Моделирование взаимодействия балки (пластин, плит, полос) переменной толщины, лежащей на неоднородном основании. Общие уравнения

А.А. Айдосов, Г.А. Айдосов, С.Н. Тойбаев
Казахская академия транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева,
КазТрансГаз,
Алматинский технологический университет

Аннотация

При исследовании колебания пластин трехмерная постановка заменяется более простой, т.е. двумерной для точек срединной плоскости пластин, что накладывает на ограничения внешние усилия, вызывающие ее колебания. Эти ограничения сводятся к тому, что внешние усилия не должны быть высокочастотными.

Применяя преобразования Фурье по координатам x и y и Лапласа по t, сформулированная задача решении при нулевых начальных условиях, и получены общие решения задачи для пластинки.

Рассмотрим взаимодействие вязкоупругого фундамента, в общем случае переменной толщины, лежащего на вязкоупругом пористом водонасыщенном основании. В качестве модели грунта берется обобщенная модель М. Био с учетом вязких свойств материала основания - грунта.

Будем предполагать, что на верхнюю поверхность пластинки действуют нестационарные усилия, вызывающие ее продолно - поперечные колебания.

Поэтому граничные условия на верхней поверхности $z = F(x, y)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_{zz}^{(0)} - 2(F'_x\sigma_{xz}^{(0)} + F'_y\sigma_{yz}^{(0)}) = f_n^{(0)}(x, y, t),\\
&F'_x(\sigma_{zz}^{(0)} - \sigma_{xy}^{(0)}) - F'_y\sigma_{xz}^{(0)} + \sigma_{xz}^{(0)} = f_{ns_1}^{(0)}(x, y, t),\\
&F'_y(\sigma_{zz}^{(0)} - \sigma_{yy}^{(0)}) - F'_x\sigma_{xy}^{(0)} + \sigma_{yz}^{(0)} = f_{ns_2}^{(0)}(x, y, t)
\end{aligned} \tag{1}$$

На границе контакта $z = -h$ при отсутствии трения имеем следующие граничные условия

$$\begin{aligned}
&\sigma_{zz}^{(0)} = k_0\sigma_{zz}^{(1)} + (1 - k_0)\sigma^{(1)} + f_z^{(1)}(x, y, t), \sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{yz}^{(0)} = 0,\\
&\sigma_{xz}^{(1)} + f_{xz}^{(1)}(x, y, t) = 0, \sigma_{yz}^{(1)} + f_{yz}^{(1)}(x, y, t) = 0,\\
&w_0 = w_1 + f_1^{(1)}(x, y, t).
\end{aligned} \tag{2}$$

а на бесконечности $z = -\infty$ возмущения стремится к нулю.

Используя решения для основания

$$\varphi_1^{(0)} = A_0e^{\alpha_1 z}, \varphi_2^{(0)} = B_0e^{\alpha_2 z}, \psi_{11}^{(0)} = C_0e^{\beta_1 z}, \psi_{21}^{(0)} = D_0e^{\beta_1 z}, \psi_{31}^{(0)} = E_0e^{\beta_1 z} \tag{3}$$

и условие

$$kB_j + qC_j + \beta_0D_j = 0, kC_0 + qD_0 + \beta_0E_0 = 0, (j = 1, 2),$$

исключим эти переменные интегрирования в граничные условия (2) и получим три граничных условия пластинки при условии $z = -h$

$$\sigma_{zz}^{(0)} = R_1(W_0) + R_2(f_1^{(1)}) + R_3(f_2^{(1)}) + R_4\left(\frac{\partial f_{xz}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial f_{yz}^{(1)}}{\partial y}\right) + f_z^{(1)}, \sigma_{xz}^{(0)} = 0, \sigma_{yz}^{(0)} = 0, \tag{4}$$

