УДК 512.54+510.5

Конырханова А.А., Нуризинов М.К., Тюлюбергенев Р.К., Хисамиев Н.Г*.

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева,
Республика Казахстан, г. Усть-Каменогорск
*E-mail: Nhisamiev@mail.ru

Ректракты группы унитреугольных матриц над кольцом

Ретрактом группы G называется такая её подгруппа H, для которой существует эндоморфизм $\varphi : G \to H$, тождественный на H. Это понятие идет из топологии. Описание ретрактов для важных классов групп представляет актуальную задачу. В абелевых группах прямые множители исчерпывают все множество ретрактов. В общем случае проблема описания ретрактов гораздо сложнее. Доказано, что уже в классе конечно порожденных нильпотентных групп ступени нильпотентности два проблема определения, является ли ретрактом заданная конечным множеством порождающих элементов подгруппа, алгоритмически неразрешима. В данной работе получено необходимое и достаточное условие ретрактности абелевой подгруппы группы унитреугольных матриц произвольной размерности над кольцом целых чисел. Также доказано, что любой ретракт группы унитреугольных матриц размерности три над кольцом, аддитивная группа которого локально циклична, изоморфен этой аддитивной группе. Отсюда в качестве следствия вытекает, что существует алгоритм, который по любой подгруппе группы всех унитреугольных матриц размерности три определяет, является ли данная подгруппа ретрактом или нет. Также установлено существование алгоритма, который по любому ретракту такой группы определяет, является ли данный ретракт трансвекционным или существенно стандартным. Доказана вычислимость любого ретракта разрешимой группы без кручения конечной размерности, изолятор коммутанта которой совпадает с коммутантом. Отсюда, в частности, следует, что любой ретракт группы всех треугольных матриц любого конечного размера с положительными диагональными элементами над полем рациональных чисел вычислим.

Ключевые слова: ретракт группы, унитреугольная группа матриц над кольцом, стандартный ретракт, трансвекционный ретракт, существенно стандартный ретракт, вычислимая группа.

Konyrkhanova A.A, Nurizinov M.K., Tyulyubergenev R.K., Khisamiev N.G.

Retracts of group of unitriangular matrices over the ring

Retract of G group is its H subgroup for which endomorphism $\varphi : G \to H$ is in existence identical to H. This notion comes from topology. Description of retracts for important group grades is an up-to-date target. Direct factors in Abelian groups deflate all plenty of retracts. In the general case the problem of retracts description is far more complicated. It is proved that in the category of finitely generated nilpotent groups of nilpotency step two, sub-group prescribed by finite collection of generating elements is algorithmically unresolvable. In this work we obtained necessary and sufficient condition to be retract for Abelian sub-group of arbitrary dimensionality unitriangular matrices group above ring of integers. It was also proved that any retract of unitriangular matrices group of dimensionality three above ring is isomorphic to its additive group which is locally cyclic. This yields the conclusion that existing algorithm determines whether the given sub-group is a retract or not according to any sub-group of dimensionality three unitriangular matrices group. It is also established that the algorithm is available which determines whether the given retract is transvectional or essentially conventional according to any retract of such a group. Calculability of any retract of solvable group was proved that is torsion-free of finite dimension, and its commutant isolation coincide with commutant. In particular it follows that any retract of group of all triangular matrices group of any finite size with positive diagonal elements above the field of rational numbers is calculable.

Key words: retract of group, unitriangular group of matrices over the ring, conventional retract, transvectional retract, essentially conventional retract, computable group.

Конырханова А.А., Нуризинов М.К., Тюлюбергенев Р.К., Хисамиев Н.Г.

Сақинадағы униүшбұрышты матрицалар тобының ретрактілері

G тобының H ішкі тобына тепе-тең болатындай $\varphi : G \to H$ эндоморфизмі бар болса, онда H ішкі тобын G тобының ретрактісі деп атаймыз. Бұл ұғым топологиядан келген. Топтардың маңызды кластары үшін ретрактілерді сипаттау өзекті мәселелердің бірі болып табылады. Абельдік топтарда тура көбейтінділер ретрактілердің барлық жиынын толығымен сипаттайды. Жалпы жағдайда, ретрактілерді сипаттау мәселесі аса күрделі. Ақырлы туындаған екінші сатылы нильпотентті топтар класында тудырушы элементтері ақырлы жиын болатын ішкі топтардың ретракті болуы жөніндегі мәселені анықтау алгоритмдік шешілімді еместігі дәлелденіп қойған. Бұл жұмыста бүтін сандар сақинасындағы кез келген өлшемді униүшбұрышты матрицалар тобының абелдік ішкі топтарының ретракті болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Сонымен қатар, аддитивті тобы локальді циклдік болатын сақинадағы үш өлшемді униүшбұрышты матрицалар тобының кез келген ретрактісі осы аддитивті топқа изоморфты екендігі дәлелденген. Бұдан, салдар ретінде барлық үш өлшемді униүшбұрышты матрицалар тобының кез келген ішкі тобы ретракті бола ма, әлде жоқ па екендігін анықтайтын алгоритм бар болатындығы шығады. Сондай-ақ, осындай топтың кез келген ретрактісі трансвекциялық ретракті ме, әлде елеулі стандартты ретракті ме екендігін анықтайтын алгоритмнің бар болатындығы анықталған. Коммутантының изоляторы коммутантымен беттесетін ақырлы өлшемді айналымсыз шешілімді топтың кез келген ретрактісі есептелімді болатындығы дәлелденген. Бұдан, дербес жағдайда, рационал сандар өрісіндегі кез келген ақырлы өлшемді оң диагональдық элементті барлық үшбұрышты матрицалар тобының кез келген ретрактісі есептелімді екендігі шығады.

