УДК 517.938

С.А. Айсагалиев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

Исследование по вариационному исчислению *

Предлагается метод решения задачи Лагранжа при наличии фазовых ограничений для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями без привлечения принципа Лагранжа. Получены необходимые и достаточные условия существования решения вариационной задачи, найдено допустимое управление и построено оптимальное решение путем сужения области допустимых управлений.
Основой предлагаемого метода решения вариационной задачи является принцип погружения. Суть принципа погружения состоит в том, что исходная вариационная задача с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений заменяется на равносильную задачу оптимального управления со свободным правым концом траектории. Такой подход стал возможным благодаря нахождению общего решения одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода.
Ключевые слова:принцип погружения, допустимое управление, оптимальное решение, минимизирующая последовательность.

S.A. Aisagaliev
The study on the calculus of variations

A method of solving Lagrange problem with phase constraints for the processes described by ordinary differential equations without the involvement of the Lagrange principle is supposed. Necessary and sufficient conditions for existence of solution of the variation problem are obtained, feasible control is found and optimal solution is constructed by narrowing the field of feasible controls.
The basis of the proposed method for solving the variation problem is the immersion principle. The essence of the immersion principle is that the original variation problem with the boundary conditions with phase and integral constraints is replaced by equivalent optimal control problem with a free right end of the trajectory. This approach is made possible by finding the general solution of a class of Fredholm integral equations of the first order.
Key words: immersion principle, feasible control, optimal solution, minimizing sequence.

С.Ә. Айсағалиев
Вариациялық қисап бойынша зерттеулер

Лагранж принципін қолданбай, жәй дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын фазалық шектеулері бар Лагранж есебін шешу әдісі ұсынылады. Вариациялық есептің шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған, ұйғарымды басқару табылған және ұйғарымды басқарулардың аймағын сығу арқылы тиімді шешім құрылған.

*Работа выполнена при поддержке Комитета Науки МОН РК, грант [№ 1050 / ГФ2.]

Вариациялық есепті шешу әдісінің негізі – батыру қағидасы. Батыру қағидасының мәні: фазалық және интегралдық шектеулері мен шеттік шарттары бар баста пқы вариациялық есебін траекторияның оң шеті еркін тиімді басқару есебіне ал мастыру болып табылады. Мұндай әдіс бір класстағы Фредгольмнің бірінші ретті интегралдық теңдеулерінің жалпы шешімін табу арқылы жүзеге асырылады.
Түйін сөздер: батыру қағидасы, ұйғарымды басқару, тиімді шешім, минималдаушы тізбек.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу: минимизировать функционал

$$J(u(\cdot),x_0,x_1)=\int_{t_0}^{t_1} F_0(x(t),u(t),x_0,x_1,t)dt \to inf \qquad (1)$$

при условиях

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)f(x,u,t),\ \ t\in I=[t_0,t_1] \qquad (2)$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0))=x_0, x(t_1)=x_1)\in S_0\times S_1=S\subset R^{2n} \qquad (3)$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t)\in G(t):G(t)=\{x\in R^n/\omega(t)\le F(x,t)\le\varphi(t),\ \ t\in I\}, \qquad (4)$$

а также интегральных ограничений

$$g_j(u(\cdot),x_0,x_1)\le 0,\ \ j=\overline{1,m_1};\ \ g_j(u(\cdot),x_0,x_1)=0,\ \ j=\overline{m_1+1,m_2}, \qquad (5)$$

$$g_j(u(\cdot),x_0,x_1)=\int_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t),u(t),x_0,x_1,t)dt,\ \ j=\overline{1,m_2}. \qquad (6)$$

где управление

$$u(\cdot)\in L_2(I,R^m). \qquad (7)$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ – матрицы с кусочно-непрерывными элементами соответственно порядков $n\times n$, $n\times r$, вектор функция $f(x,u,t)=(f_1(x,u,t),\dots,f_r(x,u,t))$ непрерывна по совокупности переменных $(x,u,t)\in R^n\times R^m\times I$, удовлетворяет условию Липшица по переменной x, т.е.

$$|f(x,u,t)-f(y,u,t)|\le l(t)|x-y|, \qquad \forall(x,u,t),(y,u,t)\in R^n\times R^m\times I \qquad (8)$$

и условию

$$|f(x,u,t)|\le c_0(|x|+|u|^2)+c_1(t),\ \ \forall(x,u,t), \qquad (9)$$

где $l(t) \geq 0$, $l(t) \in L_1(I, R^1)$, $c_0 = const > 0$, $c_1(t) \geq 0$, $c_1(t) \in L_1(I, R^1)$.

Вектор функция $F(x,t) = (F_1(x,t), \ldots, F_s(x,t))$ непрерывна по совокупности переменных $(x,t) \in R^n \times I$. Функция $f_0(x,u,x_0,x_1,t) = (f_{01}(x,u,x_0,x_1,t), \ldots, f_{0m_2}(x,u,x_0,x_1,$ $t))$ удовлетворяет условию

$$|f_0(x,u,x_0,x_1,t)| \leq c_2(|x| + |u|^2 + |x_0| + |x_1|) + c_3(t),$$

$$\forall (x,u,x_0,x_1,t), (y,u,x_0,x_1,t) \in R^n \times R^m \times R^n \times R^n \times I,$$

$$c_2 = const \geq 0, \;\; c_3(t) \geq 0, \;\; c_3(t) \in L_1(I, R^1).$$

Скалярная функция $F_0(x,u,x_0,x_1,t)$ определена и непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по переменным (x,u,x_0,x_1), $\omega(t)$, $\varphi(t)$, $t \in I$ – заданные s – мерные непрерывные функции. S – заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество из R^{2n}, моменты времени t_0, t_1 – фиксированы.

В частности, множество $S = \{(x_0,x_1) \in R^{2n}/H_j(x_0,x_1) \leq 0, j = \overline{1,p_1}; < a_j, (x_0,x_1) > = 0,$ $j = \overline{p_1+1,p_2}\}$, где $H_j(x_0,x_1)$, $j = \overline{1,p_1}$ – выпуклые функции, $a_j \in R^{2n}$, $j = \overline{p_1+1,p_2}$ – заданные векторы.

Заметим, что при выполнении условий (8), (9) для любого управления $u(\cdot) \in L_2(I,$ $R^m)$ и начального условия $x(t_0) = x_0$ дифференциальное уравнение (2) имеет, и притом единственное, решение $x(t)$, $t \in I$. Это решение имеет производную $\dot{x} \in L_2(I, R^n)$ и удовлетворяет уравнению (2) при почти всех $t \in I$.

Следует отметить, что интегральные ограничения вида

$$g_j(u(\cdot),x_0,x_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t),u(t),x_0,x_1,t)dt \leq 0, \;\; j = \overline{1,m_1}, \tag{10}$$

путем введения дополнительных переменных $d_j \geq 0$, $j = \overline{1,m_1}$, могут быть записаны в виде

$$g_j(u(\cdot),x_0,x_1) = -d_j, \;\; j = \overline{1,m_1}.$$

Пусть вектор $\overline{c} = (-d_1, \ldots, -d_{m_1}, 0, 0, \ldots, 0) \in R^{m_2}$, где $d_j \geq 0$, $j = \overline{1,m_1}$. Пусть множество $Q = \{\overline{c} \in R^{m_2}/d_j \geq 0, \;\; j = \overline{1,m_1}\}$, где $d_j \geq 0$, $j = \overline{1,m_1}$ – неизвестные числа.

Определение 1 *Тройка $(u_*(t), x_0^*, x_1^*) \in U \times S_0 \times S_1$ называется допустимым управлением для задачи (1) – (7), если краевая задача (2) – (7) имеет решение. Множество всех допустимых управлений обозначим через Σ, $\Sigma \subset U \times S_0 \times S_1$.*

Из данного определения следует, что для каждого элемента множества Σ выполняются: 1) решение $x_*(t)$, $t \in I$ дифференциального уравнения (2), исходящие из точки $x_0^* \in S_0$, удовлетворяют условию $x_*(t_1) = x_1^* \in S_1$, причем $(x_0^*, x_1^*) \in S_0 \times S_1 = S$; 2) выполнено включение $x_*(t) \in G(t)$, $t \in I$; 3) для каждого элемента множества Σ имеет место равенство $g(u(\cdot)), (x_0,x_1) = \overline{c}$, где $g(u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*) = (g_1(u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*), \ldots, g_{m_2}(u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*))$.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1 *Найти необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (2) – (7).*

Заметим, что задача оптимального управления (1) – (7) имеет решение тогда и только тогда, когда краевая задача (2) – (7) имеет решение.

Задача 2 *Найти допустимое управление* $(u_*(t), x_0^*, x_1*^*) \in \Sigma \subset U \times S_0 \times S_1$.

Если задача 1 имеет решение, то существует допустимое управление.

Задача 3 *Найти оптимальное управление* $\overline{u}_*(t)\in U(t)$, *точку* $(\overline{x}_0^*, \overline{x}_1^*)\in S_0 \times S_1 = S$ *и оптимальную траекторию* $\overline{x}_*(t; t_0, x_0^*)$, $t \in I$, *где* $\overline{x}_*(t) \in G(t)$, $t \in I$, $\overline{x}_*(t_1) = \overline{x}_1^* \in S_1$, $g_j(\overline{u}_*(\cdot), \overline{x}_0^*, \overline{x}_1^*) \leq 0$, $j = \overline{1, m_1}$, $g_j(\overline{u}_*(\cdot), \overline{x}_0^*, \overline{x}_1^*) = 0$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$, $J(\overline{u}_*(\cdot), \overline{x}_0^*, \overline{x}_1^*) = \inf J(\overline{u}(\cdot), \overline{x}_0, \overline{x}_1)$, $\forall(\overline{u}(\cdot), \overline{x}_0, \overline{x}_1) \in L_2(I, R^m) \times S_0 \times S_1$.