где R_1, R_2, R_3, R_4 операторы после обращения величин

$$R_{10}=\frac{\Big[k_0M_1^{(0)}(\beta_1^2+k^2+q^2)-(1-k_0)Q_0(k^2+q^2)\Big]}{\alpha_1\alpha_2(\gamma_2-\gamma_1)(\beta^2-k^2-q^2)}\Big\{\alpha_2\Big[\gamma_2(\beta_1^2+k^2+q^2)- \\ -2\nu_1(k^2+q^2)-(\beta_1^2-k^2-q^2)\Big]-\alpha_1\Big[\gamma_1(\beta_1^2+k^2+q^2)-2\nu_1(k^2+q^2)- \\ -(\beta_1^2-k^2-q^2)\Big]\Big\}-\frac{4k_0M_1^{(0)}\beta_1(k^2+q^2)}{(\beta_1^2-k^2-q^2)}-\frac{[k_0Q_0-(1-k_0)R_0]\,(k^2+q^2)}{(\gamma_2-\gamma_1)(\beta_1^2-k^2-q^2)\alpha_1\alpha_2}\times \\ \times\Big\{\gamma_1\alpha_2\left[\gamma_2(\beta_1^2+k^2+q^2)-2\nu_1(k^2+q^2)-(\beta_1^2-k^2-q^2)\right]- \\ -\gamma_2\alpha_1\left[\gamma_1(\beta_1^2+k^2+q^2)-2\nu_1(k^2+q^2)-(\beta_1^2-k^2-q^2)\right]\Big\}. \tag{5}$$

$$R_{20}=E_{10}\Big\{\alpha_2\Big[\gamma_2(\beta_1^2+k^2+q^2)-2\nu_1(k^2+q^2)\Big]-\alpha_1\Big[\gamma_1(\beta_1^2+k^2+q^2)- \\ -2\nu_1(k^2+q^2)\Big]\Big\}-E_{20}\Big\{\gamma_1\alpha_2\Big[\gamma_2(\beta_1^2+k^2+q^2)-2\nu_1(k^2+q^2)\Big]- \\ -\gamma_2\alpha_1\Big[\gamma_1(\beta_1^2+k^2+q^2)-2\nu_1(k^2+q^2)\Big]\Big\}-\frac{2k_0M_1^{(0)}(k^2+q^2)}{\beta_1^2-k^2-q^2}. \tag{6}$$

$$R_{30}=E_{10}(\alpha_2-\alpha_1)(\beta_1^2-k^2-q^2)-E_{20}(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1)(\beta_1^2-k^2-q^2). \tag{7}$$

$$R_{40}=E_{10}\left[\alpha_2(\nu_1-\gamma_2)-\alpha_1)(\nu_1-\gamma_1)\right]-E_{20}\Big[\gamma_1\alpha_2(\nu_1-\gamma_2)- \\ -\gamma_2\alpha_1(\nu_1-\gamma_1\Big]-\frac{k_0\beta_1M_1^{(0)}}{(\beta_1^2-k^2-q^2)}. \tag{8}$$

где

$$E_{10}=\frac{k_0M_1^{(0)}(\beta_1^2+k^2+q^2)-(1-k_0)Q_0(k^2+q^2)}{(\gamma_2-\gamma_1)\alpha_1\alpha_2(\beta_1^2-k^2-q^2)},$$

$$E_{20}=\frac{[k_0Q_0-(1-k_0)R_0]\,(k^2+q^2)}{(\gamma_2-\gamma_1)\alpha_1\alpha_2(\beta_1^2-k^2-q^2)}.$$

Выражение (5) в общем случае, дает закон отпоры основания – пористого водонасыщенного вязкоупругого основания – на колебание лежащей на нем пластинки – фундамента.

При отсутствии жидкой компоненты в основании, т.е. когда основание является деформируемой вязкоупругой средой, выражение (5) принимает более простой вид

$$R_{10}^{(1)}=\frac{(\beta_1^2+k^2+q^2)-4\alpha_1\beta_1(k^2+q^2)}{\alpha_1(\beta_1^2-k^2-q^2)}M_1^{(0)},\ R_{20}^{(1)}=R_{10}^{(1)},\ R_{30}^{(1)}=0, \\ R_{40}^{(1)}=\frac{(\beta_1^2+k^2+q^2)-2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1(\beta_1^2-k^2-q^2)}M_1^{(0)} \tag{9}$$

