$$

где $I_\varepsilon(\|a\|_A;\mathbf{j}) = I_{\varepsilon_n}(\dots I_{\varepsilon_1}(\|a\|_A;\mathbf{j}))$ – композиция преобразований (1) и (2).

Далее используя неравенства Минковского, (3) и (4) получаем

$$\|a\|_{\left(l_{\mathbf{1}}^{\alpha_\varepsilon};\varepsilon\in E\right)_{\theta\mathbf{q}}} \le C_2 \sum_{\varepsilon\in E} \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \left(2^{(\alpha,\mathbf{j})} I_\varepsilon(\|a\|_A;\mathbf{j}) \right)^{\mathbf{q}} \right)^{\mathbf{1/q}} =$$

$$= C_2 \sum_{\varepsilon\in E} \left(\sum_{j_{i_n}=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha_{i_n} j_{i_n}} \dots \left(\sum_{j_{i_1}=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha_{i_1} j_{i_1}} \times \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. \times I_{\varepsilon_{i_n}} \left(\dots I_{\varepsilon_{i_1}}(\|a\|_A;\mathbf{j}) \right) \right)^{q_{i_1}} \right)^{q_{i_2}/q_{i_1}} \dots \right)^{q_{i_n}/q_{i_{n-1}}} \right)^{1/q_{i_n}} \le$$

$$\le C_2 \sum_{\varepsilon\in E} \left(\sum_{j_{i_n}=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha_{i_n} j_{i_n}} I_{\varepsilon_{i_n}} \left(\dots \left(\sum_{j_{i_1}=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha_{i_1} j_{i_1}} \times \right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left. \times \dots I_{\varepsilon_{i_1}}(\|a\|_A;\mathbf{j}) \right)^{q_{i_1}} \right)^{q_{i_2}/q_{i_1}} \dots \right) \right)^{q_{i_n}} \right)^{1/q_{i_n}} \le$$

$$\le C_3 \sum_{\varepsilon\in E} \left(\sum_{j_{i_n}=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha_{i_n} j_{i_n}} \dots \left(\sum_{j_{i_1}=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha_{i_1} j_{i_1}} \|a_{j_1,\dots,j_n}\|_A \right)^{q_{i_1}} \right)^{q_{i_2}/q_{i_1}} \dots \right)^{q_{i_n}/q_{i_{n-1}}} \right)^{1/q_{i_n}} =$$

$$= C_4 \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} \left(2^{(\alpha,\mathbf{j})} \|a_\mathbf{j}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \right)^{\mathbf{1/q}} = C_4 \|a\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(A)}.$$

Последнее неравенство означает вложение (6).

Теорема доказана полностью.

3 Интерполяция анизотропных пространств Никольского-Бесова

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \le \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \le \infty$ и $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \le \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \le \infty$.

Для тригонометрического ряда $f \sim \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{d}}} a_{\mathbf{k}} e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle_{\mathbf{d}}}$ обозначим через

$$\Delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} a_{\mathbf{k}} e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle_{\mathbf{d}}},$$

где $\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}\rangle_{\mathbf{d}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d_i} k_j^i x_j^i$ – скалярное произведение, а $\rho(\mathbf{s}) = \{\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbf{d}} : \left[2^{s_i-1}\right] \le \max_{j=1,\dots,d_i} |k_j^i| < 2^{s_i}, i = 1, \dots, n\}$.

По аналогии с [9], [11] анизотропным пространством Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ назовем множество рядов $f \sim \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{d}}} a_{\mathbf{k}} e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle_{\mathbf{d}}}$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} = \left\|\left\{\|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})}\right\}\right\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}}.$$

Замечание 1 *Определенное таким образом анизотропное пространство Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ в случае $n = 1$ совпадает с изотропным пространством типа Никольского-Бесова $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^{d_1})$ [8, 10], а в случае $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$ – с анизотропным пространством с доминирующей смешанной производной типа Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$ [12].*

Определение 1 *Пусть A и B – два нормированных банаховых пространства. Оператор $R \in L(A, B)$ называется ретракцией, если существует оператор $S \in L(B, A)$, такой, что*

$$RS = E \quad (\textit{тождественный оператор из } L(B, B)).$$

При этом оператор S называется коретракцией (соответствующей R).