Одним из методов решения задачи вариационного счисления является принцип Лагранжа. Принцип Лагранжа позволяет свести решение исходной задачи к поиску экстремума функционала Лагранжа, полученного путем введения вспомогательных переменных (множителей Лагранжа).

Принципом Лагранжа называется утверждение о существовании множителей Лагранжа, удовлетворяющих совокупности условий, когда исходная задача имеет слабый локальный минимум. Принцип Лагранжа дает необходимое условие слабого локального минимума и он не исключает существование других методов решения задач вариационного исчисления не связанных с функционалом Лагранжа.

Принципу Лагранжа посвящены работы [1-3]. Единый подход к различным задачам на экстремум на основе принципа Лагранжа изложен в [4].

В классическом вариационном исчислений полагается решение дифференциального уравнения (2) принадлежит пространству $C^1(I, R^n)$, а управление $u(t)$, $t \in I$ из пространства $C(I, R^m)$, а в задачах оптимального управления [5] решение $x(t) \in KC^1(I, R^n)$, а управление $u(t) \in KC(I, R^m)$. В данной работе управление $u(t)$, $t \in I$ выбирается из $L_2(I, R^m)$, а решение $x(t)$, $t \in I$ является абсолютно непрерывной функцией на отрезке $I = [t_0, t_1]$. Для данного случая существование и единственность решения начальной задачи для уравнения (2) приведены в [4, 6-8].

Цель данной работы создание метода решения задачи вариационного исчисления для процессов описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с фазовыми и интегральными ограничениями, отличающийся от известных методов, основанных на принципе Лагранжа. Она является продолжением научных исследований изложенных [9-20].

2. Принцип погружения

Пусть вектор функция $f_0(x, u, x_0, x_1, t) = (f_{01}(x, u, x_0, x_1, t), \ldots, f_{0m_2}(x, u, x_0, x_1, t))$. Введем вектор функцию $\eta(t) = (\eta_1(t), \ldots, \eta_{m_2}(t))$, $t \in I$ следующим образом

$$\eta(t) = \int_{t_0}^{t} f_0(x(\tau), u(\tau), x_0, x_1, \tau) d\tau, \quad t \in I.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{\eta}(t) = f_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t),$$

$$\eta(t_0) = 0,\ \eta(t_1) = \overline{c} \in Q,\ (x_0, x_1) \in S,\ u(t) \in L_2(I, R^m),\ x(t) \in G(t).$$

Теперь задачи оптимального управления (1) – (7) запишутся в виде: минимизировать функционал

$$J(u(\cdot), x_0, x_1) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t)dt \to \inf \tag{11}$$

при условиях

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x, u, t),\quad t \in I, \tag{12}$$

$$\dot{\eta}(t) = f_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t),\quad t \in I, \tag{13}$$

$$(x_0, x_1) \in S = S_0 \times S_1,\quad \eta(t_0) = 0,\quad \eta(t_1) = \overline{c} \in Q, \tag{14}$$

$$x(t) \in G(t),\quad u(\cdot) \in L_2(I, R^m),\quad t \in I. \tag{15}$$

Отметим, что задачи (1) – (7) и (11) – (15) равносильны.

Введем следующие векторы и матрицы

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix},\ \ A_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O_{n,m_2} \\ O_{m_2,n} & O_{m_2,m_2} \end{pmatrix},\ \ B_1(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ O_{m_2,r} \end{pmatrix},\ \ B_2 = \begin{pmatrix} O_{n,m_2} \\ I_{m_2} \end{pmatrix},$$

$$\xi(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) = x_0 \\ \eta(t_0) = 0 \end{pmatrix} = \xi_0,\ \ \xi(t_1) = \begin{pmatrix} x(t_1) = x_1 \\ \eta(t_1) = \overline{c} \end{pmatrix},\ \ P_1 = (I_n, O_{n,m_2}),$$

где $O_{k,q}$ – прямоугольная матрица порядка $k \times q$ с нулевыми элементами, I_n – единичная матрица порядка $n \times n$.

Тогда задача оптимального управления (11) – (15) имеет вид: минимизировать функционал

$$J(u(\cdot), x_0, x_1) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(P_1\xi(t), u(t), x_0, x_1, t)dt \to \inf \tag{16}$$

при условиях

$$\dot{\xi} = A_1(t)\xi + B_1(t)f(P_1\xi, u, t) + B_2 f_0(P_1\xi, u, x_0, x_1, t), \tag{17}$$

$$\xi(t_0) = \xi_0 \in S_0 \times O_{m_2,1},\quad \xi(t_1) = \xi_1 \in S_1 \times Q, \tag{18}$$

$$P_1\xi(t) \in G(t),\quad u(\cdot) \in L_2(I, R^m),\quad \overline{c} \in Q. \tag{19}$$

Пусть множество

$$\Gamma = \{d \in R^{m_1} / d \geq 0\}. \tag{20}$$

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)w_1(t) + B_2 w_2(t),\quad t \in I, \tag{21}$$

$$w_1(\cdot) \in L_2(I, R^r), \quad w_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{22}$$

$$y(t_0) = \xi(t_0) = \xi_0 \in S_0 \times O_{m_2,1}, \quad y(t_1) = \xi(t_1) = \xi_1 \in S_1 \times Q. \tag{23}$$

Основой принципа погружения являются следующие теоремы о свойствах решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)u(t)dt = a, \tag{24}$$

где $K : L_2(I, R^k) \to R^{n_1}$, $K(t_0, t)$ – заданная матрица порядка $n_1 \times k$ с кусочно-непрерывными элементами по t при каждом фиксированном t_0, $t_0 \in \Delta_0 \subset R^1$, $t_1 \in \Delta_1 \subset R^1$, $\Delta_0 \cap \Delta_1 = \emptyset$, $\emptyset$ – пустое множество, $a \in R^{n_1}$ – любой заданный вектор, $u(\cdot) \in L_2(I, R^k)$ – искомая функция.

Теорема 1 *Интегральное уравнение (24) при любом фиксированном $a \in R^{n_1}$ имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)K^*(t_0, t)dt, \tag{25}$$

порядка $n_1 \times n_1$ является положительно определенной, где $(*)$ – знак транспонирования.

Теорема 2 *Пусть матрица $C(t_0, t_1)$ положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (24) имеет вид*

$$u(t) = K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)a + v(t) - K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)\int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)v(t)dt, \quad t \in I, \tag{26}$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^k)$ – произвольная функция, $a \in R^{n_1}$ – любой вектор.

Доказательство теорем 1, 2 приведены в работах [9, 18].

Пусть матрица $B_3(t) = (B_1(t), B_2)$ порядка $(n + m_2) \times (m_2 + r)$, а вектор функция $w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in L_2(I, R^{r+m_2})$. Легко убедиться в том, что управление $w(\cdot) \in L_2(I, R^{r+m_2})$, которое переводит траекторию системы (19) из любого начального состояния ξ_0 в любое желаемое конечное состояние ξ_1, является решением интегрального уравнения

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B_3(t)w(t)dt = a, \tag{27}$$

где $\Phi(t, \tau) = \lambda(t)\lambda^{-1}(\tau)$, $\lambda(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\rho} = A_1(t)\rho$, вектор

$$a = a(\xi_0, \xi_1) = \Phi(t_0, t_1)\xi_1 - \xi_0. \tag{28}$$

Как следует из (24), (27), матрица $K(t_0,t)=\Phi(t_0,t)B_3(t)$, при $n_1=n+m_2$, $k=r+m_2$. Для интегрального уравнения (25) применимы утверждения теорем 1, 2. По исходным данным системы (21) – (23) определим следующие матрицы и векторы

$$T(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B_3(t)B_3^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)K^*(t_0,t)dt=C(t_0,t_1),$$

$$\Lambda_1(t,\xi_0,\xi_1)=B_3^*\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a=K^*(t_0,t_1)C^{-1}(t_0,t_1)a=$$

$$=\begin{pmatrix}B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a\\ \\ B_2^*\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a\end{pmatrix},\quad N_1(t)=-B_3^*(t)\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)=$$

$$=-K^*(t_0,t)C(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)=\begin{pmatrix}-B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)\\ \\ -B_2^*\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N_{11}(t)\\ \\ N_{12}(t)\end{pmatrix},$$

$$\Lambda_2(t,\xi_0,\xi_1)=\Phi(t,t_0)T(t,t_1)T^{-1}(t_0,t_1)\xi_0+\Phi(t,t_0)T(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)\xi_1,$$

$$N_2(t)=-\Phi(t,t_0)T(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),\ \ t\in T,$$

$$T(t,t_1)=\int\limits_{t}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)B_3(\tau)B_3^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)d\tau,\ \ T(t_0,t)=T(t_0,t_1)-T(t,t_1),\ \ t\in I,$$

где вектор a определяется по формуле (26)

Теорема 3 *Пусть матрица $T(t_0,\,t_1)>0$. Тогда управление $w(\cdot)=(w_1(\cdot),w_2(\cdot))\in L_2(I,$ $R^{r+m_2})$ переводит траекторию системы (21) – (23) из начальной точки $\xi_0\in S_0\times O_{m_2,1}$ в конечное состояние $\xi_1\in S_1\times Q$ тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered}w_1(t)\in W_1=\{w_1(\cdot)\in L_2(I,R^r)/w_1(t)=v_1(t)+B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a+\\ +N_{11}(t)z(t_1,v),\ \ t\in I,\ \ \forall v_1(\cdot),\ \ v_1(\cdot)\in L_2(I,R^r)\},\end{gathered}\tag{29}$$

$$\begin{gathered}w_2(t)\in W_2=\{w_2(\cdot)\in L_2(I,R^{m_2})/w_2(t)=v_2(t)+B_2^*\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a+\\ +N_{12}(t)z(t_1,v),\ \ t\in I,\ \ \forall v_2(\cdot),\ \ v_2(\cdot)\in L_2(I,R^{m_2})\},\end{gathered}\tag{30}$$

где $v(t)=(v_1(t),v_2(t))$, $v_1(\cdot)\in L_2(I,R^r)$, $v_2(\cdot)\in L_2(I,R^{m_2})$ – произвольные функции. Функция $z(t,v)=z(t,v_1,v_2)$, $t\in I$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot z=A_1z+B_1(t)v_1(t)+B_2v_2(t),\ \ z(t_0)=0,\ \ t\in I,\tag{31}$$

$$v_1(\cdot)\in L_2(I,R^r),\ \ v_2(\cdot)\in L_2(I,R^{m_2}.\tag{32}$$

Решение дифференциального уравнения (21) соответствующее управлению (29), (30), имеет вид

$$y(t)=z(t)+\Lambda_2(t,\xi_0,\xi_1)+N_2(t)z(t_1,v),\ \ t\in I,\tag{33}$$

где $z(t)=z(t_1,v)$, $t\in I$.

