УДК 517.938

Кабидолданова А.А.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: kabasem@mail.ru

К решению задачи выпуклого программирования

В данной работе предлагается подход к решению задачи выпуклого программирования. Характерной особенностью рассматриваемой задачи является то, что ее система ограничений содержит только линейные равенства. Эта особенность является основой для замены в окрестности исследуемой точки нелинейной целевой функции функцией линейной, благодаря чему решение исходной задачи сводится к последовательному решению задач линейного программирования. Полученная задача линейного программирования решается путем корректировки значения целевой функции на множестве допустимых решений и определяются допустимые и оптимальное решения. Далее вычисляются и сравниваются значения исходной целевой функции в найденных допустимых и оптимальной точках и определяется вспомогательное приближение. Следующее приближение определяется как выпуклая комбинация предыдущего и вспомогательного приближений. Следует отметить, что, в отличие от метода множителей Лагранжа, разработанный метод может быть применен и к задачам, для которых соответствующая функция Лагранжа не имеет седловой точки. Работа содержит описание метода, обоснование его сходимости, схемы алгоритмов и результаты экспериментов. Предлагаемый алгоритм сочетает идеи метода условного градиента [1] и метода решения задачи линейного программирования [2].
Ключевые слова: выпуклое программирование, линейные ограничения, линеаризация, допустимое решение, вспомогательное приближение, оптимальное решение, оптимизационная задача.

Kabidoldanova A.A.
On solving convex programming problem

In this paper an algorithm for solving convex programming problem is proposed. The specific feature of the considered problem is that its constraints contain only linear equalities. This feature is a basis for the replacement the nonlinear objective function in the neighbourhood of the tested point by a linear one, due to what solving an original problem is reduced to sequential solving linear programming problems. The obtained linear programming problem is solved by sequential correction the value of an objective function on a set of admissible solutions and an admissible as well as optimal solutions are found. Further values of an original objective function at the found admissible and optimal points are calculated and an auxiliary approach is determined. The next approach is defined as a convex combination of a previous and an auxiliary approaches. Note that unlike the Lagrange multipliers method the developed method is applied to problems with the Lagrange function which hasn't a saddle point. The paper contains a description of the method, a proof of its convergence, schemes of algorithms and experimental results. The proposed algorithm combines ideas of the conditional gradient method [1] and a method for solving linear programming problem [2].
Key words: convex programming, linear constraints, linearization, admissible solution, auxilary appraximation, optimal solution, optimization problem.

Кабидолданова А.А.
Дөңес программалау есбеін шешу туралы

Жұмыста дөңес программалау есебін шешу жолы ұсынылады. Қарастырылып отырған есептің ерекшелігі оның шектеулерінің жүйесі тек сызықты теңдіктерден тұратындығында. Осы ерекшелігі сызықты емес мақсатты функцияны зерттеліп отырған нүктенің маңайында сызықты функциямен ауыстыруға негіз болып табылады. Нәтижесінде қойылған есеп сызықты программалау есептерін шешуге әкелінеді. Алынған есеп сызықты программалау есебі мүмкін болатын шешімдердің жиынында мақсатты функцияның мәнін тү зету аркылы шешіліп, мумкін болатын және тиімді шешімдер табылады. Табылған мү мкін болатын жане тиімді нуктелерде максатты функцияның мәндері есептеліп, көмекші жуықтау анықталады. Келесі жуықтау алдынғы жане көмекші жуықтаулардың комбинациясы ретинде анықталады. Лагранж көбейткіштері адісімен салыстырғанда ұсынылып отырған әдіспен сәйкес Лагранж функциясының қайқы нуктесі жоқ болатын есептерді де шешуге болады. Жұмыста әдістің сипаттамасы, оның жинақталуының дәлелдеуі, алгоритмдер жане эксперименттер нәтижелері келтірілген. ұсынылып отырған алгоритм шартты градиент әдісі [1] және сызықты программалау әдісі [2] идеяларын қамтиды.
Түйін сөздер: дөңес программалау, сызықты шектеулер, линеаризациялау, мумкін болатын шешім, көмекші жуықтау, тиімді шешім, тиімділеу есебі.

1 Введение

Задачи математического программирования находят применение в различных областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных образов действий (программ действий), например, при решении проблем управления и планирования производственных процессов, в проектировании и перспективном планировании, в военном деле и т.д. Раздел математического программирования, где изучаются задачи с нелинейной целевой функцией и (или), когда нелинейна хотя бы одна из функциий системы ограничений, называется нелинейным программированием. Методы нелинейного программирования получили широкое применение при расчете экономически выгодных партий запуска деталей в производство, при определении экономически выгодной партии поставки, поставочного комплекта, размеров запасов, распределении ограниченных ресурсов, размещении производительных сил, в тарном хозяйстве, при решении многих производственно-экономических задач и т.д. Широкий класс задач математического программирования связан с минимизацией выпуклых функций многих переменных, определенных на выпуклом множестве. Такие задачи называют задачами выпуклого программирования. Метод множителей Лагранжа является классическим методом решения задач математического программирования (в частности выпуклого). К сожалению, при практическом применении метода могут встретиться значительные вычислительные трудности, сужающие область его использования [3]. Решение задачи методом Лагранжа получается ценой повышения ее размерности за счет введения неопределенных множителей Лагранжа, число которых равно числу уравнений связи. Поэтому с повышением числа переменных и ограничений целесообразно переходить к численным методам математического программирования. Кроме того, метод множителей Лагранжа сводит решение исходной задачи к поиску седловой точки функции Лагранжа. Однако существуют задачи нелинейного программирования, имеющие решение, но их функция Лагранжа не имеет седловых точек.

