К проблеме управляемости и быстродействия процесса для параболического уравнения с ограниченным управлением

С.А. Айсагалиев, А.П. Белогуров, Т.М. Сартаев
Институт математики и механики КазНУ им.аль-Фараби,Алматы

Аннотация

Рассматриваются вопросы управляемости и быстродействия процессов, описываемых параболическим уравнением с распределенным управлением из заданного множества. Предлагаются методы решения указанных задач путем построения минимизирующих последовательностей.

Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый внутри области $Q = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ следующим управлением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \mu(x,t) + v(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющий на границе Q начальному и граничному условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} + \alpha u(t,1) = 0, \tag{2}$$

где $\mu(x,t) \in L_2(Q,R^1), \varphi(x) \in L_2(I_1,R^1), I_1 = \{x \in R^1/0 \leqslant x \leqslant 1\}$ — заданные функции, α — заданное число, $v(x,t)$ — управление, причем

$$v(x,t) \in V = \Big\{v(x,t) \in L_2(Q,R^1)/ \iint\limits_Q \mid v(x,t) \mid^2 dxdt \leq r^2\Big\}. \tag{3}$$

Ставятся следующие задачи:

Задача 1. (Задача управляемости). Найти управление $v(x,t) \in V$, которое переводит системы (1), (2) из начального состояния $u(0,x) = \varphi(x), x \in I_1$ в заданное конечное состояние $u(x,T) = \psi(x), x \in I_1$ в момент времени T, где $\psi(x) \in L_2(I_1,R^1)$ — заданная функция.

Задача 2. (Задача управляемости с минимальной нормой). Найти управление $v(x,t) \in L_2(Q,R^1)$ с минимальной нормой, которое переводит системы (1), (2) из начального состояния $u(0,x) = \varphi(x)$ в состояние $u(x,T) = \psi(x)$.

Задача 3. (Задача быстродействия). Пусть $v(x,t) \in V, u(x,T) = \psi(x)$, момент времени T — не фиксирован. Найти управление $v(x,t) \in V$, которое за кратчайшее время T переводит системы (1), (2) из начального состояния $u(0,x) = \varphi(x), x \in I_1$, в желаемое конечное состояние $u(x,T) = \psi(x), x \in I_1$.

Задача управляемости с учетом ограниченности ресурсов управления (3) является основной задачей. Решение задач 2, 3 могут быть получены из метода решения задачи 1. Задача управляемости для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями исследованы в [1—3]. Задача управляемости с минимальной нормой на основе проблемы моментов решены в работах [4, 5]. Задача 1 не может быть решена методами, предложенными в [4, 5], в отличие от задачи управляемости с минимальной нормой указанная задача не всегда имеет решения. Поэтому представляет интерес поиск нового конструктивного метода решения задачи 1, ориентированного на применение ЭВМ. В статье предлагается метод решения задач 1 — 3 путем построения минимизирующих последовательностей.

Интегральное уравнение. Решение уравнения (1) с условиями (2) через функцию источника можно представить в виде

$$u(x,t)=\int\limits_0^1 G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x,\xi,t-\tau)[\mu(\xi,\tau)+v(\xi,\tau)]\,d\xi d\tau, \tag{4}$$

где функция

$$G(x,\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2a^2t}\cdot\frac{\cos\lambda_n x\cos\lambda_n\xi}{\omega_n^2},$$

λ_n — положительные корни уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$, величины

$$\omega_n^2=\int\limits_0^1\cos^2\lambda_n x\,dx=\frac{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}{2(\lambda_n^2+\alpha^2)},n=1,2,\ldots.$$

Из (4) при $t=T$, имеем

$$u(x,T)=\psi(x)=\int\limits_0^1 G(x,\xi,T)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^T\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\mu(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.$$

Отсюда следует, что искомое управление $v(\xi,\tau)\in L_2(Q,R^1)$ является решением интегрального уравнения

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi d\tau=\psi_1(x),x\in I_1, \tag{5}$$

где

$$\psi_1(x)=\psi(x)-\int\limits_0^1 G(x,\xi,T)\varphi(\xi)d\xi-\int\limits_0^T\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\mu(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,x\in I_1$$

— известная функция.