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теорем 1, 2. Как следует из вышеизложенного, решение краевой задачи (21) – (23) сводится к нахождению общего решения интегрального уравнения (27). Интегральное уравнение (27) является частным случаем (24), где $K(t_0,t) = \Phi(t_0,t)B_3(t)$. Далее, путем замены $K(t_0,t)$ на $\Phi(t_0,t)B_3(t)$ получим $C(t_0,t_1) = T(t_0,t_1)$ (см. (25)). Из (26) следует (29), (30). Дифференциальное уравнение (31) с управлением (32) и соотношение (33) непосредственно следуют из формул

$$z(t,v) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B_3(\tau)v(\tau)d\tau, \quad z(t_1,v) = \Phi(t_1,t_0)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B_3(t)v(t)dt.$$

Легко убедиться в том, что $y(t_0) = \xi_0$, $y(t_1) = \xi_1$. Теорема доказана.

Отметим, что: 1) множества $W_1 = W_1(t) \subset L_2(I,R^r)$, $W_2 = W_2(t) \subset L_2(I,R^{m_2})$ содержат все множества функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, $t \in I$, для которых краевая задача (21) – (23) имеет решение; 2) если $w_1(t) \in W_1$, $w_2(t) \in W_2$, то решение системы (21) – (23) определяется формулой (33); 3) вне множества W_1, W_2 не существует управлений, для которых краевая задача (21) – (23) имеет решение; 4) теорема 3 позволяет заменить краевую задачу (21) – (23) на начальную задачу (31) – (33).

Лемма 1 *Пусть матрица $T(t_0,t_1) > 0$. Тогда краевая задача (17) – (20) равносильна следующей задаче*

$$w_1(t) \in W_1, \ w_1(t) = f(P_1y(t),u(t),x_0,x_1,t), \ t \in I, \tag{34}$$

$$w_2(t) \in W_2, \ w_2(t) = f_0(P_1y(t),u(t),x_0,x_1,t), \ t \in I, \tag{35}$$

$$p(t) = F(P_1y(t),t) \in V = V(t) = \{p(\cdot) \in L_2(I,R^s)/ \ \omega(t) \le p(t) \le \varphi(t), \ t \in I\}, \tag{36}$$

$$\dot z = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2v_2(t), \ z(t_0) = 0, \ t \in I, \tag{37}$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I,R^r), \ v_2(\cdot) \in L_2(I,R^{m_2}), \tag{38}$$

$$(x_0,x_1) \in S_0 \times S_1 = S \subset R^{2n}, \ u(\cdot) \in L_2(I,R^m), \ d \in \Gamma, \tag{39}$$

где функция $y(t)$, $t \in I$ определяется по формуле (33).

Доказательство. Лемма 1 утверждает, что краевая задача (17) – (20) имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены соотношения (34) – (39) .

В самом деле, если выполнены соотношения (34) – (39), то $y(t) = \xi(t)$, $t \in I$, причём $y(t_0) = \xi(t_0) = \xi_0$, $y(t_1) = \xi(t_1) = \xi_1$ и выполнены включения (19), (20).

Пусть краевая задача (17) – (20) имеет решение. Это возможно тогда и только тогда, когда $f(P_1\xi(t),u(t),t) \in W_1$, $f_0(P_1\xi(t),u(t),x_0,x_1,t) \in W_2$ в силу теоремы 3. Эти включения равносильны равенствам (34), (35), где $z(t)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (37) с управлениями (38). Включение $P_1\xi(t) \in G(t)$, $t \in I$ имеет вид (36), а соотношения (19), (20) запишется в виде (39). Лемма доказана.

Лемма 2 *Пусть матрица $T(t_0,t_1) > 0$. Тогда краевая задача оптимального управления с ограничениями (1) – (7) равносильна следующей задаче: минимизировать функционал*

$$I(u(\cdot),p(\cdot),v_1(\cdot),v_2(\cdot),x_0,x_1,d) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(P_1y(t),u(t),x_0,x_1,t)dt \to \inf \tag{40}$$

при условиях

$$I_1(u(\cdot),p(\cdot),v_1(\cdot),v_2(\cdot),x_0,x_1,d)=\int\limits_{t_0}^{t_1}F_1(q(t),t)dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}[|w_1(t)-$$
$$-f(P_1y(t),u(t),t)|^2+|w_2(t)-f_0(P_1y(t),u(t),x_0,x_1,t)|^2+ \quad (41)$$
$$+|p(t)-F(P_1y(t),t)|^2]dt=0,$$

$$\dot z=A_1(t)z+B_1(t)v_1(t)+B_2v_2(t),\ z(t_0)=0,\ t\in I, \quad (42)$$

$$v_1(\cdot)\in L_2(I,R^r),\ v_2(\cdot)\in L_2(I,R^{m_2}), \quad (43)$$

$$(x_0,x_1)\in S_0\times S_1=S\subset R^{2n},\ p(t)\in V(t),\ u(\cdot)\in L_2(I,R^m),\ d\in\Gamma, \quad (44)$$

где $w_1(t)\in W_1$, $w_2(t)\in W_2$, функция $y(t)$, $t\in I$ определяется по формуле (33).

Доказательство. Доказательство следует из леммы 1. Значение функционала $I_1\geq 0$. Функционал $I_1=0$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства (34) – (36), соотношения (37) – (39) совпадают с (42) – (44). Функционал (1) запишется в виде (40). Лемма доказана.

Функция $F_1(q(t),t)=|w_1(t)-f(P_1y(t),u(t),x_0,x_1,t)|^2+|w_2(t)-f_0(P_1y(t),u(t),x_0,x_1,t)|^2+|p(t)-F(P_1y(t),t)|^2$, где $w_1(t)\in W_1$, $w_2(t)\in W_2$, $y(t)=z(t,v)+\Lambda_2(t,\xi_0,\xi_1)+N_2(t)z(t_1,v)$, $t\in I$, $q(t)=(z(t,v),z(t_1,v),u(t),p(t),v_1(t),v_2(t),x_0,x_1,d)$.

Отметим, что:

1) Поскольку исходная задача (1) – (7) равносильна (40) – (44), то задача (1) – (7) имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены соотношения (41) – (44);

2) Так как значение $I_1\geq 0$, то для существования решения краевой задачи (2) – (7) необходимо и достаточно, чтобы $\inf I_1(u,p,v_1,v_2,x_0,x_1,d)=0$ при условиях (37) – (39).

3) Переход от исходной краевой задачи (2) – (7) к начальной задаче оптимального управления $I_1(u,p,v_1,v_2,x_0,x_1,d)\to\inf$ при условиях (37) – (39) называется принципом погружения.

3. Существование решения

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$I_1(u(\cdot),p(\cdot),v_1(\cdot),v_2(\cdot),x_0,x_1,d)=\int\limits_{t_0}^{t_1}F_1(q(t),t)\to\inf \quad (45)$$

при условиях

$$\dot z=A_1(t)z+B_1(t)v_1(t)+B_2v_2(t),\ z(t_0)=0,\ t\in I \quad (46)$$

$$v_1(\cdot)\in L_2(I,R^r),\ v_2(\cdot)\in L_2(I,R^{m_2}), \quad (47)$$

$$p(t)\in V(t),\ u(\cdot)\in L_2(I,R^m),\ (x_0,x_1)\in S_0\times S_1=S,\ d\in\Gamma. \quad (48)$$

Введём следующие обозначения: $H = L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^s) \times L_2(I, R^r) \times L_2(I, R^{m_2}) \times R^n \times R^n \times R^{m_1}$, $X = L_2(I, R^m) \times V \times L_2(I, R^r) \times L_2(I, R^{m_2}) \times S_0 \times S_1 \times \Gamma \subset H$, вектор-функция $\theta(t) = (u(t), p(t), v_1(t), v_2(t), x_0, x_1, d) \in X \subset H$, $q(t) = (z(t), z(t_1), \theta(t))$.

Оптимизационная задача (47) – (50) может быть представлена в виде:

$$I_1(\theta(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_1(q(t), t) \to \inf, \ \theta(\cdot) \in X \subset H.$$

Пусть множество $X_* = \{\theta_*(\cdot) \in X | \ I_1(\theta_*(\cdot)) = \inf\limits_{\theta \in X} I_1(\theta(\cdot))\}$.

Лемма 3 *Пусть матрица $T(t_0, t_1) > 0$. Для того чтобы краевая задача (2) – (7) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} I_1(\theta_n) = I_{1*} = \inf\limits_{\theta \in X} I_1(\theta) = 0$, где $\{\theta_n(\cdot)\} \subset X$ - минимизирующая последовательность в задаче (45) – (48)*

Доказательство леммы следует из теоремы 3 и лемм 1, 2.