За последние годы появилось большое количество работ, посвященных численным методам решения задач математического программирования, основанным на построении модифицированных функций Лагранжа. Метод модифицированных функций Лагранжа позволяет расширить область применения метода множителей Лагранжа и имеет своей целью повысить эффективность вычислительных процессов отыскания седловых точек. Однако, так же как и классический метод множителей Лагранжа, для разрешимых задач, соответствующие модифицированные функции Лагранжа которых не имеет седловых точек, этот метод не применим. Численная реализация метода модифицированных функций Лагранжа связано с вычислением вторых производных, которые не определены всюду для многих известных модифицированных функций Лагранжа [4]. Метод проекции градиента применяют на множестве такого вида, что задача отыскания проекции некоторой точки является достаточно простой с точки зрения ее численной реализации, так как решение этой задачи и определяет направление спуска. В методах штрафных и барьерных функций целевая функция заменяется некоторой обобщенной функцией, значения которой совпадают со значениями исходной функции внутри допустимой области, но при приближении к границе области, а тем более при выходе из нее резко возрастают за счет второго слагаемого обобщенной функции. Поиск точки минимума методами штрафных и барьерных функций усложняется, если экстремум достигается на границе области. Поскольку значения обобщенной функции при приближении к границе области определяются главным образом величиной второго слагаемого, экстремум не всегда может быть вычислен с заданной точностью [3]. Предприняты попытки построить штрафные функции, параметры которых остаются конечными. К сожалению, такие штрафные функции, как правило, оказываются либо недифференцируемыми [5-7], либо лишь локально дифференцируемыми [8]; их использование нередко не позволяет свести решение задачи минимизации с ограничениями к решению задач безусловной минимизации и сопряжено с необходимостью отыскания стационарной, или седловой, точки для заданной штрафной функции [9-14]. Модификация метода логарифмических барьерных функций, основанная на идее параметрического смещения ограничений исходной задачи, предложена в работе [15].

В работе [16] предложен алгоритм учета ограничений равенств, основанный на процедуре рекуррентного псевдообращения для задач с квадратичной целевой функцией. Возможности применения расширенных штрафных функций для регуляризации и оптимальной коррекции задач выпуклого программирования исследованы в [17]. Применение симплекс-метода, основанного на методе жордановых исключений, к решению задачи выпуклого программирования показано в [18].

В данной работе предлагается подход к решению задачи выпуклого программирования, который сочетает идеи метода условного градиента [1] и метода решения задачи линейного программирования [2]. Характерной особенностью рассматриваемой задачи является то, что ее система ограничений содержит только линейные равенства. Эта особенность является основой для замены в окрестности исследуемой точки нелинейной целевой функции функцией линейной, благодаря чему решение исходной задачи сводится к последовательному решению задач линейного программирования.

Известно, что наиболее употребительным алгоритмическим аппаратом линейного программирования является симплекс-метод, разработанный Дж. Данцингом [19]. Симплекс-метод прост как для математического интуитивного понимания, так и для реализации. Недостатком симплекс-метода является его чувствительность к вырожденности задачи, что может привести к бесконечному числу итераций и невозможности построения последовательности управляющих воздействий. Численный метод исследования разрешимости и построения решения задачи линейного программирования, разработанный С.А. Айсагалиевым [2], применим как к вырожденным, так и невырожденным задачам линейного программирования.

2 Постановка задачи

Рассмотрим задачу следующего вида

$$J(u) \to \inf, \tag{1}$$

$$u \in U = \{u \in R^n \;/\; u \in U_0,\ g(u) = Au - b = 0\}, \tag{2}$$

где $J(u) \in C^1(U_0)$ - выпуклая функция, определенная на выпуклом множестве U_0, $b \in R^m$ - заданный вектор, A - заданная матрица порядка $m{\times}n$, $U_0{=}\{u{\in}R^n/u_j{\geq}0,\ \ j{\in}I\}$, $I{\subset}\{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть $u_0 \in U$ - произвольная точка. Определим вспомогательное приближение $\bar{u}_k \in U$, $\ k = 0, 1, 2, ..$ из условия

$$J(\bar{u}_k) = min\{J(u^m_{dk}),\ \ m = 0, 1, 2, ..\}, \tag{3}$$

где u^m_{dk}, $\ m = 0, 1, 2, ..,$ - допустимые решения задачи

$$J_k(u) = \langle J'(u_k), u - u_k\rangle \to \inf,\ \ u \in U. \tag{4}$$

Отметим, что среди допустимых решений u^m_{dk}, $\ m = 0, 1, 2, ..$ задачи (4) содержится и оптимальное ее решение.

Следующее приближение строится по формуле

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k(\bar{u}_k - u_k), \tag{5}$$

здесь α_k определяется из условия

$$f_k(\alpha_k) = minf_k(\alpha),\ \ \alpha \in [0, 1], \qquad f_k(\alpha) = J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k)). \tag{6}$$

3 Определение вспомогательного приближения

Как следует из (3), для определения вспомогательного приближения $\bar{u}_k \in U, k = 0, 1, 2, ..,$ необходимо найти допустимые решения u^m_{dk}, $\ m = 0, 1, 2, ..,$ задачи (4). Допустимыми решениями задачи (4) являются точки множества U.

3.1 Оптимизационная задача

Задача (4) решается [2] путем сведения к задаче следующего вида

$$J_{1k}(u, \gamma) = [J_k(u) - \gamma]^2 + [Au - b]^*[Au - b] \to \inf, \tag{7}$$

$$u \in U_0, \quad \gamma \in \Gamma_k, \qquad \Gamma_k = \{\gamma \in R^1 \;/\; \gamma \leq \gamma_{dk}\}, \tag{8}$$

здесь $\gamma_{dk} = J_k(u_d)$, $u_d \in U$ - произвольная точка.