Теперь решения задачи управляемости сводится к поиску решения интегрального уравнения (5), удовлетворяющее условию (3).

Преобразование интегрального уравнения. Пусть функция

$$f(x,\tau)=\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi,(x,\tau)\in Q. \tag{6}$$

Тогда из (5) следует, что

$$\int\limits_0^T f(x,\tau)\,d\tau=\psi_1(x),x\in I_1. \tag{7}$$

Следующая теорема позволяет найти общее решение интегрального уравнения (7) относительно неизвестной функции $f(x,\tau),(x,\tau)\in Q$.

Теорема 1. . *Общее решение интегрального уравнения (7) определяется по формуле*

$$f(x,\tau)=\frac{1}{T}\psi_1(x)+p\,(x,\tau)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T p(x,\tau)\,d\tau,\,(x,\tau)\in Q, \tag{8}$$

где $p\,(x,\tau)\in L_2(Q,R^1)$ *— произвольная функция.*

Заметим, что:

1. Функция $f(x,\tau)\in R=P$ может быть представлена в виде $f(x,\tau)=f_1(x,\tau)+f_2(x,\tau)$, где $f_1(x,\tau)=\dfrac{1}{T}\psi_1(x), x\in I_1$ — частное решение интегрального уравнения (7), $f_2(x,\tau)=$ $=p\,(x,\tau)-\dfrac{1}{T}\int_0^T p(x,\tau)d\tau,\,(x,\tau)\in Q$ — общее решение однородного интегрального уравнения

$$\int\limits_0^T f(x,\tau)\,d\tau=0.$$

2. Функция $f_1(x,\tau), f_2(x,\tau)$ ортогональны при любом $x, x\in I_2$. Действительно при любом фиксированном $x\in I_2$,

$$\langle f_1(x,\cdot),f_2(x,\cdot)\rangle_{L_2}=\int\limits_0^T f_1(x,\tau)f_2(x,\tau)d\tau=\frac{1}{T}\psi_1(x)\int\limits_0^T f_2(x,\tau)d\tau=0.$$

3. При любом фиксированном $x, x\in I_1$, норма $\|f(x,\cdot)\|^2=\|f_1(x,\cdot)\|^2+\|f_2(x,\cdot)\|^2$. Отсюда следует, что $\|f(x,\cdot)\|\geq\|f_1(x,\cdot)\|$. Если функция $p\,(x,\tau)\equiv 0$, то $f_2(x,\tau)\equiv 0$. Тогда $\|f(x,\cdot)\|=$ $\|f_1(x,\cdot)\|$.

Как следует из теоремы 1, интегральное уравнение (5), в силу соотношений (6), (7), может быть представлено в виде

$$\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi=\frac{1}{T}\psi_1(x)+p\,(x,\tau)-\frac{1}{T}\int_0^T p\,(x,\tau)d\tau,\,(x,\tau)\in Q, \tag{9}$$

где $p\,(x,\tau)\in L_2(Q,R^1)$ — произвольная функция. Задача управляемости сводится к тому, что: найти решение интегрального уравнения (9) при условии (3).

Оптимизационная задача. Пусть функция

$$w(x,\tau)=p\,(x,\tau)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T p\,(x,\tau)d\tau, p\,(x,\tau)\in L_2(Q,R^1).$$

Введем множество

$$W=\left\{w(x,\tau)\in L_2(Q,R^1)/w(x,\tau)=p\,(x,\tau)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T p\,(x,\tau)d\tau, p\,(x,\tau)\in L_2(Q,R^1)\right\}.$$

Теперь интегральное уравнение (9) запишется в виде

$$\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi=\frac{1}{T}\psi_1(x)+w(x,\tau),\,(x,\tau)\in Q, \tag{10}$$

$$v(\xi,\tau)\in V, w(x,\tau)\in W. \tag{11}$$

Рассмотрим оптимизационную задачу: минимизировать функционал

$$J(v,w)=\int\limits_0^T\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi-\frac{1}{T}\psi_1(x)-w(x,\tau)\right]^2 dxd\tau\to inf \tag{12}$$

при условиях

$$v(\xi,\tau)\in V, w(x,\tau)\in W, \tag{13}$$

где $v=v(\xi,\tau), w=w(x,\tau)$.