Лемма 4 *Пусть $-\infty < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ и $\mathbf{1} \le \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n), \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \le \infty$. Тогда пространство $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ является ретракцией пространства $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))$.*

Доказательство. *Шаг 1.* Для функции $f \in B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ определим оператор S следующим образом

$$Sf = \{\Delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\}_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}_+^n} = \{(\Delta_{\mathbf{s}} * f)(\mathbf{x})\}_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}_+^n},$$

здесь $\Delta_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$ – ядро Дирихле, соответствующее блоку $\rho(\mathbf{s})$.

Тогда согласно определения имеем

$$\|Sf\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))} = \|\{\Delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot)\}\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))} = \|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})},$$

что означает выполнение S–свойства.

Шаг 2. Для последовательности $f = \{f_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\}_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}_+^n}$ определим оператор

$$Rf = \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}_+^n} (\Delta_{\mathbf{s}} * f_{\mathbf{s}})(\mathbf{x}).$$

Тогда согласно неравенства М. Рисса об ограниченности параллелепипедных частичных сумм, получим

$$\|\Delta_{\mathbf{m}} * f\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \leq C \|f\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})},$$

где C – абсолютная постоянная, и далее

$$\|Rf\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} = \|\{(\Delta_{\mathbf{s}} * f_{\mathbf{s}}) * \Delta_{\mathbf{s}}\}\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))} =$$

$$= \|\{\Delta_{\mathbf{s}} * f_{\mathbf{s}}\}\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))} \leq C \|\{f_{\mathbf{s}}\}\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))} =$$

$$= C \|f\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))}.$$

Последнее неравенство означает выполнение R–свойства.

Шаг 3. Покажем, что $RS = E$. Действительно

$$RSf(\mathbf{x}) = R\left(\{\Delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x})\}\right) = \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}_+^n} \left(\Delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x}) * \Delta_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\right) =$$

$$= \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}_+^n} \left(\left(S_{2^{\mathbf{s}}} - S_{2^{\mathbf{s}-\mathbf{1}}}\right) * f\right)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

Лемма полностью доказана.

Теорема 2 *Пусть* $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n) < \infty$, $-\infty < \alpha_{\mathbf{0}} = (\alpha_1^0,\ldots,\alpha_n^0) < \alpha_{\mathbf{1}} = (\alpha_1^1,\ldots,\alpha_n^1) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_n), \mathbf{q_0} = (q_1^0,\ldots,q_n^0), \mathbf{q_1} = (q_1^1,\ldots,q_n^1) \leq \infty$, $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in E$. *Тогда для* $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n) < \mathbf{1}$ *и* $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1,\ldots,q_n) \leq \infty$ *справедливо равенство*

$$\left(B_{\mathbf{pr}}^{\alpha_\varepsilon \mathbf{q}_\varepsilon}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}); \varepsilon \in E\right)_{\theta\mathbf{q}} = B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}),$$

где $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$.

Доказательство следует из леммы 4 и теоремы 1. □

Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_n) \leq \infty$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ и $I = (i_1,\ldots,i_n)$, $i_j \in \{1,\ldots,d_j\}$ для всех $j = 1,\ldots,n$. Анизотропным пространством Соболева $W_{\mathbf{pr}}^{\alpha}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ назовем множество тригонометрических рядов $f \sim \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{d}}} a_{\mathbf{k}} e^{i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle_{\mathbf{d}}}$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{W_{\mathbf{pr}}^{\alpha}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} = \sum_I \left\|\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{d}}} \Lambda_{\mathbf{k}}(I) a_{\mathbf{k}} e^{i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle_{\mathbf{d}}}\right\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})},$$

здесь $\Lambda_{\mathbf{k}}(I) = \prod_{j=1}^{n} \max\left(1, |k_{i_j}^j|^{\alpha_j}\right)$.

Следствие 1 *Пусть* $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_n) \leq \infty$, $-\infty < \alpha_{\mathbf{0}} = (\alpha_1^0,\ldots,\alpha_n^0) < \alpha_{\mathbf{1}} = (\alpha_1^1,\ldots,\alpha_n^1) < \infty$, $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in E$. *Тогда для* $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n) < \mathbf{1}$ *и* $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1,\ldots,q_n) \leq \infty$ *справедливо равенство*

$$\left(W_{\mathbf{pr}}^{\alpha_\varepsilon}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}); \varepsilon \in E\right)_{\theta\mathbf{q}} = B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}),$$

где $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$.