Рассмотрим задачу (7), (8) для фиксированных значений k и $\gamma = \overline{\gamma}_k \in \Gamma_k$. Теперь задача (7), (8) примет вид

$$F(u) = J_{1k}(u, \overline{\gamma}_k) = [J_k(u) - \overline{\gamma}_k]^2 + [Au - b]^*[Au - b] \to \inf, \tag{9}$$

$$u \in U_0. \tag{10}$$

Лемма 1 *Пусть* $\inf\limits_{u\in U_0} F(u) = F(u_{dk}) = 0$. *Тогда* $u_{dk} \in U_0$ *- допустимое решение задачи (4).*

Доказательство. Пусть $\inf\limits_{u\in U_0} F(u) = F(u_{dk}) = 0$, т.е. $[J_k(u_{dk}) - \overline{\gamma}_k]^2 + [Au_{dk} - b]^*[Au_{dk} - b] = 0$, $\;u_{dk} \in U_0$. Отсюда следует, что $J_k(u_{dk}) = \overline{\gamma}_k$, $Au_{dk} = b$, $\;u_{dk} \in U_0$. Следовательно, $u_{dk} \in U$. Другими словами, u_{dk} - допустимое решение задачи (4). Лемма доказана.

Как следует из леммы 1, для построения допустимых решений задачи (4) необходимо решить задачу (7), (8) для различных значений $\overline{\gamma}_k$ и определить такие значения $(u, \overline{\gamma}_k)$, при которых $\inf\limits_{u\in U_0} J_{1k}(u, \overline{\gamma}_k) = \inf\limits_{u\in U_0} F(u) = 0$. Если $\inf\limits_{u\in U_0} J_{1k}(u, \overline{\gamma}_k) = \inf\limits_{u\in U_0} F(u) > 0$, то не существует точки на множестве U, при которой целевая функция $J_k(u)$ принимает заданное значение $\overline{\gamma}_k$.

3.2 Свойства вспомогательной целевой функции

Лемма 2 *Функция* $F(u)$ *выпукла на выпуклом множестве* U_0.

Доказательство. Отметим, что множество U_0 выпукло, т.е. $\alpha u^1 + (1 - \alpha)u^2 \in U_0$ $\;\forall u_1, u_2 \in U_0$, $\quad \alpha \in [0, 1]$. Функция $F(u) \in C^2(U_0)$, частные производные

$$F'(u) = 2J'(u_k)[J_k(u) - \overline{\gamma}_k] + 2A^*[Au - b],$$

$$F''(u) = 2J'(u_k)(J'(u_k))^* + 2A^*A \geq 0.$$

Тогда согласно критерию выпуклости дважды непрерывно-дифференцируемых на выпуклом множестве функций, функция $F(u)$ выпукла на U_0. Лемма доказана.

Лемма 3 *Производная*

$$F'(u) = 2J'(u_k)[J_k(u) - \overline{\gamma}_k] + 2A^*[Au - b] \tag{11}$$

удовлетворяет условию Липшица на множестве U_0, *т.е.*

$$|F'(u) - F'(v)| \leq L|u - v|, \quad \forall u, v \in U_0, \qquad L = const > 0. \tag{12}$$

Доказательство. Производная $F'(u)$ может быть представлена в виде $F'(u) = S_k u + d_k$, где $S_k = 2[J'(u_k)(J'(u_k))^* + A^*A]$, $\;d_k = -2[J'(u_k)(J'(u_k))^* u_k + J'(u_k)\overline{\gamma}_k + A^*b]$. Тогда

$$|F'(u) - F'(v)| = |S_k u + d_k - S_k v - d_k| = |S_k(u - v)| \leq L|u - v|,$$

где $L = \|S_k\|$. Лемма доказана.

3.3 Решение оптимизационной задачи

Для решения задачи (9), (10) строим последовательность $\{u_n\}$ на основе формул (11), (12) по следующему правилу

$$u_{n+1} = P_{U_0}[u_n - F'(u_n)], \quad 0 < \varepsilon_0 \le \alpha_n \le \frac{2}{l + 2\varepsilon_1}, \ \ \varepsilon_1 > 0, \tag{13}$$

здесь L - постоянная Липшица из (12).

Теорема 1 *Последовательность $\{u_n\} \subset U_0$ определяется по формуле (13), множество $M(u_0)$=$\{u{\in}U_0/F(u){\le}F(u_0)\}$ ограничено. Тогда:*

1) последовательность $\{u_n\} \subset M(u_0)$ является минимизирующей, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = F_* = \inf_{u\in U_0} F(u);$$

2) последовательность $\{u_n\} \subset U_0$ сходится к множеству U_{0*}, $U_{0*} \neq \emptyset$, т.е. $u_n \to u_*$, при $n \to \infty$, $u_* \in U_{0*}$;

3) справедлива оценка скорости сходимости

$$0 \le F(u_n) - F_* \le \frac{c^2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{n}, \tag{14}$$

где $c = \sup\limits_{u\in M(u_0)} |F'(u)| + \dfrac{1}{\varepsilon_0}\bar{d}$, $\quad \bar{d}$ *- диаметр множества* $M(u_0)$.