Түйін сөздер: топтың ретрактісі, сақинадағы униүшбұрышты матрицалар тобы, стандартты ретракт, трансвекциялық ретракт, елеулі стандартты ретракт, есептелімді топ.

1 Введение

Ретрактом группы G называется такая её подгруппа H, для которой существует эндоморфизм $\rho : G \to H$, тождественный на H. Такой эндоморфизм называется *ретракцией.* Любой идемпотентный эндоморфизм $\rho : G \to G$, $\rho^2 = \rho$, определяет ретракцию группы G на подгруппу $\rho(G)$.

Легко доказать (см., например [1]), что подгруппа H является ретрактом группы G тогда и только тогда, когда существует нормальная подгруппа U группы G такая, что выполнены следующие условия:

$$G = H \cdot U = \{hu | h \in H, u \in U\}, H \cap U = \{1\}. \tag{1}$$

Любой элемент g группы G однозначно записывается в виде hu, где $h = h(g) \in H, u = u(g) \in U$. Ретракция $\rho : G \to H$ определяется отображением $\rho(g) = h(g), g \in G$. Нормальная подгруппа U совпадает с ядром $ker(\rho)$ эндоморфизма ρ и называется *ядром ретракции.*

Очевидно, что прямые и свободные множители в группах являются их ретрактами. В абелевых группах прямые множители исчерпывают все множество ретрактов. В общем случае проблема описания ретрактов гораздо сложнее. В [2] доказано, что уже в классе конечно порожденных нильпотентных групп ступени два проблема определения, является ли заданная конечным множеством порождающих элементов подгруппа ретрактом, алгоритмически неразрешима. Это отвечает на вопрос Мясникова № 9а из [3].

Ретракты связаны с вербально и алгебраически замкнутыми подгруппами групп.

Пусть G – группа. Подгруппа $H \leq G$ называется вербально замкнутой в группе G, если для любого группового слова $\omega(x_1, x_2, ..., x_n)$ от независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ без констант и любого элемента $h \in H$ уравнение

$$\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = h \qquad (2)$$

разрешимо в группе G тогда и только тогда, когда оно разрешимо в подгруппе H.

Подгруппа H группы G называется алгебраически замкнутой в группе G, когда для любого набора групповых слов $\omega_i(x_1, x_2, ..., x_t), i = 1, 2, ..., m$, с константами из H от независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ система уравнений

$$\omega_i(x_1, x_2, ..., x_t) = 1, i = 1, 2, ..., m, \qquad (3)$$

имеет решение в группе G тогда и только тогда, когда она имеет решение в H.

Очевидно, что любой ретракт произвольной группы является алгебраически замкнутой, и тем более вербально замкнутой подгруппой этой группы. В [4] доказано, что в классе конечно определенных групп любая конечно порожденная алгебраически замкнутая подгруппа является ретрактом.

Так как любая конечно порожденная нильпотентная группа конечно определена, а любая её подгруппа конечно порождена (см., например, [5]), в классе конечно порожденных нильпотентных групп свойства "быть алгебраически замкнутой подгруппой"и "быть ретрактом"равносильны.

В [4] был сформулирован вопрос об описании алгебраически, вербально и экзистенциально замкнутых подгрупп свободных нильпотентных групп произвольного конечного ранга любой ступени нильпотентности. В [5] был дан исчерпывающий ответ на этот вопрос для алгебраически и вербально замкнутых подгрупп. Оказалось, что множества ретрактов свободной нильпотентной группы $N_{r,k}$ ранга $r \geq 1$ ступени нильпотентности $k \geq 1$ совпадает с множествами её вербально замкнутых подгрупп, алгебраически замкнутых подгрупп, а также с множеством свободных множителей группы $N_{r,k}$ в многообразии N_k овсех нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше, чем k.

В [6] получен критерий того, что данная неабелева подгруппа группы G, коммутант которой локально циклическая группа, является ретрактом группы G. Там же доказано, что любой ретракт группы унитреугольных матриц $UT_n(\mathbb{Q}), n \geq 3$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является вычислимо перечислимой подгруппой данной группы. Отсюда как следствие выводится, что любой ретракт группы $UT_n(\mathbb{Q})$ вычислим.

Унитреугольная группа матриц $G = UT_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, является классическим объектом алгебры. Теория этих групп находит применение в различных областях науки: в математике, физике, механике и т.д. Поэтому представляет интерес описание структуры такой группы, важной составной частью которой являются ретракты.