В общем случае обратить по k, q, p выражение (5) достаточно сложно. Даже обращение выражения (9) достаточно и непросто и, например, для упругого основания это обращение имеет вид

$$R(W)=\frac{b_1^2}{2\pi}\int\limits_0^t(t-\xi)\left\{(\lambda_{21}^{(1)}-\Delta)^2T(a,\xi)+4\Delta\lambda_{21}^{(1)}T(b,\xi)\right\}d\xi,$$

$$T(c,\xi)=\int\limits_0^{c\xi}\int\limits_0^{2\pi}W\left(x-rcos\theta,y-rsin\theta,\xi-\frac{r}{c}\right)drd\theta.$$

Выражение (9) и (5) значительно упрощается, если процесс быстропротекающий, т.е. носит волновой характер. В этом случае выражение (9) и (5) приближенно равно

$$\begin{gathered}R_{10}=\frac{k_0p}{\sqrt{\rho_{10}\rho_{20}}(\gamma_2-\gamma_1)}\left[(\gamma_2-1)\sqrt{\rho_{20}M_{11}^{(0)}}-(\gamma_1-1)\sqrt{\rho_{10}M_{12}^{(0)}}\right],\\ R_{10}^{(1)}=\sqrt{\rho_1N_1^{(0)}}p,\rho_{j0}=(\rho_{11}+\gamma_j\rho_{12}),M_{1j}^{(0)}=(N_1^{(0)}-\gamma_jQ_0),(j=1,2,...)\end{gathered}\tag{10}$$

обращая по k,q,p, получим

$$R_1(W)=k_0\left[\sqrt{\rho_{10}\rho_{20}}(\gamma_2\gamma_1)\right]^{-1}\left[(\gamma_2-1)\sqrt{\rho_{20}M_{11}^{1/2}}-(\gamma_1-1)\sqrt{\rho_{10}M_{12}^{1/2}}\right]\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right),\tag{11}$$

$$R_1^1(W)=\sqrt{\rho_1N_2}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right),N_2=\sqrt{N_1^{(0)}}.\tag{12}$$

Аналогично упрощаются выражения для R_{20},R_{30},R_{40}.

Как видно из формул (11) и (12), реакция основания R пропорциональна скорости $\dfrac{\partial W}{\partial t}$, а не самому смещению W, что следует по гипотезе Винклера.

Кроме того, полученное общее решение и закон отпора явно содержат вязкоупругие свойства пластинки и основания, а также функции, описывающие внешние усилия.

Из общего решения задачи представления для напряжений имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}M_0\Bigg\{&\left[C_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-2\lambda_1^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+(1-C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial U}{\partial x}+\\&+\left[C_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-2\lambda_1^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-(1+C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\left(\frac{\partial V}{\partial y}+W\right)\Bigg\}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\\+\sum_{n=0}^{\infty}M_0\Bigg\{&\left[2D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+(1+2D_1)\lambda_1^{(n)}\right]\frac{\partial U}{\partial x}+\\&+\left[-2D_1Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1+D_1)\lambda_1^{(n)}\right]\left(\frac{\partial V_1}{\partial y}+\lambda_2^{(1)}W\right)\Bigg\}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}M_0\Bigg\{&\left[C_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-2\lambda_1^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+(1-C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial U}{\partial y}+\\&+\left[C_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-2\lambda_1^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-(1+C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\left(\frac{\partial U}{\partial x}+W\right)\Bigg\}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\\+\sum_{n=0}^{\infty}M_0\Bigg\{&\left[2D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+(1+2D_1)\lambda_1^{(n)}\right]\frac{\partial V_1}{\partial y}+\\&+\left[-2D_1Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(1+D_1)\lambda_1^{(n)}\right]\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\lambda_2^{(1)}W\right)\Bigg\}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\end{aligned}$$