Доказательство. Поскольку $u_{n+1} \in U_0$ является проекцией точки $u_n - \alpha_n F(u_n) \in R^n$, то $\langle u_{n+1} - u_n + \alpha_n F'(u_n),\ u - u_{n+1}\rangle \ge 0$, $\forall u,\ u \in U_0$. Отсюда получим

$$\langle F'(u_n), u - u_{n+1}\rangle \ge \frac{1}{\alpha_n}\langle u_n - u_{n+1}, u - u_{n+1}\rangle,\ \forall u,\ u \in U_0,\ n = 0,1,2,\dots. \tag{15}$$

Поскольку функция $F(u) \in C^{1,1}(U_0)$, то справедливо неравенство

$$F(u_n) - F(u_{n+1}) \ge \langle F'(u_n), u_n - u_{n+1}\rangle - \frac{L}{2}|u_n - u_{n+1}|^2,\ \forall u_n, u_{n+1} \in U_0. \tag{16}$$

Из (15), (16), с учетом неравенства $0 \le \varepsilon_0 \le \alpha_n \le 2/(L + 2\varepsilon_1)$, имеем

$$F(u_n) - F(u_{n+1}) \ge (\frac{1}{\alpha_n} - \frac{L}{2})|u_n - u_{n+1}|^2 \ge \varepsilon_1 |u_n - u_{n+1}|^2, \tag{17}$$

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \forall u_n, u_{n+1} \in U_0,\ n = 0,1,2,\dots.$$

Из (17) следует, что числовая последовательность $\{F(u_n)\}$ строго убывает, и она сходится в силу того, что функция $F(u) \ge 0$, $\forall u$, $u \in U_0$ ограничена снизу. Тогда $\lim\limits_{n\to 0}[F(u_n) - F(u_{n+1})] = 0$ и из (17) имеем $|u_n - u_{n+1}|{\to}0$ при $n{\to}\infty$. Множество $M(u_0)$ – компактно, $\{u_n\} \subset M(u_0)$ в силу того, что $F(u_{n+1}) < F(u_n) < \cdots < F(u_1) \le F(u_0)$, где $u_0 \in V-$ начальная точка для последовательности $\{u_n\} \subset U_0$. Множество $U_{0*} \subset M(u_0)$

и функция $F(u)$ достигает нижней грани на множестве $M(u_0)$. Следовательно, $U_{0*} \neq \emptyset$. Легко убедиться в том, что множество $M(u_0)$ выпукло.

Покажем, что последовательность $\{u_n\} \subset M(u_0)$ минимизирующая. Поскольку функция $F(u) \in C^1(M(u_0))$ выпукла на выпуклом множестве $M(u_0)$, то необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$F(u) - F(\varpi) \geq \langle F'(\varpi), u - \varpi \rangle, \ \forall u, \varpi \in M(u_0).$$

Отсюда следует

$$F(\varpi) - F(u) \leq \langle F'(\varpi), \varpi - u \rangle, \ \forall u, \varpi \in M(u_0). \tag{18}$$

Из (18), в частности, когда $u = u_* \in M(u_0)$, $\varpi = u_n \in M(u_0)$, имеем

$$0 \leq F(u_n) - F(u_*) \leq \langle F'(u_n), u_n - u_* \rangle = \langle F'(u_n), u_n - u_{n+1} \rangle - \langle F'(u_n), u_{n+1} - u_* \rangle \leq$$

$$\leq \langle F'(u_n), u_n - u_{n+1} \rangle - \frac{1}{\alpha_n} \langle u_n - u_{n+1}, u_* - u_{n+1} \rangle,$$

в силу неравенства (15). Следовательно

$$0 \leq a_n = F(u_n) - F(u_*) \leq \langle F'(u_n) - \frac{1}{\alpha_n}(u_* - u_{n+1}), u_n - u_{n+1} \rangle \leq$$

$$\leq |F'(u_n) - \frac{1}{\alpha_n}(u_* - u_{n+1})||u_n - u_{n+1}| \leq (\sup_{u \in M(u_0)} |F'(u)| + \frac{\overline{d}}{\varepsilon_0})|u_n - u_{n+1}| = c|u_n - u_{n+1}|.$$

Так как по доказанному $|u_n - u_{n+1}| \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} F(u_n) = F_*$. Это означает, что последовательность $\{u_n\}$ является минимизирующей и в силу компактности множества $M(u_0)$ и непрерывности $F(u)$ на $M(u_0)$ все предельные точки $\{u_n\} \subset M(u_0)$ принадлежат множеству $U_{0*} \subset M(u_0)$. Из неравенств $0 \leq a_n = F(u_n) - F_* \leq c|u_n - u_{n+1}|$, $F(u_n) - F(u_{n+1}) \geq \varepsilon_1 |u_n - u_{n+1}|^2$ следует оценка (14). Теорема доказана.

3.4 Алгоритм построения вспомогательного приближения

1. Вводятся точности вычислений $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$;

2. Вводится точка $u_k \in U$;

3. Выбирается произвольно элемент множества U, обозначим его через u_{dk}^0. Вычисляется значение $\gamma_{dk} := J_k(u_{dk}^0) = \langle J'(u_k), u_{dk}^0 - u_k \rangle$;

4. Определяется шаг $\Delta\gamma$ (например можно выбрать $\Delta\gamma := |\gamma_{dk}|/2$. Если $\gamma_{dk} = 0$, то $\Delta\gamma := 1$);

5. $b := \gamma_{dk}, \ \ i = 0, \ \ m = 1$;

6. Задается значение $\overline{\gamma}_k := b - \Delta\gamma$ и решается задача (9), (10); В результате определяется $\inf\limits_{u \in U_0} F(u) = F(u_{dk}) = F_*$.

