

## Волны маятникового типа в одномерных средах при ударном нагружении

А.А. СЫДЫКОВ

### Аннотация

В работе предложена математическая модель распространения волн в цепочке стержней с прослойками, которые моделируют горные породы, имеющие блочное строение. В работе дается методика согласования численных и экспериментальных данных за счет выборов физических параметров (коэффициентов жесткости и вязкости прослоек).

### Введение и актуальность темы исследования.

В работах [1-4] проведен анализ характерных особенностей горных пород и подчеркивается их блочная структура. Блоки отделяются друг от друга прослойками породы с ослабленными механическими свойствами. Подобная структура пород оказывает влияние на процессы распространения волн в таких средах. В работах [2-4] экспериментально показано, что в блочной среде существуют группы волн со скоростями, много меньшими скорости продольных волн в материале блоков, так называемые маятниковые волны. Объясняется это развитием колебательного процесса в цепочке жестких массивных блоков, взаимодействующих через податливые прослойки. В работах [2-4] проведено экспериментальное моделирование распространения волн в составной стержневой системе. Стержни, разделенные прослойками, располагались в вертикально установленной трубе с продольными прорезями для вывода кабелей, решеткирующих движение датчиков. Эти стержни распределялись по длине верхней части сборки. По свободному торцу верхнего стержня производился удар, интенсивность которого фиксировалась датчиком, установленным на ударнике. Длина сборки — 2 метра — позволяла регистрировать колебания стержней с датчиками до прихода волн, отраженных от нижнего торца сборки. В экспериментах менялся материал прослоек, варьировались длительность нагружающего ударного импульса и его амплитуда. Целью настоящей работы анализ данных указанных испытаний. Для этого предлагается математическая модель работы ударного стенда, в которой стержни заменены массами, а прослойки — идеальными пружинами с неизвестными жесткостями. В случае двух стержней такая модель представляется системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - (x_1 - x_2)k, \\ m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - c x_2^{1,5} + (x_1 - x_2)k. \end{cases} \quad (1)$$

С начальными условиями при  $t = 0$ :

$$\dot{x}_1 = v_0, \dot{x}_2 = v_0, x_1 = 0, x_2 = 0,$$

где  $v_0$  — скорость стержней в момент перед ударом. Из экспериментальных записей  $\ddot{x}_1(t)$  определялся период времени от начала импульса до точки минимума сигнала  $T_p$ . По значениям  $T_p$  с помощью математических методов из системы (1) определялись жесткости прослоек  $k$  (см. таблицу 1).

Таблица 1.

Материал	Резина плотная	Резина пористая	Линолеум
$k(10^5 \text{ н/м})$	12	0,16	5

Для описания нелинейных свойств деформирования прослоек была использована модель, где присутствуют комбинации упругих и демпфируемых элементов

На рис.1 показана вязкоупругая модель прослойки. Сила сжатия  $F$  упругого элемента определяется соотношением  $F = \kappa \delta$ , демпфирующего элемента  $F = \lambda \dot{\delta}$ , где  $\delta, \dot{\delta}$  — удлинения

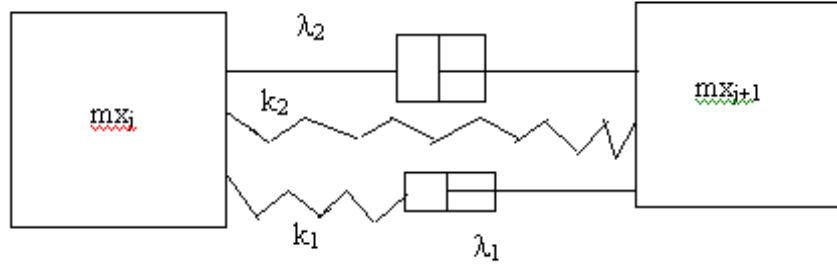


Рис. 1.

и скорость удлинения элемента. Здесь  $\lambda$  — коэффициент вязкости,  $\kappa$  — коэффициент жесткости. Для предлагаемой модели сила  $F_j^r$ , действующая на массу с координатой  $x_j$  справа, определяется соотношением

$$\frac{\dot{F}_j^r}{k_1} + \frac{F_j^r}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{k_1}(\ddot{x}_{j+1} - \ddot{x}_j) + \left(1 + \frac{k_2}{k_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)(\dot{x}_{j+1} - \dot{x}_j) + \frac{k_2}{\lambda_1}(x_{j+1} - x_j). \quad (2)$$

Точно такое же соотношение справедливо и для силы  $F_r^e$ , действующей слева. В результате получаем систему уравнений, определяющих движение масс в модели

$$\frac{m\ddot{x}_1}{k_1} + \frac{m\ddot{x}_j}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{k_1}(\ddot{x}_{j+1} - 2\ddot{x}_j + \ddot{x}_{j-1}) + \left(1 + \frac{k_2}{k_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)(\dot{x}_{j+1} - 2\dot{x}_j + \dot{x}_{j-1}) + \frac{k_2}{\lambda_1}(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}). \quad (3)$$

При этом параметры  $k_1, \lambda_1$  и  $\lambda_2$  считались неизвестными и подбирались из условия наилучшего согласования экспериментальных и теоретических данных.