Лемма 1. . *Для того, чтобы пара $(v_*(x,\tau),w_*(x,\tau))\in V\times W$ была решением интегрального уравнения (10) при условии (11), необходимо и достаточно, чтобы значение $J(v_*,w_*)=0$, где $(v_*(\xi,\tau),w_*(\xi,\tau))\in V\times W$ — решение оптимизационной задачи (12), (13).*

Таким образом, для решения задачи управляемости, необходимо найти решение оптимизационной задачи (12), (13).

Градиент функционала. Оптимизационная задача (12), (13) может быть решена путем построения минимизирующих последовательностей $\{v_n(\xi,\tau)\}\subset V$, $\{w_n(x,\tau)\}\subset W$, которые сходятся к элементам $v_*(\xi,\tau)\in V$, $w_*(x,\tau)\in W$ при $n\to\infty$. Для этого требуется вычисление градиента функционала (12) в любой точке $v(\xi,\tau)\in V$, $w(x,\tau)\in W$.

Теорема 2. *Функционал (12) при условиях (13) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*

$$J'(v,w)=(J_1'(v,w),J_2'(v,w))\in L_2(Q,R^1)\times L_2(Q,R^1), \tag{14}$$

в любой точке $(v,w)\in V\times W$ равен

$$J_1'(v,w)=2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)G(x,\sigma,T-\tau)v(\sigma,\tau)d\sigma dx+$$

$$+2\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\left[-\frac{1}{T}\psi_1(x)-w(x,\tau)\right]dx=J_1'(\xi,\tau)\in L_2(Q,R^1), \tag{15}$$

$$J_2'(v,w)=-2\left[\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)d\xi-\frac{1}{T}\psi_1(x)-w(x,\tau)\right]=J_2'(x,\tau)\in L_2(Q,R^1). \tag{16}$$

Теорема 3. *Градиент функционала $J'(v,w)\in L_2(Q,R^1)\times\in L_2(Q,R^1)$ удовлетворяет условию Липшица, т.е.*

$$\|J'(v_1,w_1)-J'(v_2,w_2)\|\le L(\|v_1-v_2\|_{L_2}+\|w_1-w_2\|_{L_2}),$$

$$\forall(v_1,w_1),(v_2,w_2)\in V\times W, L=const>0. \tag{17}$$

Проекция точки на множество. Заметим, что:

1. Если $w_1(x,\tau) \in W, w_2(x,\tau) \in W$, то для любых чисел α и β, точка $\alpha w_1(x,\tau)+$ $+\beta w_2(x,\tau) \in W$. В самом деле, из включения $w_1(x,\tau) \in W, w_2(x,\tau) \in W$ следует, что

$$w_1(x,\tau) = p_1(x,\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T p_1(x,\tau)d\tau, w_2(x,\tau) = p_2(x,\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T p_2(x,\tau)d\tau.$$

Тогда

$$\alpha w_1(x,\tau) + \beta w_2(x,\tau) = [\alpha p_1(x,\tau) + \beta p_2(x,\tau)] - \frac{1}{T}\int_0^T [\alpha p_1(x,\tau) + \beta p_2(x,\tau)]\,d\tau \in W.$$

Отсюда следует, что W — линейное многообразие в $L_2(Q,R^1)$;

2. если $p(x,\tau) \equiv 0, (x,\tau) \in Q$ то $w(x,\tau) \in W$. Следовательно, линейное многообразие W является подпространством, т.е. выпуклое замкнутое множество.