7. Если $F_* > \varepsilon$, то $i := i + 1$, $a = \overline{\gamma}_k$;
   Если же $F_* \leq \varepsilon$, то $b := \overline{\gamma}_k, \quad m = m + 1, \ \ u_{dk}^m := u_{dk}$;
   Если $i > 0$, то $\Delta\gamma := (b - a)/2$;
8. Если $\Delta\gamma > \delta$, то переходим к шагу 5;
9. Вычисляются значения $J(u_{dk}^m), m = 1, 2, ...$ и определяется $J(u_{dk}^*) = \min\limits_{m=1,2,...} J(u_{dk}^m)$;
   $\overline{u}_k := u_{dk}^*$ - вспомогательное приближение.

4 Сходимость последовательности

Итак, вспомогательное приближение $\bar{u}_k \in U, \ \ k = 0, 1, 2, ..$ строится по изложенному выше алгоритму (см. п.3.4), а шаг метода $\alpha_k \ \ k = 0, 1, 2, ..,$ может быть определен с использованием одного из методов минимизации функции одной переменной. Тогда по правилу (5) вычисляется каждый элемент последовательности $\{u_k\}$. Следующая теорема отвечает на вопрос о сходимости данной последовательности к решению исходной задачи (1), (2).

Теорема 2 *Если функция $J(u) \in C^{1,1}(U_0)$ выпукла на U_0, последовательность $\{u_k\}$ определяется по формуле (5), (6), (3), то последовательность $\{u_k\}$ является минимизирующей и любая ее предельная точка принадлежит множеству U_*. Справедлива оценка*

$$J(u_k) - J_* \leq \frac{c}{n}, \ \ n = 0, 1, 2, .., \tag{19}$$

Доказательство.

$$J(u_k) - J(u_{k+1}) \geq J(u_k) - J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k)) \geq \alpha\langle J'(u_k), \bar{u}_k - u_k\rangle - \frac{\alpha^2}{2}L|\bar{u}_k - u_k|^2 =$$

$$= \alpha J_k(\bar{u}_k) - \frac{\alpha^2}{2}L|\bar{u}_k - u_k|^2 \geq \alpha \inf_{u\in U} J_k(u) - \frac{\alpha^2}{2}L|\bar{u}_k - u_k|^2 =$$

$$= \alpha J_k(\bar{u}_k^*) - \frac{\alpha^2}{2}LD^2 \geq \alpha|J_k(\bar{u}_k^*)| - \frac{\alpha^2}{2}LD^2 \tag{20}$$

так как $J_k(\bar{u}_k^*) \leq 0 = J_k(u_k)$ в силу того, что $J_k(\bar{u}_k^*) = \inf\limits_{u\in U} J_k(u) \leq J_k(u), \ \forall u \in U$.

Из соотношений (20) имеем

$$0 \leq |J_k(\bar{u}_k^*)| \leq \frac{\alpha}{2}LD^2 + \frac{J(u_k) - J(u_{k+1})}{\alpha}, \qquad 0 < \alpha \leq 1, \ \ n = 0, 1, 2, .. \tag{21}$$

Заметим, что поскольку $f_k(\alpha_k) \leq f_k(\alpha), \ \ 0 \leq \alpha \leq 1$, то $f_k(\alpha_k) \leq f_k(0)$. Так как $f_k(\alpha_k) = J(u_{k+1}), \ \ f_k(0) = J(u_k)$, то имеет место неравенство $J(u_{k+1}) \leq J(u_k)$. Значит, последовательность $\{J(u_k)\}$ не возрастает в силу того, что множество $U_* \neq \emptyset, \ \ J(u_k) \geq J_*$. Отсюда следует, что $\{J(u_k)\}$ сходится, т.е. $J(u_k) - J(u_{k+1}) \to 0$ при $k \to \infty$. Теперь, переходя к пределу при $k \to \infty$, из (21) имеем

$$0 \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} |J_k(\bar{u}_k^*)| \leq \overline{\lim_{k\to\infty}}|J_k(\bar{u}_k^*)| \leq \frac{\alpha}{2}LD^2, \qquad 0 < \alpha \leq 1.$$

Отсюда при $\alpha \to 0$ получим $J_k(\bar{u}_k^*) \to 0$ при $k \to \infty$.

Поскольку функция $J(u) \in C^{1,1}(U)$ выпукла на выпуклом множестве U_0, то необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$J(u) - J(v) \geq \langle J'(v), u - v \rangle, \;\; \forall u, v \in U_0.$$

Отсюда в частности при $v = u_k, \; u = u_*$, где $u_* \in U_*$,

$$0 \leq J(u_k) - J(u_*) \leq \langle J'(u_k), u_k - u_* \rangle = -J_k(u_*) \leq -J_k(\bar{u}_k^*), \;\; k = 1, 2, ... \tag{22}$$

Тогда $\varliminf\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J_* = J(u_*)$ в силу доказанного $J_k(\bar{u}_k^*) \to 0$ при $k \to \infty$. Это означает, что последовательность $\{u_k\}$ - минимизирующая.