В данной работе дано необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная абелева подгруппа группы G была ретрактом. Доказано, что любой ретракт группы $UT_3(K)$, где K – ассоциативное и коммутативное кольцо, аддитивная группа которого локально циклична, изоморфен этой аддитивной группе. Из этих результатов выводятся критерии для того, чтобы данная подгруппа группы $G = UT_3(\mathbb{Z})$ была ретрактом, а если она ретракт, то эти критерии определяют будет ли этот ретракт трансвекционным или существенно стандартным.

Доказана вычислимость любого ретракта разрешимой группы без кручения конечной размерности, изолятор коммутанта которой совпадает с коммутантом. Отсюда, в частности, следует, что любой ретракт группы всех треугольных матриц с положительными диагональными элементами любого конечного размера над полем рациональных чисел вычислим.

2 Сервантные абелевы подгруппы группы $UT_n(\mathbb{Z})$

Пусть $G = UT_n(\mathbb{Z})$ – группа всех унитреугольных матриц размерности $n, n \geq 3$ над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел. В данном пункте описаны сервантные абелевы подгруппы группы G имеющие единичное пересечение с коммутантом этой группы.

Лемма 1. Если H – абелева сервантная подгруппа группы G ранга $r(H) \geq 2$, и

$$H \cap G' = \{1\}, \tag{4}$$

то существуют: число $1 \leq s_0 < n$, элемент $h^{(0)} = (h^{(0)}_{ij}) \in H$ и подгруппа $H^{(1)}$ такие, что для любого $i \leq s_0$ справедливы:

$$H = (h^{(0)}) \oplus H^{(1)}, \tag{5}$$

где

$$h^{(0)}_{i,i+1} = 0, h^{(0)}_{s_0+1,s_0+2} \neq 0, \tag{6}$$

$$\text{НОД}\Big(h^{(0)}_{s_0+1,s_0+2}, ..., h^{(0)}_{n-1,n}\Big) = 1, \tag{7}$$

а для любого неединичного элемента $h = (h_{ij}) \in H^{(1)}$, найдется число $i < s_0$ такое, что

$$h_{i,i+1} \neq 0, i = 1, ..., n-1. \tag{8}$$

Доказательство. Покажем, что существует элемент $h^{(0)} \in H$, $h^{(0)} \neq 1$ такой, что

$$h^{(0)}_{12} = 0, h \neq 1. \tag{9}$$

Пусть элемент $h \in H$ такой, что $h \neq 1$ и

$$h_{12} = min\{|g_{12}|\} : g \in H \setminus \{1\}\}. \tag{10}$$

Если $h_{12} = 0$, то полагаем $h^{(0)} = h$. Пусть $h_{12} \neq 0$. Так как $r(H) \geq 2$, то найдется элемент $g \in H \setminus \{1\}$ такой, что $g \notin (h)$. Отсюда и из (10) следует, что $|g_{12}| \geq |h_{12}|$. Тогда найдется число k, для которого верны следующие соотношения:

$$0 < (g - kh)_{12} < h_{12}, \tag{11}$$

что противоречит (10). Следовательно, H содержит элемент h такой, что $h \neq 1$ и $h_{12} = 0$.

Пусть $s_0 \geq 1$ такое максимальное число, что в H существует элемент $h \neq 1$, для которого справедливы равенства

$$h_{12} = h_{23} = ... = h_{s_0,s_0+1} = 0. \tag{12}$$

Так как $H \cap G' = \{1\}$, то $s_0 < n - 1$. Пусть

$$H_0 = \{h \in H | h_{12} = h_{23} = ... = h_{s_0,s_0+1} = 0\}. \tag{13}$$

Через $h^{(0)} \in H_0$ обозначим такой элемент, что

$$|h^{(0)}_{s_0+1,s_0+2}| = min\{|h_{s_0+1,s_0+2}||h \in H_0 \setminus \{1\}\}. \tag{14}$$

Отсюда легко следует, что подгруппа $(h^{(0)})$ сервантна в H. Докажем, что

$$H_0 = (h^{(0)}). \tag{15}$$

Допустим противное, т.е. существует подгруппа $H_1 \neq 1$ такая, что $H_0 = (h^{(0)}) \oplus H_1$. Тогда в силу (14) для любого элемента $h \in H_1 \setminus \{1\}$ найдется такое число $k = 0, \pm 1$, что

$$h_{s_0+1,s_0+2} = kh^{(0)}_{s_0+1,s_0+2}, \tag{16}$$

т.е.

$$(hh^{(0)^{-k}})_{s_0+1,s_0+2} = 0, \tag{17}$$

что противоречит выбору числа s_0 и элемента $h^{(0)}$. Следовательно, справедливо (15). Отсюда и из (13) следуют формулы (5) – (7). Лемма доказана.