Доказательство следует из теоремы 2 и вложений $B^{\alpha\mathbf{1}}_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow W^{\alpha}_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow B^{\alpha\infty}_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$. $\square$

Замечание 2 *Интерполяционные свойства изотропных пространств Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля были изучены в работах И. Асекритовой, Н. Кругляка, Л. Малигранда, Л. Николовой и Л.-Е. Персона [14], К.А. Бекмаганбетова и Е.Д. Нурсултанова [15], В.Л. Крепкогорского [16, 17], Д. Петре [18], К.А. Бекмаганбетова [19] и других авторов.*

4 Теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского-Бесова и Лоренца

В данном разделе получены предельные теоремы вложения разных метрик для анизотропных пространств Никольского-Бесова и анизотропных пространств Лоренца.

Лемма 5 (Неравенство разных метрик) *Пусть* $T_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$ *тригонометрический полином порядка не выше* $\mathbf{s} = (s^1_1, \ldots, s^1_{d_1}; \ldots; s^n_1, \ldots, s^n_{d_n})$ *по мультипеременной* $\mathbf{x} = (x^1_1, \ldots, x^1_{d_1}; \ldots; x^n_1, \ldots, x^n_{d_n})$. *Тогда при* $\mathbf{1} < \mathbf{p_1} = (p^1_1, \ldots, p^1_n) \leq \mathbf{p_2} = (p^2_1, \ldots, p^2_n) < \infty$, $\mathbf{0} < \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \leq \infty$ *имеет место неравенство*

$$\|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p_2 r}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \leq C \prod_{\{i:\, p^1_i < p^2_i\}} \prod_{j=1}^{d_i} \left(s^i_j\right)^{1/p^1_i - 1/p^2_i} \|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p_1 r}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})}, \tag{7}$$

где C*- положительная постоянная, не зависящая от* $\mathbf{s}$.

Доказательство. Из условия леммы мультииндексы $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{p_1}}$ и $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{p_2}}$ принадлежат открытому параллелепипеду $(0;1)^n$. Следовательно, существует параллелепипед $Q_h(\mathbf{0})$ с центром в нуле такой, что $Q_h(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p_1}}) \subset (0;1)^n$ и $Q_h(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p_2}}) \subset (0;1)^n$, здесь сторона h зависит только от параметров $\mathbf{p_1}$ и $\mathbf{p_2}$. Отметим, что для вершин $\left\{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}^{\varepsilon}_{\mathbf{1}}}\right\}_{\varepsilon\in\mathbf{E}}$ и $\left\{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}^{\varepsilon}_{\mathbf{2}}}\right\}_{\varepsilon\in\mathbf{E}}$ параллелепипедов $Q_h(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p_1}})$ и $Q_h(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p_2}})$ имеет место равенство

$$\frac{1}{p^{\varepsilon}_1} - \frac{1}{p^{\varepsilon}_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}, \quad \varepsilon \in E.$$

Из неравенства разных метрик для пространств Лебега со смешанной метрикой для тригонометрических полиномов имеют место

$$\|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p}^{\varepsilon}_{\mathbf{2}}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \leq C_1 \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{d_i} \left(s^i_j\right)^{1/p^1_i - 1/p^2_i} \|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p}^{\varepsilon}_{\mathbf{1}}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})}, \quad \varepsilon \in E,$$

где C_1 – абсолютная постоянная.

Далее согласно предыдущего неравенства и теоремы М. Рисса об ограниченности частичных сумм в пространстве Лебега со смешанной метрикой получаем

$$\|S_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{p}^{\varepsilon}_{\mathbf{2}}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \leq C_1 \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{d_i} \left(s^i_j\right)^{1/p^1_i - 1/p^2_i} \|S_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{p}^{\varepsilon}_{\mathbf{1}}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \leq$$

$$\leq C_2 \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{d_i} \left(s_j^i\right)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|f\|_{L_{\mathbf{p}_1^{\varepsilon}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})}, \quad \varepsilon \in E.$$

Применяя леммы 1 и 2 б) к оператору $S_{\mathbf{s}}(f)$ получаем

$$\|S_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{p_2 r}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \leq C \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{d_i} \left(s_j^i\right)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|f\|_{L_{\mathbf{p_1 r}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})}.$$

Для доказательства точности в смысле порядка неравенства (7) достаточно рассмотреть полиномы $T_{\mathbf{s}}^{(\beta)}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} T_{s_i}^{(\beta_i)}(x_i)$, где $T_{s_i}^{(\beta_i)}(x_i) = \sum_{k_i=1}^{s_i} \frac{\cos k_i x_i}{k_i^{\beta_i}}$, так как согласно теоремы Харди-Литтлвуда в пространствах Лоренца $L_{pr}\left(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}\right)$ [12] при $\beta_i \neq 1/p'_i$ имеем

$$\left\|T_{\mathbf{s}}^{(\beta)}\right\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} = \prod_{i=1}^{n} \left\|T_{s_i}^{(\beta_i)}\right\|_{L_{p_i r_i}(\mathbb{T})} \sim \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{l_i=1}^{s_i} l_i^{(1/p'_i - \beta_i) r_i - 1} \right)^{1/r_i} \sim \prod_{i=1}^{n} s_i^{1/p'_i - \beta_i}.$$