Докажем справедливость оценки (19). Обозначим через $a_k = J(u_k) - J_*$. Теперь неравенства (20), (22) запишутся так

$$a_k \leq -J_k(\bar{u}_k^*), \qquad a_k - a_{k+1} \geq \alpha |J_k(\bar{u}_k^*)| - \frac{\alpha^2}{2} LD^2, \;\; 0 \leq \alpha \leq 1, \;\; k = 1, 2, ... \tag{23}$$

Заметим, что максимум функции $\alpha |J_k(\bar{u}_k^*)| - \frac{\alpha^2}{2} LD^2$ по α достигается при $\alpha = \overline{\alpha} = |J_k(\bar{u}_k^*)|/LD^2$, причем при $k \geq k_0$ значение $0 \leq \overline{\alpha} \leq 1$ так как $|J_k(\bar{u}_k^*)| \to 0$ при $k \to \infty$. Подставляя значение $\alpha = \overline{\alpha}$ в (23), получим

$$a_k \leq -J_k(\bar{u}_k^*), \qquad a_k - a_{k+1} \geq |J_k(\bar{u}_k^*)|^2 \frac{1}{2LD^2}, \;\; k \geq k_0. \tag{24}$$

Отсюда следует, что

$$a_k - a_{k+1} \geq a_k^2 / 2LD^2, \;\; k \geq k_0.$$

Тогда согласно лемме о числовой последовательности верна оценка

$$a_k \leq \frac{2LD^2(k_0 + 1)}{k}, \;\; k \geq k_0.$$

Отсюда следует, что существует постоянная $c = 2LD^2(k_0 + 1) > 0$ такая, что справедлива оценка (19).

5 Алгоритм решения задачи

1. Вводятся точности вычислений $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$;
2. $k := 0$;
3. Выбирается произвольно элемент u_k из множества U;
4. Если $\|J'(u_k)\| < \varepsilon$, то переходим к шагу 9;
5. Строится вспомогательное приближение $\overline{u}_k \in U$ по алгоритму 1 (пп. 3-9);
6. Определяется $\alpha_k \in [0, 1]$ путем решения задачи (6);
7. Строится следующее приближение $u_{k+1} = u_k + \alpha_k(\bar{u}_k - u_k)$;
8. Если $\|u_{k+1} - u_k\| > \varepsilon$, то $k := k + 1$ и переходим к шагу 5.
9. Итерационный процесс прекращается: u_k - точка минимума, $J(u_k)$ - минимальное значение функции.

6 Пример

Рассмотрим задачу

$$I(v) = v_1^2 + 3v_2^2 - 3v_1v_2 + v_1 - 6v_2 \to \inf \tag{25}$$

$$v \in V = \{v \in R^2 / v \in V_0, \quad \overline{g}_1(v) = v_1 + v_2 - 3 \leq 0, \ \ \overline{g}_2(v) = -2v_1 + v_2 - 2 \leq 0\}, \tag{26}$$
$$V_0 = \{v \in R^2 / \ v_1 \geq 0, \ \ v_2 \geq 0\}, \ \ v = (v_1, v_2).$$

Множество V_0 выпукло, функции $\overline{g}_1(v), \overline{g}_2(v)$ выпуклы. отсюда следует, что множество V выпукло. Функция $I(u)$ выпукла на V_0, так как

$$I''(v) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} > 0, \ \ \langle I''(v)\xi, \xi\rangle > 0, \ \ \forall \xi \in R^2, \ \ \forall v, v \in V_0.$$

Следовательно, задача (25), (26) является задачей выпуклого программирования.

Введем переменные u_3, u_4, и перепишем ограничения $\overline{g}_1(v) = v_1 + v_2 - 3 \leq 0$, $\overline{g}_2(v) = -2v_1 + v_2 - 2 \leq 0$ в виде $g_1(v, u_3, u_4) = v_1 + v_2 + u_3 - 3 = 0$, $g_2(v, u_3, u_4) = v_1 + v_2 + u_4 - 3 = 0$. Теперь заменим v_1, v_2 на u_1, u_2 соответственно, обозначим $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ и перепишем задачу в виде

$$J(u) = u_1^2 + 3u_2^2 - 3u_1u_2 + u_1 - 6u_2 \to \inf \tag{27}$$

$$u \in U = \{u \in R^4 / u \in U_0, \quad g_1(u) = u_1 + u_2 + u_3 - 3 = 0, \ \ g_2(u) = -2u_1 + u_2 + u_4 - 2 = 0\}, \tag{28}$$
$$U_0 = \{u \in R^4 / \ u_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, 4}\}.$$

Для данной задачи матрица A и вектор b имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Частные производные

$$J'(u) = \begin{pmatrix} 2u_1 - 3u_2 + 1 \\ 6u_2 - 3u_1 - 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда функция

$$J_k(u) = \langle J'(u_k), u - u_k\rangle = (2u_1 - 3u_2 + 1)(u_1 - u_{k1}) + (6u_2 - 3u_1 - 6)(u_2 - u_{k2}).$$

Вектор

$$Au - b = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 + u_3 - 3 \\ -2u_1 + u_2 + u_4 - 2 \end{pmatrix},$$

тогда

$$[Au - b]^*[Au - b] = (u_1 + u_2 + u_3 - 3)^2 + (-2u_1 + u_2 + u_4 - 2)^2.$$

Для определения вспомогательного приближения $\overline{u}_k$ необходимо решить задачу (см. ((7), (8)):

$$J_{1k}(u, \gamma) = [(2u_1 - 3u_2 + 1)(u_1 - u_{k1}) + (6u_2 - 3u_1 - 6)(u_2 - u_{k2}) - \gamma]^2 +$$

$$+(u_1+u_2+u_3-3)^2+(-2u_1+u_2+u_4-2)^2 \to \inf, \qquad (29)$$

$$u \in U_0, \ \ \gamma \in \Gamma_k, \qquad \Gamma_k = \{\gamma \in R^1 \ / \ \gamma \le \gamma_{dk}\}. \qquad (30)$$