Теорема 1.Пусть H – сервантная абелева подгруппа группы $G = UT_n(\mathbb{Z})$,$n \geq 3$ для которой справедливо (4). Тогда существуют такие числа $n > s_0 > s_1 > ... > s_k \geq 1, k > 0$, и элементы $h^{(0)}, ..., h^{(k)}$, что

$$H = \left(h^{(0)}\right) \oplus ... \oplus \left(h^{(k)}\right), \tag{18}$$

$$h^{(i)}_{12} = ...h^{(i)}_{s_i,s_i+1} = 0, \tag{19}$$

$$\text{НОД}\Big(h^{(i)}_{s_i+1,s_i+2}, ..., h^{(i)}_{n-1,n}\Big) = 1, \tag{20}$$

$$s_i - s_{i+1} \geq 2, \tag{21}$$

где $i \leq k$. Доказательство. По лемме 1 существуют: число s_0, элемент $h^{(0)} \in H$ и подгруппа $H^{(1)} \leq G$ такие, что справедливы соотношения (4) – (8). Из (5) следует, что подгруппа $H^{(1)}$ сервантна в H. Отсюда и из сервантности H в G вытекает, что подгруппа $H^{(1)}$ сервантна в G. Следовательно, для $H^{(1)}$ справедливы все условия леммы 1, а потому найдутся число $1 \leq s_1 < n - 1$ и подгруппа $H^{(2)}$ группы $H^{(1)}$ такие, что справедливы соотношения (4) – (8) с заменой 0 на 1 и 1 на 2. Продолжая далее этот процесс, получим справедливость (18) – (20).

Докажем неравенство (21). Допустим противное, т.е. $s_{i+1} = s_i - 1$. Тогда

$$h^{(i+1)}_{s_i,s_i+1} \neq 0. \tag{22}$$

Отсюда и из (19) имеем

$$\left(h^{(i+1)}h^{(i)}\right)_{s_i,s_i+2} = h^{(i+1)}_{s_i,s_i+1} \cdot h^{i}_{s_i+1,s_i+2} \neq 0, \tag{23}$$

$$\left(h^{(i)}h^{(i+1)}\right)_{s_i,s_i+2} = h^{(i)}_{s_i,s_i+1} \cdot h^{i+1}_{s_i+1,s_i+2} = 0, \tag{24}$$

т.е. подгруппа H неабелева. Получили противоречие. Следовательно, неравенство (21) верно. Теорема доказана.

Если n – рациональное число, то $[n]$ означает целую часть числа n.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Пусть H — абелева сервантная подгруппа группы $G = UT_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$ имеющая тривиальное пересечение с коммутантом G'. Тогда ранг $r(H)$ группы H не превосходит $[\frac{n}{2}]$.

Действительно, по теореме 1 ранг группы H однозначно определяется последовательностью чисел из условия теоремы 1. Отсюда и из (21) получаем требуемое.

3 Абелевы ретракты группы $UT_n(\mathbb{Z})$

Лемма 2. Абелев ретракт H любой группы G имеет единичное пересечения с коммутантом G', т.е.

$$H \cap G' = \{1\}. \tag{25}$$

Доказательство. Так как H ретракт группы G, то существует в ней нормальная подгруппа U такая, что

$$G = HU, H \cap U = 1. \tag{26}$$

Пусть элемент $f \in H \cap G'$. Тогда из (26) и коммутаторных соотношений [7, стр.39] следует

$$f = [h_1u_1, h_2u_2] = [h_2, h_1]^{-u_2}[u_2, h_1]^{-u_1}[h_2, u_1]^{-1}[u_2, u_1]^{-1}. \tag{27}$$

Так как H абелева группа и U нормальна в G, то

$$[h_2, h_1]^{-u_2} = 1, [u, h] \in U$$

для любых элементов $h_1, h_2, h' \in H$, $u \in U$. Отсюда и (27) следует $f \in U$. Таким образом $f \in H \cap U$, а потому в силу (25) имеем $f = 1$. Лемма доказана.

Теорема 2. Абелева подгруппа H группы $G = UT_n(Z)$, $n \geq 3$ является ретрактом группы G тогда и только тогда, когда найдутся матрицы $g^{(i)} \in G, i < n-1$ и число $s \leq [\frac{n}{2}]$ такие, что определитель

$$\triangle = \begin{vmatrix} g^{(0)}_{12} & g^{(1)}_{12} & \cdots & g^{(n-2)}_{12} \\ g^{(0)}_{23} & g^{(1)}_{23} & \cdots & g^{(n-2)}_{23} \\ . & . & . & \\ g^{(0)}_{n-1,n} & g^{(1)}_{n-1,n} & \cdots & g^{(n-2)}_{n-1,n} \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{28}$$

и

$$H = \left(g^{(0)}\right) \oplus ... \oplus \left(g^{(s-1)}\right). \tag{29}$$

Доказательство (необходимость). Допустим, H – абелев ретракт группы G. Тогда существует нормальная подгруппа U группы G такая, что справедливо (26). По лемме 2 справедливо (25). Отсюда, и теоремы 1, и следствия 1 следует, что найдутся матрицы $g^{(0)}, ..., g^{(s-1)}$, где $s \le [\frac{n}{2}]$ такие, что $H = \left(g^{(0)}\right) \oplus ... \oplus \left(g^{(s-1)}\right)$.