Замечание 3 *Аналогично доказывается следующий вариант неравенства разных метрик. Пусть выполнены условия предыдущей леммы. Тогда справедливо неравенство*

$$\|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p_2 r}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \leq C \prod_{\{i:\, p_i^1 < p_i^2\}} \prod_{j=1}^{d_i} \left(s_j^i\right)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p_1}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})}, \tag{8}$$

где C- положительная постоянная, не зависящая от $\mathbf{s}$.

Теорема 3 *Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n), \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \leq \infty$. Тогда при $\alpha = (\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}})\mathbf{d}$ имеет место вложение*

$$B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}).$$

Доказательство. Согласно неравенства Минковского и неравенства разных метрик (7) получим

$$\|f\|_{L_{\mathbf{qr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} = \left\| \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\infty} \Delta_{\mathbf{k}}(f) \right\|_{L_{\mathbf{qr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\infty} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{qr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \leq \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\infty} 2^{\left(\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}\right)\mathbf{d}, \mathbf{k}\right)} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} = \|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{1}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})},$$

где $\alpha = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}\right)\mathbf{d}$.

Таким образом, при $\alpha = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}\right)\mathbf{d}$ справедливо вложение

$$B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{1}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow L_{\mathbf{qr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}).$$

Зафиксируем $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ и подберем параметры $\alpha_i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$ и $\mathbf{q}_i = (q_1^i, \ldots, q_n^i)$ так, что $\alpha_j^i = \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j^i}\right) d_j$, $i = 0, 1$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда для любого $\varepsilon \in E$ имеем, что

$$B_{\mathbf{pr}}^{\alpha_\varepsilon \mathbf{1}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow L_{\mathbf{q}_\varepsilon \mathbf{r}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}).$$

Согласно леммы 2 а) и теоремы 2 получаем

$$\left(B_{\mathbf{pr}}^{\alpha_\varepsilon \mathbf{1}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}); \varepsilon \in E\right)_{\theta,\tau} \hookrightarrow \left(L_{\mathbf{q}_\varepsilon \mathbf{r}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}); \varepsilon \in E\right)_{\theta,\tau}$$

или

$$B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}),$$

где $\alpha = (\mathbf{1} - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{1} - \theta}{\mathbf{q}_0} + \frac{\theta}{\mathbf{q}_1}$.

Проверим соотношение между параметрами α, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$

$$\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 = (1-\theta)\left(\frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}_0}\right)\mathbf{d} + \theta\left(\frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}_1}\right)\mathbf{d} =$$

$$= \left(\frac{1-\theta}{\mathbf{p}} + \frac{\theta}{\mathbf{p}}\right)\mathbf{d} - \left(\frac{1-\theta}{\mathbf{q}_0} + \frac{\theta}{\mathbf{q}_1}\right)\mathbf{d} = \left(\frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}}\right)\mathbf{d}.$$

Теорема 4 *Пусть* $\mathbf{1} < \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) < \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \le \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n), \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \le \infty$. *Тогда при* $\alpha = (\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}})\mathbf{d}$ *имеет место вложение*

$$L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}).$$

Доказательство. Согласно неравенства разных метрик (8) и теореме М. Рисса об ограниченности параллелепипедных частичных сумм получим

$$\|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\infty}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} = \sup_{\mathbf{k} \ge \mathbf{0}} 2^{(\alpha, \mathbf{k})} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \le$$

$$\le C_1 \sup_{\mathbf{k} \ge \mathbf{0}} 2^{(\alpha + (\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}})\mathbf{d}, \mathbf{k})} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} = C_1 \sup_{\mathbf{k} \ge \mathbf{0}} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \le C_2 \|f\|_{L_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})},$$

так как $\alpha = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}\right)\mathbf{d}$.