$$\sigma_{zz}^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}M_0\left\{\left[C_1Q_{1n}(\lambda_2^{(1)}-\Delta)-(1+C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+\left[C_1Q_{1n}(\lambda_2^{(1)}-\Delta)+(1-C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\right\}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}M_0\left\{\left[-2D_1Q_{1n}\lambda_2^{(1)}+\right.\right. \tag{13}$$
$$\left.\left.+\lambda_1^{(n)}\right]\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)+\lambda_2^{(1)}\left[2D_1Q_{1n}\Delta+\lambda_1^{(1)}\right]W\right\}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\sigma_{xy}^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}M_0\left\{\left[2C_1Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial U}{\partial y}+\left[2C_1Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial V}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+2C_1Q_{1n}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right\}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}M_0\left\{\left[D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\lambda_1^{(1)}\right]\frac{\partial U_1}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+\left[D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\lambda_1^{(1)}\right]\frac{\partial V_1}{\partial x}-2D_1Q_{1n}\frac{\partial^2 W_1}{\partial x\partial y}\right\}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\sigma_{xz}^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}M_0\left\{C_1\left[2\lambda_1^{(1)}Q_{1n}+\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+\left[2C_1Q_{1n}\lambda_1^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda_2^{(n)}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left((1-C_1)\lambda_1^{(1)}-C_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]U+\left[2C_1Q_{1n}\lambda_1^{(1)}+(1-C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial W}{\partial x}\right\}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}M_0\left\{-2D_1Q_{1n}\frac{\partial^2 V_1}{\partial x\partial y}\left[D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\lambda_1^{(n)}\right]U-\right.$$
$$\left.-\left[D_1Q_{1n}(\lambda_2^{(1)}-\Delta)-\lambda_1^{(n)}\right]\frac{\partial W_1}{\partial x}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\right.,$$

$$\sigma_{yz}^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}M_0\left\{C_1\left[2\lambda_1^{(1)}Q_{1n}+\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\left[2C_1Q_{1n}\lambda_1^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\lambda_2^{(n)}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left((1-C_1)\lambda_1^{(1)}-C_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]V+\left[2C_1Q_{1n}\lambda_1^{(1)}+(1+C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial W}{\partial y}\right\}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}M_0\left\{-2D_1Q_{1n}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y}\left[D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\lambda_1^{(n)}\right]V_1-\right.$$
$$\left.-\left[D_1Q_{1n}(\lambda_2^{(1)}-\Delta)-\lambda_1^{(n)}\right]\frac{\partial W_1}{\partial y}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\right.,$$

где $C_1=1-N_0M_0^{-1}, D_1=1-N_0^{-1}M_0, Q_{1n}=\sum\limits_{m=0}^{n-1}\lambda_1^{2(n-m-1)}\lambda_2^m;$
$\lambda_1^{(1)}=\left[\rho_1N_0^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right], \lambda_2^{(1)}=\left[\rho_1M_0^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right], \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$

Подставив выражения (13) в граничные условия (1) и (4), получим систему шести интегро - дифференциальных уравнений для нахождения искомых функций U, V, W, U_1, V_1, W_1, характеризующих поведение точек плоскости $z=0$ и пластинки. Эти шесть уравнений описывают колебание вязкоупругого фундамента переменной толщины, лежащего на пористом водонасыщенном вязкоупругом основании.

В дальнейшем рассмотрим колебания пластинки переменной толщины,лежащей на деформируемом основании.

Тогда на границе контакта $z=-h$ при отсутствии трения имеем следующие граничные условия

$$\sigma_{zz}^{(0)}=R_1(W_0),\sigma_{xz}^{(0)}=0,\sigma_{yz}^{(0)}=0. \tag{14}$$

Общие уравнения для шести искомых функции сложны. Поэтому ограничимся задачей в плоской постановке, т.е. при независимости всех входящих величин от одной из координат, например, y и тогда для искомой функций U,W,U_1,W_1 получаем общие уравнения