Теорема 4 *Пусть матрица $T(t_0, t_1) > 0$, функция $F_1(q, t)$ определена и непрерывна по совокупности переменных (q, t) вместе с частными производными по q и удовлетворяет условиям Липшица*

$$|F_{1q}(q + \Delta q, t) - F_{1q}(q, t)| \le l|\Delta q|, \ t \in I, \tag{49}$$

где $F_{1q}(q,t)$=$(F_{1z}(q,t), F_{1z(t_1)}(q,t), F_{1u}(q,t), F_{1p}(q,t), F_{1v_1}(q,t), F_{1v_2}(q,t), F_{1x_0}(q,t)$, $F_{1x_1}(q,t)$, $SF_{1d}(q,t))$, $q = (z, z(t_1), u, p, v_1, v_2, x_0, x_1, d) \in R^{n+m_2} \times R^{n+m_2} \times R^m \times R^s \times R^r \times R^{m_2} \times R^n \times R^n \times R^{m_1}$, $\Delta q = (\Delta z, \Delta z(t_1), \Delta u, \Delta p, \Delta v_1, \Delta v_2, \Delta x_0, \Delta x_1, \Delta d)$, $l = const > 0$.

Тогда функционал (45) при условиях (46) – (48) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент

$$I_1'(\theta) = (I_{1u}'(\theta), I_{1p}'(\theta), I_{1v_1}'(\theta), I_{1v_2}'(\theta), I_{1x_0}'(\theta), I_{1x_1}'(\theta), I_{1d}'(\theta)) \in H$$

в любой точке $\theta \in X$ вычисляется по формуле

$$\begin{gathered} I_{1u}'(\theta) = F_{1u}(q(t), t), \ I_{1p}'(\theta) = F_{1p}(q(t), t), \ I_{1v_1}'(\theta) = F_{1v_1}(q(t), t) - B_1^*(t)\psi(t), \\ I_{1v_2}'(\theta) = F_{1v_2}(q(t), t) - B_2^*\psi(t), \ I_{1x_0}'(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{1x_0}(q(t), t)dt, \\ I_{1x_1}'(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{1x_1}(q(t), t)dt, \ I_{1d}'(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{1d}(q(t), t)dt, \end{gathered} \tag{50}$$

где $z(t)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (46), а функция $\psi(t)$, $t \in I$ – решение сопряжённой системы

$$\dot{\psi} = F_{1z}(q(t), t) - A_1^*(t)\psi, \ \psi(t_1) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} F_{1z(t_1)}(q(t), t)dt. \tag{51}$$

Кроме того, градиент $I_1'(\theta)$, $\theta \in X$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|I_1'(\theta_1) - I_1'(\theta_2)\| \le K\|\theta_1 - \theta_2\|, \ \forall \theta_1, \theta_2 \in X, \tag{52}$$

где $K = const > 0$.

Доказательство. Пусть $\theta(t), \theta(t)+\Delta\theta(t) \in X,\ z(t,v_1,v_2),\ z(t,v_1+\Delta v_1, v_2+\Delta v_2)$, $t \in I$ – решения системы (46), (47). Пусть $z(t,v_1+\Delta v_1,v_2+\Delta v_2) = z(t,v_1,v_2)+\Delta z(t)$, $t \in I$. Тогда

$$|\Delta z(t)| \le C_1\|\Delta v_1\| + C_2\|\Delta v_2\|. \tag{53}$$

Приращение функционала (см. (49))

$$\begin{gathered}\Delta I_1 = I_1(\theta+\Delta\theta) - I_1(\theta) = \int_{t_0}^{t_1}[F_1(q(t)+\Delta q(t),t) - F_1(q(t),t)]dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1}[\Delta u^*(t)F_{1u}(q(t),t) + \Delta p^*(t)F_{1p}(q(t),t) + \Delta v_1^*(t)F_{1v_1}(q(t),t) + \\ + \Delta v_2^*(t)F_{1v_2}(q(t),t) + \Delta x_0^* F_{1x_0}(q(t),t) + \Delta x_1^* F_{1x_1}(q(t),t) + \Delta d^* F_{1d}(q(t),t) + \\ + \Delta z^*(t)F_{1z}(q(t),t) + \Delta z^*(t_1)F_{1z(t_1)}(q(t),t)]dt + \textstyle\sum_{i=1}^{9} R_i,\end{gathered} \tag{54}$$

где $|R_1| \le l_1\int_{t_0}^{t_1}|\Delta u(t)||\Delta q(t)|dt$, $|R_2| \le l_2\int_{t_0}^{t_1}|\Delta p(t)||\Delta q(t)|dt$, $|R_3| \le l_3\int_{t_0}^{t_1}|\Delta v_1(t)||\Delta q(t)|dt$, $|R_4| \le l_4\int_{t_0}^{t_1}|\Delta v_2(t)||\Delta q(t)|dt$, $|R_5| \le l_5\int_{t_0}^{t_1}|\Delta x_0||\Delta q(t)|dt$, $|R_6| \le l_6\int_{t_0}^{t_1}|\Delta x_1||\Delta q(t)|dt$, $|R_7| \le l_7\int_{t_0}^{t_1}|\Delta d||\Delta q(t)|dt$, $|R_8| \le l_8\int_{t_0}^{t_1}|\Delta z(t)||\Delta q(t)|dt$, $|R_9| \le l_9\int_{t_0}^{t_1}|\Delta z(t_1)||\Delta q(t)|dt$ в силу условия Липшица (49). Заметим, что (см. (51), (53))

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\Delta z^*(t_1)F_{1z(t_1)}(q(t),t)dt = \ & -\int_{t_0}^{t_1}[\Delta v_1^*(t)B_1^*(t) + \Delta v_2^*(t)B_2^*]\psi(t)dt - \\ & -\int_{t_0}^{t_1}\Delta z^*(t)F_{1z}(q(t),t)dt.\end{aligned} \tag{55}$$

Из (54), (55) имеем

$$\begin{gathered}\Delta I_1 = \int_{t_0}^{t_1}\{\Delta u^*(t)F_{1u}(q(t),t) + \Delta p^*(t)F_{1p}(q(t),t) + \Delta v_1^*(t)[F_{1v_1}(q(t),t) - B_1^*(t)\psi(t)] + \\ + \Delta v_2^*(t)[F_{1v_2}(q(t),t) - B_2^*\psi(t)] + \Delta x_0^* F_{1x_0}(q(t),t) + \Delta x_1^* F_{1x_1}(q(t),t) + \\ + \Delta d^* F_{1d}(q(t),t)\}dt + \sum_{i=1}^{9} R_i = < I_1'(\theta), \Delta\theta >_H + R,\end{gathered}$$

где $R = \sum\limits_{i=1}^{9} R_i$, $|R| \le C_3\|\Delta\theta\|^2$, $\dfrac{|R|}{\|\Delta\theta\|} \to 0$, при $\|\Delta\theta\| \to 0$.

Отсюда следуют соотношения (50). Пусть $\theta_1 = (u+\Delta u, p+\Delta p, v_1+\Delta v_1, v_2+\Delta v_2, x_0+\Delta x_0, x_1+\Delta x_1, d+\Delta d)$, $\theta_2 = (u,p,v_1,v_2,x_0,x_1,d) \in X$. Так как

$$|I_1'(\theta_1) - I_1'(\theta_2)|^2 \le l_{10}|\Delta q(t)|^2 + l_{11}|\Delta\psi(t)|^2 + l_{12}|\Delta\theta|^2,$$

$$|\Delta q(t)| \leq l_{13}\|\Delta\theta\|, |\Delta\psi(t)| \leq l_{14}\|\Delta\theta\|,$$

то

$$\|I_1'(\theta_1) - I_1'(\theta_2)\|^2 = \int\limits_{t_0}^{t_1} |I_1'(\theta_1) - I_1'(\theta_2)|^2 dt \leq l_{15}\|\Delta\theta\|^2,$$

где $l_i = const > 0$, $i = \overline{10, 15}$. Отсюда следует оценка (52), где $K = \sqrt{l_{15}}$. Теорема доказана.

Лемма 4 *Пусть матрица $T(t_0, t_1) > 0$, функция $F_1(q, t)$ выпукла, по переменной $q \in R^N$, $N = 4n + m + s + r + m_1$, т.е.*

$$F_1(\alpha q_1 + (1-\alpha)q_2) \leq \alpha F_1(q_1, t) + (1-\alpha)F_1(q_2, t), \ \forall q_1, q_2 \in R^N, \forall\alpha, \ \alpha \in [0, 1]. \quad (56)$$

Тогда функционал (45) при условиях (46) – (48) является выпуклым.

Доказательство. Пусть $\theta_1, \theta_2 \in X$, $\alpha \in [0, 1]$. Можно показать, что

$$z(t, \alpha v_1 + (1-\alpha)\overline{v}_1, \alpha v_2 + (1-\alpha)\overline{v}_2) = \alpha z(t, v_1, v_2) + (1-\alpha) z(t, \overline{v}_1, \overline{v}_2),$$
$$\forall (v_1, v_2), \ (\overline{v}_1, \overline{v}_2) \in L_2(I, R^{r+m_2}).$$

Тогда

$$I_1(\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_1(\alpha q_1(t) + (1-\alpha)q_2(t))dt \leq \alpha I_1(\theta_1) + (1-\alpha)I_1(\theta_2),$$

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in X, \ \theta_1 = (u_1, p_1, v_1, v_2, x_0, x_1, d), \ \theta_2 = (\overline{u}_1, \overline{p}_1, \overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{d}).$$

Лемма доказана.