Пусть $\overline{G} \rightleftharpoons G/G'$ и $\alpha : G \to \overline{G}$ – естественный гомоморфизм. Тогда $\alpha H \rightleftharpoons \overline{H}$ – ретракт группы $\overline{G}$, а потому $\overline{H}$ сервантен в $\overline{G}$. Так как $\overline{G}$ – конечно порожденная абелева группа без кручения, то $\overline{H}$ выделяется прямым слагаемым из $\overline{G}$. Отсюда найдутся вектора

$$\overline{g^{(k)}} =< \overline{g^{(k)}_{12}}, ..., \overline{g^{(k)}_{n-1,n}} > \tag{30}$$

$s \le k < n-1$, такие, что

$$\overline{G} = \left(\overline{g^{(0)}}\right) \oplus ... \oplus \left(\overline{g^{(n-2)}}\right). \tag{31}$$

Пусть $\overline{e^{(i)}}$ – единичный $n-1$-мерный вектор, у которого i-я координата равна 1, а остальные - нули. Тогда из (25), (26), (29), (31) следует, что система уравнений

$$x_i^{(0)}\overline{g^{(0)}} + ... + x_i^{(n-2)}\overline{g^{(n-2)}} = \overline{e^i} \tag{32}$$

имеет решение в целых числах. Это возможно тогда и только тогда, когда справедливо (28). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть справедливы (28), (29). Определим подгруппу U группы G положив:

$$U = gp(g^{(s)}, ..., g^{(n-2)}, G') \tag{33}$$

Докажем, что

$$H \cap U = \{1\} \tag{34}$$

Допустим противное, т.е. найдется элемент

$$g \in H \cap U, g \neq 1 \tag{35}$$

Из ((28) следует, что вектора

$$\overline{g^{(i)}} =< g^{(i)}_{12}, g^{(i)}_{23}, ..., g^{(i)}_{n-1,n} >, \tag{36}$$

где $i < n-1$, образуют максимально линейно независимую систему элементов фактор-группы G/G'. Из (35), (29), (33) следуют равенства:

$$g \equiv {g^{(0)}}^{k_0} \cdot ... \cdot {g^{(s-1)}}^{k_{s-1}}, \tag{37}$$

$$g = g^{(s)^{k_s}} \cdot ... \cdot g^{(n-2)^{k_{n-2}}}, (modG') \tag{38}$$

для некоторых чисел $k_0, ..., k_{n-2}$. Следовательно система векторов (36) линейно зависима. Получили противоречие. Следовательно, равенство (34) верно.

Докажем, что первое равенство из (26) справедливо. Из (29), (33) следует, что для этого достаточно доказать, что для любого единичного вектора $\overline{e}^{(i)}$ система уравнений

$$x_{i0}g_{i,i+1}^{(0)} + ... + x_{i,n-2}g_{i,i+1}^{(n-2)} = e_i^{(k)}, \tag{39}$$

$i, k < n$, имеет решение в целых числах. Согласно (28) определитель системы (39) равен ± 1. Отсюда следует, что система (39) имеет искомое решение. Достаточность, а вместе с ней, теорема доказана.

4 Ретракты группы $UT_3(\mathbb{Z})$

Теорема 3. Пусть K – коммутативное и ассоциативное кольцо с единицей, аддитивная группа K^+ которого, локально циклична и не имеет кручения. Тогда любой ретракт H группы $G = UT_3(K)$ изоморфен K^+. Доказательство. В [?] доказано, что ретракт H группы G является абелевой подгруппой. Отсюда следует, что

$$G = HU, H \cap U = 1 \tag{40}$$

и справедливо

$$U \geq G', U \neq G'. \tag{41}$$

Подгруппы G' и U сервантны в G. Отсюда факторгруппы

$$G/U, G/G', U/G'. \tag{42}$$

не имеют кручения, где $G/U \simeq H$. Через $dim(G)$ обозначим размерность группы G. Из (40), (41) следует, что справедливо равенство

$$dim(G/G') = dim(G/U) + dim(U/G'). \tag{43}$$

Из (41) следует, что $dim(U/G') \geq 1$, а из (40) – $dim(G/U) \geq 1$. Очевидно, что $dim(G/G') = 2$. Отсюда и из (43) имеем $2 = dim(G/U) + dim(U/G')$, т.е. $dim(G/U) = 1$, $dim(U/G') = 1$. Отсюда и из (40) следует, что $dim(G/U) = dim(H) = 1$. Отсюда и из сервантности ретракта H вытекает, что $H \simeq K^+$. Теорема доказана.

Из теоремы 3 непосредственно вытекает

Следствие 2. Любой ретракт группы $UT_3(\mathbb{Z})$ является её сервантной циклической подгруппой.

Отсюда и теоремы 2 имеем Следствие 3. Подгруппа H группы $UT_3(\mathbb{Z})$ будет её ретрактом тогда и только тогда, когда найдется матрица $h \in UT_3(\mathbb{Z})$ такая, что $H = (h)$ и числа h_{12} и h_{23} взаимно просты. Следствие 4. Существует алгоритм, который по любой подгруппе A группы $UT_3(\mathbb{Z})$ определяет, будет ли A её ретрактом или нет.

Пусть e – единичная матрица размерности n, а e_{ij} – матрица, где на пересечении i-ой строки и j-го столбца находится 1, а остальные элементы матрицы равны 0. Матрица $t_{ij} = e + e_{ij}$ называется *трансвекцией*.