Шаг α_k определяется путем минимизации функции

$$f_k(\alpha) = [u_{k1}+\alpha(\overline{u}_{k1}-u_{k1})]^2 + 3[u_{k2}+\alpha(\overline{u}_{k2}-u_{k2})]^2 - 3[u_{k1}+\alpha(\overline{u}_{k1}-u_{k1})][u_{k2}+$$

$$+\alpha(\overline{u}_{k2}-u_{k2})] + [u_{k1}+\alpha(\overline{u}_{k1}-u_{k1})] - 6[u_{k2}+\alpha(\overline{u}_{k2}-u_{k2})], \quad \alpha \in [0,1]. \qquad (31)$$

Численные расчеты. В качестве начального приближения выбрана точка $u_0 = (0.18884, 0.28649, 2.5247, 2.0912)$. Нетрудно убедиться в том, что $g_1(u_0) = 0, \ g_2(u_0) = 0$, т.е. $u_0 \in U$. При этом значение целевой функции $J(u_0) \approx -1.41$. Это означает, что минимальное значение функции $J(u)$ на множестве U таково, что $J(u_*) \le -1.41$. Следовательно, $\gamma_{d0} = -1.41$. В качестве начального значения $\overline{\gamma}_0$ выбрано значение $-1.62 < \gamma_{d0} = -1.41$. После неоднократного решения задачи (9), (10) для различных значений $\overline{\gamma}_0$, варьируемых в зависимости от значения F_* по алгоритму 1, найдены $u^m_{d0}, m = \overline{1,140}$, при которых $\inf\limits_{u \in U_0} F(u) = F(u^m_{d0}) = F_* < \varepsilon$ для всех $m = \overline{1,140}$. Затем найдено $\min\limits_{m=\overline{1,140}} J(u^m_{dk}) = -3.22$, которое достигается при $m = 42$, т.е. $u^*_{d0} = u^{42}_{d0} = (0.11671, 1.1046, 1.7787, 1.1289)$. Эта точка и будет начальным вспомогательным приближением: $\overline{u}_0 = (0.11671, 1.1046, 1.7787, 1.1289)$. Отметим, что $g_1(\overline{u}_0) = 0, \ g_2(\overline{u}_0) = 0$. Далее найдено $\alpha_0 = 0.91$ из условия минимума функции (31) с использованием метода дихотомического поиска. Тогда $u_1 = (0.12292, 1.0341, 1.8429, 1.2117)$. Линеаризуя исходную целевую функцию $J(u)$ в найденной точке $u_1 = (0.12292, 1.0341, 1.8429, 1.2117)$ и используя алгоритм 1, определена точка $\overline{u}_1 = (1.427, 1.573, 0, 3.2809)$. При этом функция $f_1(\alpha) = J(u_1 + \alpha(\overline{u}_1 - u_1)), \ \alpha \in [0,1]$, достигает минимума при $\alpha = 1$. Следовательно, $\alpha_1 = 1, \ u_2 = \overline{u}_1 = (1.427, 1.573, 0, 3.2809)$. Повторяя описанную процедуру, получаем точку u_3 такую, что $|u_3 - u_2| < \varepsilon$. Отсюда следует, что точкой минимума для рассматриваемой задачи является вектор $u_* = (1.427, 1.573, 0, 3.2809)$, минимальное значение $J(u_*) \approx -5.2857$. Полученное предлагаемым методом минимальное значение совпадает со значением, найденным методом множителей Лагранжа.

7 Заключение

В работе рассматривался подход к оптимизации значения выпуклой функции на выпуклом множестве, заданном линейными равенствами, основанный на сведении задачи выпуклого программирования к последовательности задач линейного программирования с некоторой погрешностью. Для этого выпуклая целевая функция аппроксимирована линейной. Далее задача линейного программирования решается путем корректировки значения целевой функции на множестве допустимых решений. Следует отметить, что, в отличие от метода множителей Лагранжа, разработанный метод может быть применен и к задачам, для которых соответствующая функция Лагранжа не имеет седловой точки. Кроме того, метод, использованный для решения полученной задачи линейного программирования, позволяет решать и вырожденные задачи. Приведено обоснование метода, описание алгоритмов решения вспомогательной и основной задач. Численные расчеты показали работоспособность описанного подхода. В дальнейшем планируется распространение изложенного метода на случай произвольного выпуклого множества.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов комитетом науки МОН РК, грант №3311/ГФ4.

Литература

[1] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. –552 с.

[2] *Айсагалиев С.А, Айсагалиев Ж.К.* Исследование по математическому программированию // Вестник КазНУ. Сер. мат., мех., инф. –2013. – № 2(77). –С. 4-20.

[3] *Кузнецов А.В., Сакович А.В., Холод Н.И.* Высшая математика. Математическое программирование. – Минск: Вышэйшая школа, 1973. – 470 с.

[4] *Карманов В. Г.* Математическое программирование. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 264 с.

[5] *John C. Chambers, S. K. Mullick, and D. Smith* How to Choose the Right Forecasting Technique // Harvard Business Review. – 1971. – P. 45-74.

[6] *Egan M.* Interfaces Between Tourism and outdoor Recreation // Paper presented at the Western Economic Association Annual Conference. – San Diego, California, 1975.

[7] *Holman M.A.* A National Time - Budget for Year 2000 // Sociology and Social Res., 42,1. – 1961.

[8] *Burd O.R., Brewer D.* Estimation of Net Social Benefits from Outdor Recreation // Econometrica. – 9, N 5. – P. 813-827.

[9] *Gearing C.E.* Determining the Optimal Investment policy for the Tourism sector of a Developing Country // Management Sci, Part I. – 1973. – 20, N 4. – P. 487-497.