Начальная задача оптимального управления (45) – (48) может быть решена численными методами решения экстремальных задач [21-23]. Введем следующие множества

$$U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/\|u\| \leq \beta\},$$
$$V_1(I, R^r) = \{v_1(\cdot) \in L_2(I, R^r)| \ \|v_1\| \leq \beta\},$$
$$V_2(I, R^{m_2}) = \{v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2})| \ \|v_2\| \leq \beta\}),$$
$$\Gamma_1 = \{d \in R^{m_1}/d \geq 0, \ |d| \leq \beta\},$$

$\beta > 0$ – достаточно большое число. Строим последовательности $\{\theta_n\} = \{u_n, p_n, v_1^n, v_2^n, x_0^n, x_1^n, d_n\} \subset X_1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ по алгоритму

$$\begin{gathered}
u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n I'_{1u}(\theta_n)], \ p_{n+1} = P_V[p_n - \alpha_n I'_{1p}(\theta_n)], \\
v_1^{n+1} = P_{V_1}[v_1^n - \alpha_n I'_{1v_1}(\theta_n)], \ v_2^{n+1} = P_{V_2}[v_2^n - \alpha_n I'_{1v_2}(\theta_n)], \\
x_0^{n+1} = P_{S_0}[x_0^n - \alpha_n I'_{1x_0}(\theta_n)], \ x_1^{n+1} = P_{S_1}[x_1^n - \alpha_n I'_{1x_1}(\theta_n)], \\
d_{n+1} = P_{\Gamma_1}[d_n - \alpha_n I'_{1d}(\theta_n)], \ n = 0, 1, 2, \ldots, \\
0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{K + 2\varepsilon}, \ \varepsilon > 0,
\end{gathered} \quad (57)$$

где $P_\Omega[\cdot]$ – проекция точки на множество Ω, $K = const > 0$ из (52).

Теорема 5 *Пусть выполнены условия теоремы 4, и пусть, кроме того, функция* $F_1(q, t)$ *выпукла по переменной* $q \in R^N$ *и последовательность* $\{\theta_n\} \subset X_1$ *определяется по формуле (57). Тогда:*

1) достигается нижняя грань функционала (45) при условиях (46) – (48)

$$\inf_{\theta \in X_1} I_1(\theta) = I_1(\theta_*) = \min_{\theta \in X_1} I_1(\theta),\ \theta_* \in X_1;$$

2) последовательность $\{\theta_n\} \subset X_1$ *является минимизирующей,* $\lim_{n\to\infty} I_1(\theta_n) = I_{1*} = \inf_{\theta \in X_1} I_1(\theta)$*;*

3) Последовательность $\{\theta_n\} \subset X_1$ *слабо сходится к точке* $\theta_* \in X_1$, $u_n \xrightarrow{сл} u_*$, $p_n \xrightarrow{сл} p_*$, $v_1^n \xrightarrow{сл} v_1^*$, $v_2^n \xrightarrow{сл} v_2^*$, $x_0^n \to x_0^*$, $x_1^n \to x_1^*$, $d_n \to d_*$ *при* $n \to \infty$, *где* $\theta_* = (u_*, p_*, v_1^*, v_2^*, x_0^*, x_1^*, d_*) \in X_1$*;*

4) Для того, чтобы задача (2) – (7) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n\to\infty} I_1(\theta_n) = I_{1*} = 0$*;*

5) Справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0 \le I_1(\theta_n) - I_{1*} \le \frac{C_0}{n},\ n = 1, 2, \dots,\ C_0 = const > 0. \tag{58}$$

Доказательство. Так как функция $F_1(q, t)$, $t \in I$ выпукла, то по утверждению леммы 4, функционал $I_1(\theta)$, $\theta \in X_1$ является выпуклым на слабо бикомпактном множестве X_1. Следовательно, $I_1(\theta) \in C^1(X_1)$ слабо полунепрерывен снизу на слабо бикомпактном множестве X_1 и достигает нижней грани в X_1. Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Используя свойства проекции точки на выпуклом замкнутом множестве X_1 и учитывая, что $I_1(\theta) \in C^{1,1}(X_1)$ можно показать, что $I_1(\theta_n) - I_1(\theta_{n+1}) \ge \varepsilon\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что: 1) числовая последовательность $\{I_1(\theta_n)\}$ строго убывает; 2) $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как функционал является выпуклым и множество X_1 ограничено, то выполняется неравенство

$$0 \le I_1(\theta_n) - I_1(\theta_*) \le C_1\|\theta_n - \theta_{n+1}\|,\ C_1 = const > 0,\ n = 0, 1, 2, \dots. \tag{59}$$

Отсюда с учётом того, что $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$, имеем: последовательность $\{\theta_n\}$ является минимизирующей $\lim_{n\to\infty} I_1(\theta_n) = I_1(\theta_*) = \inf_{\theta \in X_1} I_1(\theta)$.

Поскольку $\{\theta_n\} \subset X_1$, X_1 – слабо бикомпактно, то $\theta_n \xrightarrow{сл} \theta_*$ при $n \to \infty$.

Как следует из леммы 3, если значение $I_1(\theta_*) = 0$, то задача оптимального уравнения (1) – (7) имеет решение.

Оценка (58) непосредственно следует из неравенств (59), $I_1(\theta_n) - I_1(\theta_{n+1}) \ge \varepsilon\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2$.

Выше были кратко изложены основные этапы доказательства теоремы. Подробное доказательство аналогичной теоремы приведено в [20]. Теорема доказана.

Для случая, когда функция $F_1(q, t)$ не является выпуклой по переменной q, верна следующая теорема.

Теорема 6 *Пусть выполнены условия теоремы 4, последовательность* $\{\theta_n\} \subset X_1$ *определяется по формуле (57). Тогда: 1) значение функционала* $I_1(\theta_n)$ *строго убывает при* $n = 0, 1, 2, \dots$*; 2)* $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство теоремы следует из теоремы 5.

Из вышеприведенных результатов следует: 1) если $\theta_*{=}(u_*, p_*, v_1^*, v_2^*, x_0^*, x_1^*, d_*){\in}X_1$ – решение задачи оптимального управления (45) – (48), для которого $I_1(\theta_*) = 0$, то $(u_* = u_*(t), x_0^*, x_1^*) \in \Sigma \subset U \times S_0 \times S_1$ – допустимое управление; 2) функция $x_*(t; t_0, x_0^*)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (2), удовлетворяет условиям: $x(t_1; t_0, x_0^*) = x_1^*$, $x_*(t; t_0, x_0^*) \in G(t)$, $t \in I$, функционалы $g_j(u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*) \le 0$, $j = \overline{1, m_1}$, $g_j(u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*) = 0$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$; 3) необходимым и достаточным условием существования решения краевой задачи (2) – (7) является $I_1(\theta_*) = 0$ где $\theta_* \in X_1$ – решение задачи (45) – (48); 4) для допустимого управления значение функционала (1) равно

$$I(u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(x_*(t), u_*(t), x_0^*, x_1^*, t)dt = \gamma_*, \tag{60}$$

где $x_*(t) = x_*(t; t_0, x_0^*)$, $t \in I$. В общем случае, значение $I(u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*) \ne I(\overline{u}_*, \overline{x}_0^*, \overline{x}_1^*) = \inf I(u(\cdot), x_0, x_1)$, $(u(\cdot), x_0, x_1) \in L_2(I, R^m) \times S_0 \times S_1$.

4. Построение оптимального решения

Рассмотрим задачу оптимального управления (1) – (7). Определим скалярную функцию $\sigma(t)$, $t \in I$ следующим образом:

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} F_0(x(\tau), u(\tau), x_0, x_1, \tau)d\tau, \ t \in I.$$

Тогда $\dot{\sigma}(t) = F_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t)$, $\sigma(t_0) = 0$, $\sigma(t_1) = \gamma = I(u(\cdot), x_0, x_1) \in \Omega = \{\gamma{\in}R^1 | \gamma{\ge}\gamma_0$, $\gamma_0 > -\infty\}$, где $\gamma = I(u(\cdot), x_0, x_1) \ge \gamma_0$, значение γ ограничен снизу, в частности $\gamma_0 = 0$, если $F_0 \ge 0$.

Теперь задача оптимального управления (1) – (7) запишется в виде (см. (45))

$$\sigma(t_1) = \gamma = I(u(\cdot), x_0, x_1) \to \inf \tag{61}$$

при условиях

$$\dot{\sigma}(t) = F_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t), \ \sigma(t_0) = 0, \ \sigma(t_1) = \gamma, \tag{62}$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x, u, t), \ (x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1, \tag{63}$$

$$\dot{\eta} = f_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t), \ \eta(t_0) = 0, \ \eta(t_1) = \overline{c} \in Q, \tag{64}$$

$$x(t) \in G(t), \ u(\cdot) \in L_2(I, R^m), \ t \in I. \tag{65}$$

Введём обозначения

$$\mu(t) = \begin{pmatrix} \sigma(t) \\ x(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \ A_2(t) = \begin{pmatrix} O_{1,1} & O_{1,n} & O_{1,m_2} \\ O_{n,1} & A(t) & O_{n,m_2} \\ O_{m_2,1} & O_{m_2,n} & O_{m_2,m_2} \end{pmatrix}, \ B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ O_{n,1} \\ O_{m_2,1} \end{pmatrix},$$

$$C_0(t) = \begin{pmatrix} O_{1,r} \\ B(t) \\ O_{m_2,r} \end{pmatrix}, \; D_0(t) = \begin{pmatrix} O_{1,m_2} \\ O_{n,m_2} \\ I_{m_2} \end{pmatrix}, \; P_0 = \left(1, O_{1,n}, O_{1,m_2}\right), P_1 = \left(O_{n,1}, I_n, O_{n,m_2}\right),$$

где $P_0\mu(t_1) = \sigma(t_1)$, $P_1\mu = x$.

Тогда задача оптимального управления (61) – (65) имеет вид:

$$P_0\mu(t_1) = \gamma = I(u(\cdot), x_0, x_1) \to \inf, \tag{66}$$

при условиях

$$\dot{\mu} = A_2(t)\mu + B_0F_0(P_1\mu, u, x_0, x_1, t) + C_0(t)f(P_1\mu, u, t) + D_0f_0(P_1\mu, u, x_0, x_1, t), \tag{67}$$

$$\mu(t_0) = \mu_0 = \begin{pmatrix} \sigma(t_0) \\ x(t_0) \\ \eta(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{1,1} \\ x_0 \\ O_{m_2,1} \end{pmatrix} \in O_{1,1} \times S_0 \times O_{m_2,1} = T_0, \tag{68}$$

$$\mu(t_1) = \mu_1 = \begin{pmatrix} \sigma(t_1) \\ x(t_1) \\ \eta(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ x_1 \\ \overline{c} \end{pmatrix} \in \Omega \times S_1 \times Q = T_1, \tag{69}$$

$$P_1\mu(t) \in G(t), u(\cdot) \in L_2(I, R^m), d \in \Gamma, \tag{70}$$

где $x(t) = P_1\mu(t)$, $\sigma(t) = P_0\mu(t)$, $t \in I$, γ – определяется по формуле (66).