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[C_1Q_{1n}\left(\lambda_1^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-(1-C_1)\lambda_1^{(n)}\right]\frac{\partial}{\partial x}\frac{F^{2n}}{(2n)!}-2F'_x\Big[2C_1Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\right.$$
$$\left.+\lambda_2^{(n)}(1-C_1)\Big]\lambda_1^{(1)}\frac{F^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\}U+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[C_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+(1-C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{F^{2n}}{(2n)!}-2F'_x\left[2C_1Q_{1n}\lambda_1^{(1)}+(1-C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial}{\partial x}\frac{F^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\}W+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{-\Big[2D_1Q_{1n}\lambda_2^{(1)}+\right.$$
$$\left.+\lambda_1^{(n)}\Big]\frac{\partial}{\partial x}\frac{F^{2n+1}}{(2n+1)!}-2F'_x\Big[D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+\lambda_1^{(n)}\Big]\frac{F^{2n}}{(2n)!}\right\}U_1+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[2D_1Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda_1^{(1)}\right]\lambda_2^{(1)}\frac{F^{2n+1}}{(2n+1)!}+2F'_x\Big[D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\lambda_1^{(1)}\Big]\frac{\partial}{\partial x}\frac{F^{2n}}{(2n)!}\right\}W_1=M_0^{-1}(f_n^{(1)}),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[2C_1Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1-C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\lambda_1^{(1)}\frac{F^{2n+1}}{(2n+1)!}+2F'_x\Big[C_1Q_{1n}\left(\lambda_1^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\lambda_2^{(n)}\Big]\frac{\partial}{\partial x}\frac{F^{2n}}{(2n)!}\right\}U+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[2C_1Q_{1n}\lambda_1^{(1)}+(1+C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial}{\partial x}\frac{F^{2n+1}}{(2n+1)!}+\right.$$
$$\left.+2F'_x\Big[C_1Q_{1n}\left(\lambda_1^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+\lambda_2^{(n)}\Big]\frac{F^{2n}}{(2n)!}\right\}W+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\Big[D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+\right. \tag{15}$$
$$\left.+\lambda_1^{(1)}\Big]\frac{F^{2n}}{(2n)!}-2F'_x\left[2D_1Q_{1n}\lambda_2^{(1)}+(1+D_1)\lambda_1^{(1)}\right]\frac{\partial}{\partial x}\frac{F^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\}U_1+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{-\left[D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-\lambda_1^{(1)}\right]]\frac{\partial}{\partial x}\frac{F^{2n}}{(2n)!}+F'_x\Big[4D_1Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\right.$$
$$\left.-D_1\lambda_1^{(n)}\Big]\lambda_2^{(1)}\frac{F^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\}W_1=M_0^{-1}(f_{ns_1}^{(1)})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[C_1Q_{1n}\left(\lambda_1^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-(1+C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial U}{\partial x}+\Big[C_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+\right.$$
$$\left.+(1-C_1)\lambda_2^{(n)}\Big]W\right\}\frac{h^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[2D_1Q_{1n}\lambda_2^{(1)}+\lambda_1^{(1)}\right]\frac{\partial U_1}{\partial x}-\Big[2D_1Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\right.$$
$$\left.+\lambda_1^{(n)}\Big]\lambda_2^{(1)}W_1\right\}\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}=R\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[-C_1Q_{1n}\lambda_1^{(1)}\frac{\partial U}{\partial x}-(\lambda_2^{(n)}+\lambda_1^{(1)}C_1Q_{1n})W\right]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}+\left[-D_1Q_{1n}\frac{\partial U_1}{\partial x}+(\lambda_2^{(n)}-\lambda_2^{(1)}D_1Q_{1n})W_1\right]\frac{h^{2n}}{(2n)!}\right\},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{-\left[2C_1Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1-C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\lambda_1^{(1)}U-\left[2C_1Q_{1n}\lambda_1^{(1)}+(1+C_1)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial W}{\partial x}\right\}\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+\lambda_1^{(n)}\right]U_1-\right.$$
$$\left.-\left[D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-\lambda_1^{(1)}\right]\frac{\partial W_1}{\partial x}\right\}\frac{h^{2n}}{(2n)!}=0.$$

Из уравнений (15) можно получить приближенные уравнения, если ограничиться конечным числом первых слагаемых. Так как в данном случае имеем продолно - поперечное колебание, то в качестве основных величин можно взять продольные U и поперечное смещения W_1. Тогда из (15) можно получить приближенных уравнении относительно этих искомых величин.

Литература

[1] *Филиппов И.Г., Чебан В.Г.* Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стерженией.// – Кишинев: Штиинца, 1988, – 190 с.

[2] *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле.// – М.: Наука, 1967, – 444 с.

[3] *Филиппов И.Г.* Точные уравнения поперечных колебаний вязкоупругих плит.// Труды Всесоюз. конф. По динамике оснований, фундаментов и подземных сооружений. – Нарва, 1985, – 405-409 с.

[4] *Филиппов И.Г.* Динамическая теория относительного движения многокомпонентных сред.// Прикл. механ. –Киев, 1974, – Т. 7. –γ 10. – 92-99 с.

[5] *Бейтман Г., Эрдейн А.* Таблицы интегральных преобразований.// – М.: Наука, 1969, – 318 с.