Ретракт H группы $UT_n(\mathbb{Z})$ называется *трансвекционным*, если любая трансвекция t_{ij} либо принадлежит ретракту H, либо находится в ядре U соответствующей ретракции.

Пусть дана возрастающая последовательность $\bar{t} =< 1, t_1, t_2, ..., t_{k+1} >$ натуральных чисел, где $t_{k+1} = n$. По разбиению $\bar{t}$ определим клеточно-диагональную подгруппу $H_{\bar{t}}$, клетки H_{t_i} которой соответствуют наборам индексов $t_i, t_i + 1, ..., t_{i+1} - 1$ для $i = 1, ..., k$.

При этом все нетривиальные клетки должны быть полными, то есть включать все элементы с соответствующим набором индексов. Это, в частности, означает, что клетка H_{t_i} определяет подгруппу, изоморфную группе $UT_{t_{i+1}-t_i}(\mathbb{Z})$. Легко проверить, что подгруппа $H_{\bar{t}}$ изоморфна прямому произведению своих нетривиальных клеток. Легко заметить, что $H_{\bar{t}}$ является ретрактом группы $UT_n(\mathbb{Z})$. Такие ретракты называются *стандартными.*

Известно, что любой трансвекционный ретракт является стандартным.

Ретракты H_1 и H_2 группы G называются *подобными*, если существует такая нормальная подгруппа U группы G, что

$$G = H_1U = H_2U, H_i \cap U = 1, i = 1, 2. \tag{44}$$

Другими словами, подгруппы H_1 и H_2 соответствуют двум ретракциям с общим ядром. Ясно, что подгруппы H_1 и H_2 в этом случае изоморфны между собой.

Ретракт группы $UT_n(\mathbb{Z})$ называется *существенно стандартным*, если он подобен стандартному.

Теорема 4. Подгруппа H группы $G = UT_3(\mathbb{Z})$ является трансвекционным ретрактом тогда и только тогда, когда либо

$$H = (t_{12}), \tag{45}$$

либо

$$H = (t_{23}), \tag{46}$$

где t_{ij} – трансвекции.

Доказательство. Пусть подгруппа H – трансвекционный ретракт. По следствию 3 найдется матрица $h \in G$ такая, что $H = (h)$ и числа h_{12} и h_{23} взаимно просты. Если h_{12} и h_{23} отличны от нуля, то $t_{12}, t_{23} \notin H$. Так как H трансвекционный ретракт, то $t_{12}, t_{23} \in U$. Отсюда следует, что коммутатор $[t_{12}, t_{23}] = t_{13}$ также принадлежит U, т.е. $U = G$. Получим противоречие. Следовательно, либо $h_{12} = 0$, либо $h_{23} = 0$. Пусть $h_{12} = 0$. Тогда по следствию 2 имеем НОД$(h_{12}, h_{23}) = 1$. Отсюда $h = t_{12}$ и $H = (t_{12})$. Аналогично рассматривается случай, когда $h_{23} = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть справедливо равенство (34). Через U обозначим подгруппу, порожденную трансвекциями t_{23}, t_{13}. Тогда, легко проверить, что справедливы: $G = HU, H \cap U = 1, U \trianglelefteq G$, т.е. H – ретракт группы G. Аналогично доказывается, если справедливо (35). Теорема доказана. Теорема 5. Подгруппа H группы $G = UT_3(\mathbb{Z})$ является существенно стандартным ретрактом тогда и только тогда, когда

$$H = (h) \tag{47}$$

и справедливо либо

$$h_{12} = 1, \tag{48}$$

либо

$$h_{23} = 1. \tag{49}$$

Доказательство (необходимость). Пусть H – существенно стандартный ретракт группы G, а подгруппа U группы G – ядро соответствующей ретракции. Тогда из определения существенно стандартного ретракта следует, что либо

$$t_{12}, t_{13} \in U, \tag{50}$$

либо

$$t_{23}, t_{13} \in U. \tag{51}$$

Пусть справедливо (50). По следствию 3 существует такой элемент $h \in H$, что

$$H = (h), \text{НОД}(h_{12}, h_{23}) = 1. \tag{52}$$

Докажем, что справедливо либо (48), либо (49). Допустим противное, т.е. имеют место неравенства

$$h_{12} \neq 1, h_{23} \neq 1. \tag{53}$$

Пусть

$$G = HU, H \cap U = 1, U \trianglelefteq G. \tag{54}$$

Из (52) следует, что любой элемент $g \in H, g \neq 1$, имеет запись вида

$$g = \begin{pmatrix} 1 & kh_{12} & l \\ & 1 & kh_{23} \\ & & 1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

для некоторых целых чисел $k \neq 0, l$. Отсюда и из (53) следует, что для любого элемента $g \in H, g \neq 1$, справедливо

$$|g_{23}| > 1. \tag{56}$$

Докажем, что для любого элемента $u \in U \setminus \{1\}$ справедливо

$$u_{23} = 0. \tag{57}$$

Допустим противное, т.е. существует такой элемент $u \in U$, что $u_{23} \neq 0$. Пусть элемент $v \in U$ такой, что $v_{23} = min\{u_{23} > 0 | u \in U\}$.