Принцип погружения. Рассмотрим краевую задачу (67) – (70). Соответствующая линейная управляемая система имеет вид

$$\dot{\zeta} = A_2(t)\zeta + B_0\overline{w}_1(t) + C_0(t)\overline{w}_2(t) + D_0\overline{w}_3(t), t \in I, \tag{71}$$

$$\overline{w}_1(\cdot) \in L_2(I, R^1), \;\; \overline{w}_2(\cdot) \in L_2(I, R^r), \;\; \overline{w}_3(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{72}$$

$$\zeta(t_0) = \mu_0 \in T_0, \quad \zeta(t_1) = \mu_1 \in T_1. \tag{73}$$

Введем следующие обозначения:

$$\overline{B}_0(t) = (B_0, C_0(t), D_0), \overline{w}(t) = (\overline{w}_1(t), \overline{w}_2(t), \overline{w}_3(t)), \Psi(t,\tau) = K(t)K^{-1}(\tau),$$

$$\overline{a} = \Psi(t_0, t_1)\mu_1 - \mu_0, R(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Psi(t_0, t)\overline{B}_0(t)\overline{B}_0^*(t)\Psi^*(t_0, t)dt,$$

$$R(t_0, t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(t_0, \tau)\overline{B}_0(\tau)\overline{B}_0^*(\tau)\Psi^*(t_0, \tau)d\tau, R(t_0, t_1) = R(t_0, t) + R(t, t_1),$$

$$\overline{\Lambda}_1(t, \mu_0, \mu_1) = \overline{B}_0^*(t)\Psi^*(t_0, t)R^{-1}(t_0, t_1)a =$$

$$= \begin{pmatrix} B_0^*\Psi^*(t_0, t)R^{-1}(t_0, t_1)\overline{a} \\ C_0^*\Psi^*(t_0, t)R^{-1}(t_0, t_1)\overline{a} \\ D_0^*\Psi^*(t_0, t)R^{-1}(t_0, t_1)\overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\Lambda}_{11}(t, \mu_0, \mu_1) \\ \overline{\Lambda}_{12}(t, \mu_0, \mu_1) \\ \overline{\Lambda}_{13}(t, \mu_0, \mu_1) \end{pmatrix},$$

$$K_1(t) = -\overline{B}_0^*\Psi^*(t)(t_0, t)R^{-1}(t_0, t_1)\Psi(t_0, t_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} -B_0^*\Psi^*(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)\Psi(t_0,t_1) \\ -C_0^*\Psi^*(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)\Psi(t_0,t_1) \\ -D_0^*\Psi^*(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)\Psi(t_0,t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}(t) \\ K_{12}(t) \\ K_{13}(t) \end{pmatrix},$$

$$\overline{\Lambda}_2(t,\mu_0,\mu_1) = \Psi(t,t_0)R(t,t_1)R^{-1}(t_0,t_1)\mu_0 + \Psi(t,t_0)R(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)\Psi(t_0,t_1)\mu_1,$$

$$K_2(t) = -\Psi(t,t_0)R(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)\Psi(t_0,t_1), t \in I.$$

Теорема 7 *Пусть матрица* $R(t_0,t_1) > 0$. *Тогда управление* $\overline{w}(t) = (\overline{w}_1(t), \overline{w}_2(t), \overline{w}_3(t)) \in L_2(I, R^{1+r+m_2})$ *переводит траекторию системы (71) – (73) из любой начальной точки* $\mu_0 \in R^{1+n+m_2}$ *в любое заданное конечное состояние* $\mu_1 \in R^{1+n+m_2}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\overline{w}_1(t) \in \overline{W}_1 = \{\overline{w}_1(\cdot) \in L_2(I,R^1)/\overline{w}_1(t) = \overline{v}_1(t) + \overline{\Lambda}_{11}(t,\mu_0,\mu_1) + K_{11}(t)\overline{z}(t_1,\overline{v}), \forall \overline{v}_1(\cdot) \in L_2(I,R^1), t \in I\}, \quad (74)$$

$$\overline{w}_2(t) \in \overline{W}_2 = \{\overline{w}_{2(\cdot)} \in L_2(I,R^r)/\overline{w}_2(t) = \overline{v}_2(t) + \overline{\Lambda}_{12}(t,\mu_0,\mu_1) + K_{12}(t)\overline{z}(t_1,\overline{v}), \forall \overline{v}_2(\cdot) \in L_2(I,R^r), t \in I\}, \quad (75)$$

$$\overline{w}_3(t) \in \overline{W}_3 = \{\overline{w}_3(\cdot) \in L_2(I,R^{m_2})/\overline{w}_3(t) = \overline{v}_3(t) + \overline{\Lambda}_{13}(t,\mu_0,\mu_1) + K_{13}(t)\overline{z}(t_1,\overline{v}), \forall \overline{v}_3(\cdot) \in L_2(I,R^{m_2}), t \in I\}, \quad (76)$$

где $\overline{v}(t) = (\overline{v}_1(t), \overline{v}_2(t), \overline{v}_3(t)), \overline{z}(t) = \overline{z}(t,\overline{v}), t \in I$ *– решение дифференциального уравнения*

$$\dot{\overline{z}} = A_2(t)\overline{z} + B_0\overline{v}_1(t) + C_0(t)\overline{v}_2(t) + D_0\overline{v}_3(t), \overline{z}(t_0) = 0, \quad (77)$$

$$\overline{v}_1(\cdot) \in L_2(I,R^1), \overline{v}_2(\cdot) \in L_2(I,R^r), \overline{v}_3(\cdot) \in L_2(I,R^{m_2}). \quad (78)$$

Решение системы (71) – (73) имеет вид

$$\zeta(t) = \overline{z}(t,\overline{v}) + \overline{\Lambda}_2(t,\mu_0,\mu_1) + K_2(t)\overline{z}(t_1,\overline{v}), t \in I. \quad (79)$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Лемма 5 *Пусть матрица* $R(t_0,t_1) > 0$. *Тогда краевая задача (67) – (70) равносильна следующей задаче*

$$\overline{w}_1(t) \in \overline{W}_1, \overline{w}_1(t) = F_0(P_1\zeta, u, x_0, x_1, t), t \in I, \quad (80)$$

$$\overline{w}_2(t) \in \overline{W}_2, \overline{w}_2(t) = f(P_1\zeta, u, t), t \in I, \quad (81)$$

$$\overline{w}_3(t) \in \overline{W}_3, \overline{w}_3(t) = f_0(P_1\zeta, u, x_0, x_1, t), t \in I, \quad (82)$$

$$p(t) \in V(t) = \{p(\cdot) \in L_2(I,R^s)/p(t) = F(P_1\zeta, t), \omega(t) \le p(t) \le \varphi(t), t \in I\}, \quad (83)$$

$$\dot{\overline{z}} = A_2(t)\overline{z} + B_0\overline{v}_1(t) + C_0(t)\overline{v}_2(t) + D_0\overline{v}_3(t), \overline{z}(t_0) = 0, t \in I, \quad (84)$$

$$\overline{v}_1(\cdot) \in L_2(I,R^1), \overline{v}_2(\cdot) \in L_2(I,R^r), \overline{v}_3(\cdot) \in L_2(I,R^{m_2}), \quad (85)$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, u(\cdot) \in L_2(I,R^m), \gamma \in \Omega, d \in \Gamma, \quad (86)$$

где $\zeta(t)$, $t \in I$ *определяется по формуле (79),* $\overline{z}(t,\overline{v})$ *– решение системы (77), (78).*

Утверждение леммы 5 следует из теоремы 7.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J_2(\overline{v}, u, p, x_0, x_1, d, \gamma) = \int_{t_0}^{t_1} F_2(\overline{q}(t), t)dt = \int_{t_0}^{t_1} [|\overline{w}_1(t) - F_0(P_1\zeta(t), u(t), x_0, x_1, t)|^2 +$$
$$+ |\overline{w}_2(t) - f(P_1\zeta(t), u(t), t)|^2 + |\overline{w}_3(t) - f_0(P_1\zeta(t), u(t), x_0, x_1, t)|^2 +$$
$$+ |p(t) - F(P_1\zeta(t), t)|^2]dt \to \inf \quad (87)$$

при условиях (84) – (86), где $\overline{w}_1(t) \in \overline{W}_1$, $\overline{w}_2(t) \in \overline{W}_2$, $\overline{w}_3(t) \in \overline{W}_3$, $\overline{v} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$, $\overline{q}(t) = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, u, p, x_0, x_1, d, \gamma, \overline{z}(t), \overline{z}(t_1)$. Отметим, что оптимизационная задача (87), (84) – (86) была получена на основе соотношений (80) – (86).