Таким образом, при $\alpha = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}\right)\mathbf{d}$ справедливо вложение

$$L_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\infty}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}).$$

Зафиксируем $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ и подберем параметры $\alpha_i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$ и $\mathbf{q}_i = (q_1^i, \ldots, q_n^i)$ так, что $\alpha_j^i = \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j^i}\right) d_j$, $i = 0, 1$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда для любого $\varepsilon \in E$ имеем, что

$$L_{\mathbf{q}_\varepsilon}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow B_{\mathbf{pr}}^{\alpha_\varepsilon \infty}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}).$$

Согласно леммы 2 б) и теоремы 2 получаем

$$\left(L_{\mathbf{q}_\varepsilon}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}); \varepsilon \in E\right)_{\theta,\tau} \hookrightarrow \left(B_{\mathbf{pr}}^{\alpha_\varepsilon \infty}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}); \varepsilon \in E\right)_{\theta,\tau}$$

или

$$L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}),$$

где $\alpha = (\mathbf{1}-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}} = \dfrac{\mathbf{1}-\theta}{\mathbf{q}_0} + \dfrac{\theta}{\mathbf{q}_1}$.

Проверим соотношение между параметрами α, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$

$$\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 = (1-\theta)\left(\frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}_0}\right)\mathbf{d} + \theta\left(\frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}_1}\right)\mathbf{d} =$$

$$= \left(\frac{1-\theta}{\mathbf{p}} + \frac{\theta}{\mathbf{p}}\right)\mathbf{d} - \left(\frac{1-\theta}{\mathbf{q}_0} + \frac{\theta}{\mathbf{q}_1}\right)\mathbf{d} = \left(\frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}}\right)\mathbf{d}.$$

Замечание 4 *Можно показать, что условия теорем 3 и 4 неулучшаемы.*

5 Заключение

В данной работе изучены интерполяционные свойства анизотропных пространств Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ относительно анизотропного метода интерполяции. Как следствие описаны интерполяционные свойства анизотропных пространств Соболева $W_{\mathbf{pr}}^{\alpha}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$.

Также получены предельные теоремы вложения между анизотропными пространствами Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ и Лоренца $L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$.

Отметим, что полученные интерполяционные теоремы и теоремы вложения являются аппаратом исследования для некоторых задач гармонического анализа, теории приближений и теории краевых задач математической физики.

Литература

[1] *Соболев С.* Об одной теоремы функционального анализа // Матем. сб. – 1938. – Т. 4(46), № 3. – С. 471 – 497.

[2] *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их приложение в теории дифференциальных функций многих переменных. // Труды МИАН: Сб. статей, посв. 60-летию акад. И.М.Виноградова. – М.: АН СССР, – Т. 38. – 1951. – С. 244 – 278.

[3] *Бесов О.В.* Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Труды МИАН: Сб. статей, посв. 60-летию акад. М.А.Лаврентьева. – М.: АН СССР, – Т. 60. – 1961. – С. 42 – 81.

[4] *Лизоркин И.П.* Пространства $L_p^r(\Omega)$. Теоремы продолжения и вложения // Докл. АН СССР, –Т. 145. – 1962. – С. 527-530.

[5] *Triebel H.* Spaces of distributions of Besov type on Euclidean n-space. Duality, interpolation // Ark. Mat. – V. 11, № 1–2. – 1973. – P. 13 – 64.

[6] *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука. – 1969.

[7] *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука. – 1975.

[8] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 400 с.

[9] *Нурсултанов Е.Д.* Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Доклады РАН. – 2004. – Т. 394, № 1. – С. 1 – 4.

[10] *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980. – 264 с.

[11] *Bazarkhanov D.B.* Estimates for the widths of classes of periodic functions of several variables - I // Eurasian mathematical journal. — 2010. — V. 1, № 3. — P. 11–26.

[12] *Бекмаганбетов К.А., Нурсултанов Е.Д.* Теоремы вложения анизотропных пространств Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0,2\pi)^n)$ // Известия РАН. Серия математическая. – 2009. – Т. 73, № 4. – С. 3 – 16.

[13] *Нурсултанов Е.Д.* О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p-пространств // Известия РАН. Сер. матем. – 2000. – Т. 64, № 1. – С. 95 – 122.

[14] *Asekritova I., Krugljak N., Maligranda L., Nikolova L. and Persson L.-E.* Lions-Peetre reiteration formulas for triples and their applications // Studia Math. – 2001, – V. 145, – P. 219 – 254.

[15] *Bekmaganbetov K.A. and Nursultanov E.D.* Method of multiparameter interpolation and embedding theorems in Besov spaces $B_{p}^{\bar{\alpha}}[0,2\pi)$ // Analysis Math. – 1998, – V. 24. – P. 241 – 263.