Тогда $v_{23} > 1$. Действительно, если $v_{23} = 1$, то подгруппа $V \leq U$, порожденная элементами v, t_{12}, t_{13} совпадает со всей группой G, что невозможно. Поэтому $v_{23} > 1$. Так как в силу (50) имеем включение $t_{12} \in U$, то

$$vt_{12}^{-v_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ & 1 & v_{23} \\ & & 1 \end{pmatrix} \in U. \tag{58}$$

Отсюда и из (50), в силу сервантности подгруппы U, имеем $t_{23} \in U$, т.е. $U = G$. Получили противоречие. Следовательно, (57) справедливо, т.е. любая матрица $u \in U$ равна некоторой матрице вида

$$\begin{pmatrix} 1 & l & m \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

где $l, m \in \mathbb{Z}$. Отсюда и из (55) и (56) следует, что для любой матрицы $b \in HU$ справедливо $b_{23} \neq 1$. Следовательно, $t_{23} \notin HU$, т.е. $G \neq HU$. Получили противоречие. Таким образом, (53) не имеет место. Поэтому справедливо либо (48), либо (49). Аналогично рассматривается случай, когда справедливо (51). Необходимость доказана.

Достаточность. Допустим справедливы соотношения (47) и (48). Через U обозначим подгруппу, порожденную трансвекциями t_{23}, t_{13}, т.е.

$$U = gp(t_{23}, t_{13}). \tag{60}$$

Отсюда следует, что для любого элемента $u \in U$ справедливо

$$u_{12} = 0. \tag{61}$$

Отсюда и из (47), (48), (60) следует, что

$$H \cap U = 1, U \trianglelefteq G. \tag{62}$$

Докажем, что

$$G = HU. \tag{63}$$

Пусть дан элемент $g \in G$. Если $g_{12} = 0$, то из (60) следует, что $g \in U$. Допустим $g_{12} = k, k \neq 0$. Отсюда и из (48) следует, что $(gh^{-k})_{12} = 0$. Следовательно, в силу (60), (61) имеем, что для некоторого элемента $u \in U$ верно $g = uh^k$. Отсюда и из (63) получаем равенство $g = h^k u_1$ для некоторого элемента $u_1 \in U$, т.е. $g \in HU$. Следовательно, (63) справедливо. Отсюда и из (62) следует, что H – ретракт группы G. Достаточность, а потому и теорема доказаны.

Из теоремы 5 непосредственно вытекает Следствие 5. Подгруппа H группы $UT_3(\mathbb{Z})$ не является существенно стандартным ретрактом группы G тогда и только тогда, когда найдется элемент $h \in UT_3(\mathbb{Z})$ такой, что числа h_{12} и h_{23} отличны от 1 и наибольший общий делитель этих чисел равен 1.

Отсюда и из теорем 4,5 и следствия 4 непосредственно вытекает Следствие 6. Существует алгоритм, который по любой подгруппе H группы $UT_3(\mathbb{Z})$ определяет является ли H трансвекционным ретрактом или существенным ретрактом группы $UT_3(\mathbb{Z})$. Доказательство. По следствию 4 существует алгоритм который определяет, будет ли H ретрактом или нет. Пусть $H = (h)$ – ретракт. Если либо $h_{12} = 0$, либо $h_{23} = 0$, то по теореме 4 H – транвекционный ретракт. Если $h_{12}, h_{23} \neq 0$, то H – нетрансвекционный ретракт. Если либо $h_{12} = 1$, либо $h_{23} = 1$, то по теореме 5 H – существенно стандартный ретракт. Если же $h_{12}, h_{23} \neq 1$, то по следствию 5 подгруппа H не является существенно стандартным ретрактом.

5 Ретракты вычислимых разрешимых групп без кручения

Пусть ω – множество всех натуральных чисел, G – некоторая группа и $\upsilon : \omega \to G$ – отображение ω на G. Пара (G, υ) называется *нумерованной группой*. Нумерованная группа называется *конструктивной*, если существует алгоритм, который по любым натуральным числам n, m и s определяет справедливость равенств $\upsilon n = \upsilon m$ и $\upsilon n \cdot \upsilon m = \upsilon s$. Группа G называется *вычислимой* (или *конструктивизируемой*), если существует нумерация υ группы G такая, что (G, υ) – конструктивная группа. Подгруппа H нумерованной группы (G, υ) называется *вычислимо перечислимой* в (G, υ), если множество $\upsilon^{-1}H$ вычислимо перечислимо.

Группа G называется *разрешимой*, если ряд коммутантов $G \geq G' \geq G'' \geq ... \geq G^{(n)} \geq ...$ группы G через конечное число шагов обрывается на единице.

Теорема 6. Пусть (G, υ) – вычислимо нумерованная разрешимая группа без кручения конечной размерности такая, что изолятор коммутанта $I(G')$ равен G'. Тогда любой ретракт H группы G – вычислимо перечислимая подгруппа группы (G, υ).

Доказательство. Используем индукцию по размерности $dim(G) = n$ группы G. Если $n = 1$, то G – подгруппа группы рациональных чисел. Отсюда $H = 1$, либо $H = G$, а потому H – вычислимо перечислимая подгруппа в (G, υ).