### Математическое моделирование распространения волн в цепочке стержней

В данном пункте все прослойки между стержнями считаются одинаковыми. Силы  $F_j^r, F_j^e$ , действующие справа и слева на  $j$ -ый стержень со стороны прослойки, согласно (2), определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\dot{F}_j^e}{k_1} + \frac{F_j^e}{\lambda_1} &= -\frac{k_2}{\lambda_1}(u_{j-1}|_{x=y(j-\frac{1}{2})} - u_j|_{x=y(j-\frac{1}{2})}) - \left(1 + \frac{k_2}{k_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)(\dot{u}_{j-1}|_{x=y(j-\frac{1}{2})} - \\ &- \dot{u}_j|_{x=y(j-\frac{1}{2})}) - \frac{\lambda_2}{k_1}(\ddot{u}_{j-1}|_{x=y(j-\frac{1}{2})} - \ddot{u}_j|_{x=y(j-\frac{1}{2})}), j = 1, \dots, J, \\ \frac{\dot{F}_j^r}{k_1} + \frac{F_j^r}{\lambda_1} &= \frac{k_2}{\lambda_1}(u_{j+1}|_{x=y(j+\frac{1}{2})} - u_j|_{x=y(j+\frac{1}{2})}) + \left(1 + \frac{k_2}{k_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)(\dot{u}_{j+1}|_{x=y(j+\frac{1}{2})} - \\ &- \dot{u}_j|_{x=y(j+\frac{1}{2})}) + \frac{\lambda_2}{k_1}(\ddot{u}_{j+1}|_{x=y(j+\frac{1}{2})} - \ddot{u}_j|_{x=y(j+\frac{1}{2})}), j = 1, \dots, J - 1 \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая, что на месте  $(j + 1)$ -го стержня жесткая стенка:  $u_{j+1} = 0$ . Интегрируя (4), получим, что на концах стержней напряжения зависят от изменения толщины прослоек и их скорости

$$\begin{aligned} SEu'_j|_{x=y(j-\frac{1}{2})} = F_j^e &= -k_2(u_{j-1}|_{x=y(j-\frac{1}{2})} - u_j|_{x=y(j-\frac{1}{2})}) - \lambda_2(\dot{u}_{j-1}|_{x=y(j-\frac{1}{2})} - \dot{u}_j|_{x=y(j-\frac{1}{2})}) - \\ &- k_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} (\dot{u}_{j-1}|_{x=y(j-\frac{1}{2})} - \dot{u}_j|_{x=y(j-\frac{1}{2})}) dt, j = 1, \dots, J. \end{aligned}$$

$$SEu'_j|_{x=y(j+\frac{1}{2})} = F_j^r = k_2(u_{j+1}|_{x=y(j+\frac{1}{2})} - u_j|_{x=y(j+\frac{1}{2})}) + \lambda_2(\dot{u}_{j+1}|_{x=y(j+\frac{1}{2})} - \dot{u}_j|_{x=y(j+\frac{1}{2})}) + k_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} (\dot{u}_{j+1}|_{x=y(j+\frac{1}{2})} - \dot{u}_j|_{x=y(j+\frac{1}{2})}) dt, j = 1, \dots, J-1.$$

$$SEu'_J|_{x=y(J+\frac{1}{2})} = F_J^r = -k_2 u_J|_{x=y(J+\frac{1}{2})} - \lambda_2 \dot{u}_J|_{x=y(J+\frac{1}{2})} - k_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} \dot{u}_J|_{x=y(J+\frac{1}{2})} dt.$$

Здесь  $\alpha = \frac{k_1}{\lambda_1}$ ,  $E$  - модуль Юнга. Начальные условия нулевые. В момент времени  $t = 0$  к левому концу нулевого стержня прикладывается нагрузка с амплитудой  $P_0$ :

$$Eu'_0|_{x=-\frac{y}{2}} = P_0 Q(t), \quad Q(t) = \sin(\omega_* t) \quad \text{при} \quad 0 < t < \frac{\pi}{\omega_*},$$

где  $\omega_*$  — частота воздействия. Для цепочки масс получается система уравнений, получаемая из (3) интегрированием относительно  $\ddot{x}_j$

$$m\ddot{x}_0 = k_2(x_1 - x_0) + \lambda_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + k_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} (\dot{x}_1 - \dot{x}_0) dt - SP_0 Q(t);$$

$$m\ddot{x}_j = k_2(x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}) + \lambda_2(\dot{x}_{j-1} - 2\dot{x}_j + \dot{x}_{j+1}) + k_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} (\dot{x}_{j-1} - 2\dot{x}_j + \dot{x}_{j+1}) dt, j = 1, \dots, J-1;$$

$$m\ddot{x}_J = k_2(x_{J-1} - 2x_J) + \lambda_2(\dot{x}_{J-1} - 2\dot{x}_J) + k_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} (\dot{x}_{J-1} - 2\dot{x}_J) dt.$$

Стандартным образом исследуется дисперсионное соотношения последней системы. Значения фазовой скорости  $c_1$  волн в зависимости от волновых чисел  $q$  находится численно из дисперсионного уравнения. Затем производилось сравнение скорости распространения волнового пакета при экспериментах.

## Литература

- [1] Курленя М.В., Опарин В.Н., Востриков В.И. О формировании упругих волновых пакетов при импульсном возбуждении блочных сред. Волны маятникового типа  $U_\mu$  // ДАН СССР, 1993. Т.333, №4.
- [2] Курленя М.В., Опарин В.Н., Востриков В.И. Волны маятникового типа. Ч. I: Состояние вопроса и измерительно-вычислительный комплекс // ФТПРПИ, 1996, №3.
- [3] Курленя М.В., Опарин В.Н., Востриков В.И. Волны маятникового типа. Ч. II: Методика экспериментов и основные результаты физического моделирования // ФТПРПИ, 1991, №4.
- [4] Курленя М.В., Опарин В.Н., Востриков В.И. Волны маятникового типа. Ч. III: Данные натуральных измерений // ФТПРПИ, 1996, №53.