[16] *Krepkogorskii V.L.* Interpolation in Lizorkin-Triebel and Besov spaces // Mat. sbornik. – 1994, – V. 73, № 4. – P. 63 – 76.

[17] *Krepkogorskii V.L.* Realization of interpolation Sparr method in the class of spaces of smooth funtions // Matem. Zametki. – 2001, – V. 70, № 4. – P. 581 – 590.

[18] *Peetre J.* Thoughts on Besov spaces: Lecture notes. – Lund. – 1966.

[19] *Бекмаганбетов К.А.* Теорема интерполяции для пространств $l_q^\sigma(L_{p\tau})$ и $L_{p\tau}(l_q^\sigma)$ // Вестник КазНУ. – 2008, –Т. 56 № 1. – С. 30 – 42.

References

[1] *Sobolev S.* On a theorem of functional analysis. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 34, – 1963, – P. 39 — 68.

[2] *Nikol'skij S.M.* Inequalities for entire functions of finite degree and their application to the theory of differentiable functions of several variables. // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. – V. 80. – 1969. – P. 1 – 38.

[3] *Besov O.V.* Investigation of a family of function spaces in connection with theorems of imbedding and extension // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. – V. 40. – 1964. – P. 85 – 126.

[4] *Lizorkin P.I.* $L_p^r(\Omega)$ spaces. Extension and imbedding theorems // Soviet Math. Dokl., – V. 3. – 1962. – P. 1053-1057.

[5] *Triebel H.* Spaces of distributions of Besov type on Euclidean n-space. Duality, interpolation // Ark. Mat. – V. 11, № 1–2. – 1973. – P. 13 – 64.

[6] *Nikol'skij S.M.* Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. – Springer–Verlag, New York – Heidelberg: Grundlehren Math. Wiss. – V. 205. – 1975.

[7] *Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skij S.M.* Integral representations of functions and imbedding theorems. – V. I, II. – Winston, Washington, DC. Wiley, New York – Toronto, ON – London. – 1979.

[8] *Triebel H.* Interpolation theory, function spaces, differential operators. North–Holland Libruary. – V. 18. North–Holland, Amsterdam – New York – Oxford, 1978.

[9] *Nursultanov E.D.* Interpolation theorems for anisotropic function spaces and their applications // Doklady. Mathematics. 2004, vol. 69, №, pp. 16-19.

[10] *Bergh J. and Löfström J.* Interpolation spaces. An introduction. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 223, Springer-Verlag, Berlin – Hiedelburg – New York 1976.

[11] *Bazarkhanov D.B.* Various representations and equivalent normalizations of Nicol'skii-Besov and Lizorkin-Tribel spaces of the generalized mixed smoothness. Dokl. Akad. nauk. Vol. 402, No. 3, – pp. 298 – 302.

[12] *Bekmaganbetov K.A. and Nursultanov E.D.* Embedding theorems for anisotropic Besov spaces $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0,2\pi)^n)$ // Izvestiya: Mathematics (2009), 73(4):655. – pp. 3 – 16.

[13] *Nursultanov E.D.* On the coefficients of multiple Fourier series from L_p-spaces. (Russian) // Izvestiya: Mathematics (2000), 64: 1, – pp. 93 – 120.

[14] Asekritova I., Krugljak N., Maligranda L., Nikolova L. and Persson L.-E. Lions-Peetre reiteration formulas for triples and their applications // Studia Math. – 2001, – V. 145, – P. 219 – 254.

[15] *Bekmaganbetov K.A. and Nursultanov E.D.* Method of multiparameter interpolation and embedding theorems in Besov spaces $B_{\vec{p}}^{\vec{\alpha}}[0,2\pi)$ // Analysis Math. – 1998, – V. 24. – P. 241 – 263.

[16] *Krepkogorskii V.L.* Interpolation in Lizorkin-Triebel and Besov spaces // Mat. sbornik. – 1994, – V. 73, № 4. – P. 63 – 76.

[17] *Krepkogorskii V.L.* Realization of interpolation Sparr method in the class of spaces of smooth funtions // Matem. Zametki. – 2001, – V. 70, № 4. – P. 581 – 590.

[18] *Peetre J.* Thoughts on Besov spaces: Lecture notes. – Lund. – 1966.

[19] *Bekmaganbetov K.A.* Interpolation theorem for $l_q^\sigma(L_{p\tau})$ and $L_{p\tau}(l_q^\sigma)$ spaces // Vestnik KazNU. – 2008, V. 56, № 1. – P. 30 – 42.