Пусть размерность группы G равна $m+1$ и для всех меньших размерностей теорема справедлива. Далее применим индукцию по ступени разрешимости $dec(G) = r$. Если $r = 1$, то G абелева группа. Так как H – сервантная подгруппа конечной размерности вычислимой группы G, то H вычислимо перечислима в (G, υ) .

Пусть $dec(G) = r + 1$ и для меньшей ступени разрешимости теорема справедлива. Так как коммутант G' является эндоморфно допустимой подгруппой группы G, то подгруппа $H \cap G'$ будет ретрактом группы G'. Так как ступень разрешимости подгруппы G' меньше, чем $r + 1$, значит по индукционному предположению подгруппа $H \cap G'$ вычислимо перечислима в (G', υ'), где υ' – ограничение υ на $I(G') = G'$. Из последнего равенства и сервантности ретракта H в G следует, что $I(H \cap G') = H \cap G'$. Следовательно, $H/H \cap G'$ – абелева группа без кручения конечной размерности. Отсюда и сервантности подгруппы H в G получаем, что подгруппа H вычислимо перечислима в (G, υ). Теорема доказана.

Следствие 7. Пусть $T_n^+(\mathbb{Q})$ группа треугольных матриц над полем рациональных чисел, где диаглнальные элементы положительны. Тогда любой ретракт H группы $T_n^+(\mathbb{Q})$ вычислимо перечислим в $(T_n^+(\mathbb{Q}), \upsilon)$, где υ – эффективная нумерация группы $T_n^+(\mathbb{Q})$, т.е. по номеру n можно эффективно найти матрицу υn и наоборот.

Следствие 8 [6]. При любом n любой ретракт группы всех унитреугольных матриц $UT_n(\mathbb{Q})$ размерности n над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ вычислим.

6 Заключение

Нахождение критериев ретрактности подгруппы данной группы является актуальной задачей теории групп. В данной статье найден критерий ретрактности абелевой подгруппы группы унитреугольных матриц произвольной конечной размерности над кольцом целых чисел. А также доказана вычислимость любого ретракта группы всех треугольных матриц любого конечного размера над полем рациональных чисел с положительными диагональными элементами. Таким образом, решены важные вопросы теории ретрактов и вычислимости групп. Они открывают путь для дальнейших исследований в этих областях математики.

Авторы выражают благодарность профессору В.А. Романькову за привлечение внимания к данной тематике и ценные советы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республик Казахстан, проект № 3953 (GF4)

Литература

[1] *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений.– М.: Наука, 1974. –360 с.

[2] *Roman'kov V.A.* Diophantine questions in the class of finitely generated nilpotent groups // J. Group Theory.–2016.–№19.– P. 497–514.

[3] *Baumslag G., Myasnikov A., Shpilrain V.* Open problems in combinatorial group theory // Contemporary Math., 296.– 2002.–P.1–38. Расширенная электронная версия: grouptheory.info, раздел Open Problems.

[4] *Myasnikov A., Roman'kov V.*Verbally closed subgroups of free groups // J. Group Theory.–2014.–№17.–P.29-40.

[5] *Романьков В.А., Хисамиев Н.Г.* Вербально и экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп // Алгебра и логика.–2013.– №4(52).–С.502–525.

[6] *Романьков В.А., Хисамиев Н.Г. , Конырханова А.А.* Ретракты нильпотентных групп. //Материалы международной научной конференции "Алгебра, анализ, дифференциальные уравнения и их приложения посвященной 60-летию академика НАН РК Джумадильдаева А.С. ("Институт математики и математического моделирования").– Алматы,2016.–С.40–42.

[7] *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. –М.:Наука.–1982.–288 с.

References

[1] *MagnusV., KarrasA., SoliterD.* Combinatorial theory of groups. Presentationofgroupsintermsformsandrelations.–M.: Nauka, 1974.–360 p.

[2] *Roman'kovV.A.* Diophantinequestionsintheclassoffinitelygeneratednilpotentgroups.// J. GroupTheory.–2016.–№19.–P. 497–514.

[3] *Baumslag G., Myasnikov A., Shpilrain V.* Open problems in combinatorial group theory// Contemporary Math., 296.– 2002.–P.1-38. Enlarged on-line version: grouptheory.info, раздел Open Problems.

[4] *Myasnikov A., Roman'kov V.* Verbally closed subgroups of free groups// J.Group Theory.–2014.–№17.–P. 29-40.

[5] *Roman'kov V.A., Khisamiev N.G.* Verbally and existentially closed subgroups of free nilpotent groups // Algebra and logic.–2013.– №4(52)/ 502-525.

[6] *Roman'kov V.A., Khisamiev N.G., Konyrkhanova A.A.* Retracts of nilpotent groups. // Materials of International scientific conference "Algebra, analysis, differential equations and their applications" devoted to 60-th anniversary of RK NAS academician Dzhumadildaev A.S. ("Institute of mathematics and math modeling").– Almaty,2016.-P.40–42.

[7] *Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I.* Foundations of groups theory.–M.:Nauka.– 1982.–288 p.