Теорема 8 *Пусть матрица* $R(t_0, t_1) > 0$, *производная* $\dfrac{\partial F_2(\overline{q}, t)}{\partial q}$ *удовлетворяет условию Липшица. Тогда:*

1. *функционал (87) при условиях (84) – (86) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*

$$J_2'(\overline{\theta}) = (J_{2\overline{v}_1}'(\overline{\theta}), J_{2\overline{v}_2}'(\overline{\theta}), J_{2\overline{v}_3}'(\overline{\theta}), J_{2u}'(\overline{\theta}), J_{2p}'(\overline{\theta}), J_{2x_0}'(\overline{\theta}), J_{2x_1}'(\overline{\theta}), J_{2d}'(\overline{\theta}), J_{2\gamma}'(\overline{\theta})),$$
$$\overline{\theta} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, u, p, x_0, x_1, d, \gamma) \in \overline{X},$$
$$\overline{X} = L_2(I, R^1) \times L_2(I, R^r) \times L_2(I, R^{m_2}) \times L_2(I, R^m) \times V \times S_0 \times S_1 \times \Gamma \times \Omega$$
$$H_1 = L_2(I, R^1) \times L_2(I, R^r) \times L_2(I, R^{m_2}) \times L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^s) \times R^n \times R^n \times$$
$$\times R^{m_1} \times R^1, \quad \overline{X} \subset H_1, \quad J_2'(\overline{\theta}) \in H_1$$

в любой точке $\overline{\theta} \in \overline{X}$ *вычисляется по формуле*

$$J_{2\overline{v}_1}'(\overline{\theta}) = \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial \overline{v}_1} - B_0^*\overline{\psi}(t), \; J_{2\overline{v}_2}'(\overline{\theta}) = \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial \overline{v}_2} - C_0^*\overline{\psi}(t),$$
$$J_{2\overline{v}_3}'(\overline{\theta}) = \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial \overline{v}_3} - D_0^*\overline{\psi}(t), \; J_{2u}'(\overline{\theta}) = \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial u}, \quad J_{2p}'(\overline{\theta}) = \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial p}$$
$$J_{2x_0}'(\overline{\theta}) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial x_0}dt, \; J_{2x_1}'(\overline{\theta}) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial x_1}dt,$$
$$J_{2d}'(\overline{\theta}) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial d}dt, \quad J_{2\gamma}'(\overline{\theta}) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial \gamma}dt,$$

где $\overline{\psi}(t)$, $t \in I$ *– решение сопряженной системы*

$$\dot{\overline{\psi}} = \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial \overline{z}} - A_2^*(t)\overline{\psi}, \quad \overline{\psi}(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial \overline{z}(t_1)}dt;$$

2. *градиент* $J_2^{'}(\overline{\theta}), \overline{\theta} \in \overline{X}$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|J_2^{'}(\overline{\theta}_1) - J_2^{'}(\overline{\theta}_2)\| \leq l\|\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2\|, \quad \forall \overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2 \in \overline{X}. \tag{88}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.

Строим следующие последовательности $\{\overline{\theta}_n\} = \{\overline{v}_1^n, \overline{v}_2^n, \overline{v}_3^n, u_n, p_n, x_0^n, x_1^n, d_n, \gamma_n\} \subset \overline{X}_2$ по алгоритму

$$\begin{aligned}
&\overline{v}_1^{n+1} = P_{\overline{V}_1}[\overline{v}_1^n - \alpha_n J_{2\overline{v}_1}^{'}(\overline{\theta}_n)], \quad \overline{v}_2^{n+1} = P_{\overline{V}_2}[\overline{v}_2^n - \alpha_n J_{2\overline{v}_2}^{'}(\overline{\theta}_n)],\\
&\overline{v}_3^{n+1} = P_{\overline{V}_3}[\overline{v}_3^n - \alpha_n J_{2\overline{v}_3}^{'}(\overline{\theta}_n)], \quad u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n J_{2u}^{'}(\overline{\theta}_n)],\\
&p_{n+1} = P_V[p_n - \alpha_n J_{2p}^{'}(\overline{\theta}_n)], \qquad x_0^{n+1} = P_{S_0}[x_0^n - \alpha_n J_{2x_0}^{'}(\overline{\theta}_n)],\\
&x_1^{n+1} = P_{S_1}[x_1^n - \alpha_n J_{2x_1}^{'}(\overline{\theta}_n)], \quad d_{n+1} = P_{\overline{\Gamma}}[d_n - \alpha_n J_{2d}^{'}(\overline{\theta}_n)],\\
&\gamma_{n+1} = P_{\overline{\Omega}}[\gamma_n - \alpha_n J_{2\gamma}^{'}(\overline{\theta}_n)], \qquad n = 0, 1, 2, ...,\\
&0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{l + 2\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad l = const > 0,
\end{aligned} \tag{89}$$

где $\overline{V}_1 = \{\overline{v}_1(\cdot) \in L_2(I, R^1)/\|\overline{v}_1\| \leq \overline{\beta}\}$, $\overline{V}_2 = \{\overline{v}_2(\cdot) \in L_2(I, R^r)/\|\overline{v}_2\| \leq \overline{\beta}\}$, $\overline{V}_3 = \{\overline{v}_3(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2})/\|\overline{v}_3\| \leq \overline{\beta}\}$, $U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/\|u\| \leq \overline{\beta}\}$, $\overline{\Gamma} = \{d \in R^{m_1}/d \geq 0,\ |d| \leq \overline{\beta}\}$, $\overline{\Omega} = \{\gamma \in R^1/\gamma_* \leq \gamma \leq \overline{\beta}\}$, $\overline{X}_2 = \overline{V}_1 \times \overline{V}_2 \times \overline{V}_3 \times U \times V \times S_0 \times S_1 \times \overline{\Gamma} \times \overline{\Omega} \subset H_1$, $U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/\|u\| \leq \overline{\beta}\}$, $\overline{\beta} > 0$ –достаточно большое число.

Теорема 9 *Пусть выполнены условия теоремы 8,* $\overline{X}_1$ *- ограниченное выпуклое замкнутое множество, последовательность* $\{\overline{\theta}_n\} \subset \overline{X}_2$ *определяется по формуле (89). Тогда:*

1. *числовая последовательность* $\{J_2(\overline{\theta}_n)\}$ *строго убывает,* $\|\overline{\theta}_n - \overline{\theta}_{n+1}\| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

   Если, кроме того, $F_2(\overline{q}, t)$ *выпуклая функция по переменной* $\overline{q}$, *то:*

2. *достигается нижняя грань функционала (87) при условиях (84) – (86)*

$$J_2(\overline{\theta}_*) = \inf_{\overline{\theta} \in \overline{X}_2} J_2(\overline{\theta}) = \min_{\overline{\theta} \in \overline{X}_2} J_2(\overline{\theta}) = J_{2*};$$

3. *последовательность* $\{\overline{\theta}_n\} \subset \overline{X}_2$ *является минимизирующей* $\lim_{n\to\infty} J_2(\overline{\theta}_n) = J_{2*} = \inf_{\overline{\theta} \in \overline{X}_2} J_2(\overline{\theta})$;

4. *последовательность* $\{\overline{\theta}_n\} \subset \overline{X}_1$ *слабо сходится к точке* $\overline{\theta}_* \in \overline{X}_{1*}$, $\overline{X}_{2*} = \{\overline{\theta}_*/J_2(\overline{\theta}_*) = J_{2*} = \inf_{\overline{\theta} \in \overline{X}_1} J_2(\overline{\theta}) = \min_{\overline{\theta} \in \overline{X}_1} J_2(\overline{\theta})\}$, *где* $\overline{v}_1^n \xrightarrow{сл} \overline{v}_1^*$, $\overline{v}_2^n \xrightarrow{сл} \overline{v}_2^*$, $\overline{v}_3^n \xrightarrow{сл} \overline{v}_3^*$, $u_n \xrightarrow{сл} \overline{u}_*$, $p_n \xrightarrow{сл} \overline{p}_*$, $x_0^n \to \overline{x}_0^*$, $x_1^n \to \overline{x}_1^*$, $d_n \to \overline{d}_*$, $\gamma_n \to \overline{\gamma}_*$ *при* $n \to \infty$, $\overline{\theta}_* = (\overline{v}_1^*, \overline{v}_2^*, \overline{v}_3^*, \overline{u}_*, p_*, \overline{x}_0^*, \overline{x}_1^*, \overline{d}_*, \overline{\gamma}_*)$;

5. *если* $J_2(\overline{\theta}_*) = 0$, *то оптимальным управлением для задачи (1) – (7) являются* $\overline{u}_* \in U$, $\overline{x}_0^* \in S_0$, $\overline{x}_1^* \in S_1$, *а оптимальная траектория*

$$\overline{x}_*(t) = P_1\zeta_*(t) = P_1[\overline{z}(t, \overline{v}_*) + \overline{\Lambda}_2(t, \mu_0^*, \mu_1^*) + K_2(t)\overline{z}(t_1, \overline{v}_*)], t \in I,$$

где $\overline{v}_* = (\overline{v}_1^*, \overline{v}_2^*, \overline{v}_3^*), \mu_0^* = (O_{1,1}, \overline{x}_0^*, O_{m_2,1}), \mu_1^* = (\gamma_*, \overline{x}_1^*, \overline{c}_*), \overline{c}_* \in Q = \{\overline{c}_* \in R^{m_2} / \overline{c}_{j*} = = c_j - \overline{d}_j^*, \overline{d}_j^* \geq 0, j = \overline{1, m_1}; \overline{c}_{j*} = c_j, j = \overline{m_1 + 1, m_2}\}$, *выполнено включение* $\overline{x}_*(t) \in G(t)$ *и ограничения (5) – (7),* $J(\overline{u}_*, \overline{x}_0^*, \overline{x}_1^*) = \overline{\gamma}_*$;

6. *справедлива следующая оценка скорости сходимости* $0 \leq J_2(\overline{\theta}_n) - J_{2*} \leq \frac{\overline{c}_0}{n}$, n *= 1, 2, ...,* $\overline{c}_0 = const > 0$.

Доказательство аналогичной теоремы приведено выше.

Более наглядным методом решения задачи (1) – (7) является метод сужения области допустимых управлений.