[10] *Gearing C.E.* Establishing a Measure of Touristic Attractiveness // J. travel Res., XII. – 1974. – N 4(1-8).

[11] *Gearing C.E.* A Multi-Period Planning Model for Tourism Development // Paper presented at the TIMS XXII International Meeting. – Kyoto, Japan, 1975.

[12] *Gearing C.E.* Planning for Tourism Development: Quantitative Approaches, Praeger Publishers. – New York, 1976.

[13] *Arcger B.H.* The Primary and Secondary Beneficiaries of Touristspending // Tourist Rev., 27. – 1972. – P. 42-45.

[14] *Crampon L.J.* Factors Influencing Travel Flow into and within the Pacific Basin // Paper presented at the ORSA/TIMS Joint national Meeting. – San Juan, Puerto Rico, 1974. – P. 16-18.

[15] *Попов Л.Д.* Об одной модификации метода логарифмических барьерных функций в линейном и выпуклом программировании // Труды ИММ УрО РАН. – 2008. 14, № 2. – С. 103-114.

[16] *Вылегжанин О.Н., Шкатова Г.И.* Учет ограничений равенств при решении оптимизационных задач с линейными ограничениями // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312, № 5. – С. 76-78.

[17] *Скарин В.Д.* Аппроксимационные и регуляризующие свойства расширенных штрафных функций в выпуклом программировании // Труды ИММ УрО РАН. – 2009. – Т. 15, N 4. – С. 234-250.

[18] *Зильберова И.Ю., Маилян А.Л., Баркалов С.А., Уксусов С.Н.* Метод Штифеля в выпуклом программировании // Интернет-журнал "НАУКОВЕДЕНИЕ". –2015. –Т. 7, №6. –URL: http://naukovedenie.ru/PDF/122TVN615.pdf.

[19] *Данциг Дж.Б.* Линейное программирование, его применения и обобщения. (Linear programming and Extensions, 1963) Перевод с английского Г.Н. Андрианова, Л.И. Горькова, А.А. Корбута, А.Н. Ляпунова. Общая редакция и предисловие Н.Н. Воробьева. – Москва: Изд-во Прогресс, 1966.

References

[1] *Vasilyev F.P.* Numerical methods for solving extremal problems. – M.: Nauka, 1988. – 552 p. (in Russian)

[2] *Aisagaliev S.A., Aisagaliev Zh.K.* Research on mathematical programming // The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. –2013. – № 2(77). –P. 4-20.(in Russian)

[3] *Kuznetcov A.V., Sakovich A.V., Holod N.I.* Higher mathematics. Mathematical programming. – Minsk: Vysschaya schkola, 1973. – 470 p. (in Russian)

[4] *Karmanov V.G.* Mathematical programming. – M.: Fizmatlit, 2004. – 264 p.(in Russian)

[5] *John C. Chambers, S. K. Mullick, and D. Smith* How to Choose the Right Forecasting Technique // Harvard Business Review. – 1971. – P. 45-74.

[6] *Egan M.* Interfaces Between Tourism and outdoor Recreation // Paper presented at the Western Economic Association Annual Conference. – San Diego, California, 1975.

[7] *Holman M.A.* A National Time - Budget for Year 2000 // Sociology and Social Res., 42,1. – 1961.

[8] *Burd O.R., Brewer D.* Estimation of Net Social Benefits from Outdor Recreation // Econometrica. – 9, N 5. – P. 813-827.

[9] *Gearing C.E.* Determining the Optimal Investment policy for the Tourism sector of a Developing Country // Management Sci, Part I. – 1973. – 20, N 4. – P. 487-497.

[10] *Gearing C.E.* Establishing a Measure of Touristic Attractiveness // J. travel Res., XII. – 1974. – N 4(1-8).

[11] *Gearing C.E.* A Multi-Period Planning Model for Tourism Development // Paper presented at the TIMS XXII International Meeting. – Kyoto, Japan, 1975.

[12] *Gearing C.E.* Planning for Tourism Development: Quantitative Approaches, Praeger Publishers. – New York, 1976.

[13] *Arcger B.H.* The Primary and Secondary Beneficiaries of Touristspending // Tourist Rev., 27. – 1972. – P. 42-45.

[14] *Crampon L.J.* Factors Influencing Travel Flow into and within the Pacific Basin // Paper presented at the ORSA/TIMS Joint national Meeting. – San Juan, Puerto Rico, 1974. – P. 16-18.

[15] *Popov L.D.* Ob odnoi modifikacii metoda logarifmicheskih bariernyh funkciy v lineinom i vypuklom programmirovanii // Trudy IMM UrO RAN. – 2008. 14, № 2. – P. 103-114.(in Russian)

[16] *Vylegzhanin O.N., Shkatova G.I.* uchet ogranicheniy ravenstv pri reshenii optimizacionnyh zadach s lineinymi ogranicheniyami // Izvestiya Tomskogo politehnicheskogo universiteta. – 2008. – T. 312, № 5. – P. 76-78.(in Russian)

[17] *Skarin V.D.* Approksimacionnye i regulyarizuiuschie svoistva rasshirennyh shtrafnyh funkciy v vypuklom programmirovanii // Trudy IMM UrO RAN. – 2009. – T. 15, N 4. – P. 234-250.(in Russian)

[18] *Zilberova I.Iu., Mailyan A.L., Barkalov S.A., Uksusov S.N.* Metod Shtifelya v vypuklom programmirovanii // Internet-journal "Naukovedenie". –2015. –T. 7, №6. –URL: http://naukovedenie.ru/PDF/122TVN615.pdf.(in Russian)

[19] *Dantzig J.B.* Linear programming and Extensions. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.