Теорема 10 *Пусть выполнены условия теоремы 8,* $\overline{X}_3 = \overline{V}_1 \times \overline{V}_2 \times \overline{V}_3 \times U \times V \times S_0 \times S_1 \times \overline{\Gamma}$ *– ограниченное выпуклое замкнутое множество, последовательность* $\{\overline{\theta}_n\} \subset \overline{X}_2$ *определяется по формуле (88) за исключением последовательности* $\{\gamma_n\} \subset \overline{\Omega}$. *Тогда:*

1. *числовая последовательность* $\{J_2(\overline{\theta}_n)\}$, $\{\overline{\theta}_n\} \subset X_3$ *строго убывает;*

2. $\|\overline{\theta}_n - \overline{\theta}_{n+1}\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\{\overline{\theta}_n\} \subset \overline{X}_3$;

   Если, кроме того, функция $F_2(\overline{q}, t)$ *выпуклая функция по переменной* $\overline{q}$ *при фиксированном* γ, *то:*

3. *последовательность* $\{\overline{\theta}_n\} \subset \overline{X}_3$, *при фиксированном* $\gamma = \gamma_*$ *является минимизирующей;*

4. $\overline{\theta}_n \xrightarrow{сл} \overline{\theta}_* \in \overline{X}_3$ *при* $n \to \infty, \gamma = \gamma_*$;

5. $J_2(\overline{\theta}_*) = \inf\limits_{\overline{\theta}_n \in \overline{X}_3} J_2(\overline{\theta}_n) = \min\limits_{\overline{\theta}_n \in \overline{X}_3} J_2(\overline{\theta}_n)$;

6. *справедлива оценка* $0 \leq J_2(\overline{\theta}_n) - J_2(\overline{\theta}_*) \leq \frac{c_1}{n}, c_1 = const > 0, n = 1, 2, ..., \{\overline{\theta}_n\} \subset \overline{X}_3$.

Доказательство теоремы следует из теоремы 9 при фиксированном $\gamma \in \overline{\Omega}$, $\gamma = \gamma_*$.

Пусть $\overline{\theta}_* \in \overline{X}_2$ решение задачи (87), (84) – (86) при $\gamma = \gamma_* \in \overline{\Omega}$. Здесь возможны случаи:

1. значение $J_2(\overline{\theta}*) > 0$;

2. значение $J_2(\overline{\theta}_*) = 0$.

Заметим, что $J_2(\overline{\theta}) \geq 0$, $\overline{\theta} \in \overline{X}_3$.

Если $J_2(\overline{\theta}_*) > 0$, то новое значение γ выберем $\gamma = 2\gamma_*$, а если $J_2(\overline{\theta}_*) = 0$, то новое значение $\gamma = \dfrac{\gamma_*}{2}$. По такой схеме, путем деления пополам отрезка неопределенности можно найти наименьшее значение функционала (1) при условиях (2) – (7).

5. Заключение

Исследуется задача Лагранжа вариационного исчисления при наличии фазовых и интегральных ограничений для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Частными случаями которой являются: простейшая задача, задача Больца, изопериметрическая задача, задача на условный экстремум.

В отличие от известного метода решения задачи вариационного исчисления на основе принципа Лагранжа, предлагается совершенно новый подход "принцип погружения". Принцип погружения создан на основе исследования интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Для интегрального уравнения Фредгольма первого рода доказана теорема существования решения, а также теорема об общем ее решений.

Основными научными результатами данной работы являются:

– сведения краевой задачи связанной с условиями в задаче Лагранжа к начальной задаче оптимального управления со специфическим функционалом;

– необходимые и достаточные условия существования допустимого управления;

– метод построения допустимого управления по предельной точке минимизирующей последовательности;

– необходимые и достаточные условия существования решения задачи Лагранжа;

– метод построения решения задачи Лагранжа.

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что: нет необходимости введения дополнительных переменных в виде множителей Лагранжа; доказательства существования седловой точки функционала Лагранжа; решаются воедино существования и построение решения задачи Лагранжа.

Литература

[1] *Блисс Дж.* Лекции по вариационному исчислению. – М.: ИЛ, 1950.

[2] *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Основы вариационного исчисления. – М. – Л.: ОНТИ, 1935. – тт. I, II.

[3] *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974.

[4] *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.

[5] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969.

[6] *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. – М.: Наука, 1977.

[7] *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского н-та, 1977.

[8] *Ли Я.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972.

[9] *Айсагалиев С.А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнния. 1991, т.27, №9. с. 1475–1486.

[10] *Айсагалиев С.А., Айсагалиева С.С.* Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1993, т.29, №4. с. 555–567.

[11] *Айсагалие С.А.* Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траектории и ограниченным управлением // Дифференциальные хранения, 1996, т.32. №6, с. 1–10.

[12] *Айсагалиев С.А.* Управляемость и оптимальное управление нелинейных систем. Известия РАН, Техническая кибернетика, 1993, №3, с.96–102.

[13] *Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А.* Оптимальное быстродействие нелинейных систем с ограничениями // Дифференциальные уравнения и процессы упреждения, №1, 2010, с.30–55.

[14] *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П.* Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением. Сибирский математический журнал, январь–февраль, 2011, т.53, №1, с. 20–37.

[15] *Айсагалиев С.А.* К теориии управляемости линейных систем. АА СССР, Автоматика и телемеханика, 1991, №5. с. 35–44.

[16] *Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А.* Об оптимальном управлении линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2012. т.48, №6, с.826-838.

[17] *Айсагалиев С.А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. – 2005. – т.5, №14(18).

[18] *Айсагалиев С.А., Севрюгин И.* Управляемость и быстродействие процесса. описываемого линейной системой обыкноенных дифференциальных уравнений // Математический журнал. – 2013. –т.13, №2(4), с.5–30.

[19] *Айсагалиев С.А.* Конструктивная теория краевых задач оптимального управлени я. –Алматы: Қазақ университетi, 2007. – 328с.

[20] *Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А.* Оптимальное управление динамических систем. Palmarium Academic Publishing (Verlag, Германия). –2012. –288с.

[21] *Айсагалиев С.А.* К простейшей задаче вариационного исчисления. Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2011, № 4(71), с. 20 – 32.

[22] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. –М.: Наука, 1980. –518с.

[23] *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 480с.

[24] *Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столяров Е.М.* Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. –320с.

References

[1] *Bliss Dzh.* Lekcii po variacionnomu ischisleniyu. – M.: IL, 1950.

[2] *Lavrent'ev M.A., Lyusternik L.A.* Osnovy variacionnogo ischisleniya. – M. – L.: ONTI, 1935. – tt. I, II.

[3] *Yang L.* Lekcii po variacionnomu ischisleniyu i teorii optimal'nogo upravleniya. – M.: Mir, 1974.

[4] *Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V.* Optimal'noe upravlenie. – M.: Nauka, 1979.

[5] *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishhenko E.F.* Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov. – M.: Nauka, 1969.

[6] *Varga Dzh.* Optimal'noe upravlenie differencial'nymi i funkcional'nymi uravneniyami. – M.: Nauka, 1977.

[7] *Gamkrelidze R.V.* Osnovy optimal'nogo upravleniya. – Tbilisi: Izd-vo Tbilisskogo universiteta, 1977.

[8] *Li Ja.B., Markus L.* Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya. – M.: Nauka, 1972.

[9] *Aisagaliev S.A.* Upravljaemost' nekotoroi sistemy differencial'nyh uravnenii // Differencial'nye uravnniya. 1991, t.27, №9. s. 1475–1486.

[10] *Aisagaliev S.A., Aisagalieva S.S.* Konstruktivnyi metod resheniya zadachi upravlyaemosti dlya obyknovennyh differencial'nyh uravnenii // Differencial'nye uravneniya, 1993, t.29, №4. s. 555–567.

[11] *Aisagaliev S.A.* Optimal'noe upravlenie lineinymi sistemami s zakreplennymi koncami traektorii i ogranichennym upravleniem // Differencial'nye uraneniya, 1996, t.32. №6, s. 1–10.

[12] *Aisagaliev S.A.* Upravljaemost' i optimal'noe upravlenie nelineinyh sistem. Izvestiya RAN, Tehnicheskaya kibernetika, 1993, №3, s.96–102.

[13] *Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A.* Optimal'noe bystrodeistvie nelineinyh sistem s ogranicheniyami // Differencial'nye uravneniya i processy upravvleniya, №1, 2010, s.30–55.

[14] *Aisagaliev S.A., Belogurov A.P.* Upralyaemost' i bystrodeistvie processa, opisyvaemogo parabolicheskim uravneniem s ogranichennym upravleniem. Sibirskii matematicheskii zhurnal, janvar'–fevral', 2011, t.53, №1, s.20–37.

[15] *Aisagaliev S.A.* K teorii upravlyaemosti lineinyh sistem. AA SSSR, Avtomatika i telemehanika, 1991, №5. s. 35–44.

[16] *Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A.* Ob optimal'nom upravlenii lineinymi sistemami s lineinym kriteriem kachestva i ogranicheniyami // Differencial'nye uravneniya. 2012. t.48, №6, s.826-838.

[17] *Aisagaliev S.A.* Obshhee reshenie odnogo klassa integral'nyh uravnenii // Matematicheskii zhurnal. – 2005. – t.5, №14(18).

[18] *Aisagaliev S.A., Sevryugin I.* Upravljaemost' i bystrodeistvie processa. opisyvaemogo lineinoi sistemoj obyknoennyh differencial'nyh uravnenii // Matematicheskii zhurnal. – 2013. –t.13, №2(4), s.5–30.

[19] *Aisagaliev S.A.* Konstruktivnaya teoriya kraevyh zadach optimal'nogo upravleniya. – Almaty: Qazaq universiteti, 2007. – 328s.

[20] *Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A.* Optimal'noe upravlenie dinamicheskih sistem. Palmarium Academic Publishing (Verlag, Germanija). –2012. –288s.

[21] *Aisagaliev S.A.* K prosteishei zadache variacionnogo ischisleniya. Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf. 2011, № 4(71), s. 20 – 32.

[22] *Vasil'ev F.P.* Chislennye metody resheniya ekstremal'nyh zadach. –M.: Nauka, 1980.

[23] *Vasil'ev F.P.* Metody resheniya ekstremal'nyh zadach. – M.: Nauka, 1981. – 480s.

[24] *Moiseev N.N., Ivanilov Ju.P., Stoljarov E.M.* Metody optimizacii. – M.: Nauka, 1978.