Теорема 4. *Любой элемент $f(x,\tau) \in L_2(Q,R^1)$ имеет единственную проекцию на множество W, причем*

$$P_W[f(x,\tau)] = f(x,\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(x,\tau)d\tau, (x,\tau) \in Q, \tag{18}$$

где $P_W[f(x,\tau)]$ — проекция точки $f(x,\tau)$ на множестве W.

Проекция точки $f_1(\xi,\tau) \in L_2(Q,R^1)$ на множестве V определяется так

$$P_V[f_1(\xi,\tau)] = \begin{cases} r \cdot \dfrac{f_1(\xi,\tau)}{[\iint\limits_Q f_1^2(\xi,\tau)d\xi d\tau]^{\frac{1}{2}}}, \text{если} \|f_1\|^2_{L_2} > r^2, \\ f_1(\xi,\tau), \text{если} \|f_1\|^2_{L_2} = \iint\limits_Q f_1^2(\xi,\tau)d\xi d\tau \le r^2. \end{cases} \tag{19}$$

Выпуклый функционал. Рассмотрим функционал (12) при условиях (13). Как показано выше, множество W — выпукло, множество V является выпуклым замкнутым шаром. Следовательно, множество $V \times W$ — выпукло и замкнуто.

Лемма 2. . *Функционал $J(v,w)$ на множестве $V \times W$ дважды непрерывно дифференцируем по Фреше и является выпуклым.*

Минимизирующие последовательности. Рассмотрим оптимизационную задачу (12), (13). Строим последовательности $\{v_n(\xi,\tau)\} \subset V, \{w_n(x,\tau)\} \subset W$ по следующему правилу:

$$v_{n+1}(\xi,\tau) = P_V[v_n(\xi,\tau) - \alpha_n J'_1(v_n,w_n)], n = 0,1,2,\ldots, \tag{20}$$

$$w_{n+1}(x,\tau) = P_W[w_n(x,\tau) - \alpha_n J'_2(v_n,w_n)], n = 0,1,2,\ldots, \tag{21}$$

где $0 < \varepsilon_0 \le \alpha_n \le \dfrac{2}{1+2\varepsilon_1}, \varepsilon_1 > 0$. В частности, $\varepsilon_1 = \dfrac{L}{2}, \alpha_n = \dfrac{1}{L}, \varepsilon_0 = \dfrac{1}{L}$.

Градиент $J'(v,w) = (J'_1(v,w), J'_2(v,w))$ определяется формулами (14) — (16), $L > 0$ — постоянная Липшица из (17), причем $P_V[\bullet], P_W[\bullet]$ определяется соотношениями (18), (19) соответственно.

Теорема 5. . *Пусть последовательности* $\{v_n(\xi,\tau)\}\subset V, \{w_n(x,\tau)\}\subset W$ *определяются соотношениями (20), (21) соответственно. Тогда:*

1. Нижняя грань функционала $J(v,w)$ *достигается на множестве* $V\times W$, *значение* $J_*=\inf\limits_{v\in V, w\in W} J(v,w)=J(v_*,w_*)$;

2. Последовательности $\{v_n(\xi,\tau)\}\subset V, \{w_n(x,\tau)\}\subset W$ *являются минимизирующими, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} J(v_n,w_n)=J_*=\inf J(v,w), v\in V, w\in W$;

3. Последовательности $\{v_n(\xi,\tau)\}\subset V, \{w_n(x,\tau)\}\subset W$ *слабо сходятся к точкам* $v_*=v_*(\xi,\tau), w_*=w_*(x,\tau)$ *соответственно при* $n\to\infty$;

4. Справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0\le J(v_n,w_n)-J_*\le \frac{c}{n}, n=1,2,\dots, c=const>0. \tag{22}$$

5. Если $\inf\limits_{v\in V, w\in W} J(v,w)=J_*=0$, *то управление* $v_*(\xi,\tau)\in V$ *переводит систему (1), (2) из начального состояния* $u(0,x)=\varphi(x), x\in I_1$ *в заданное конечное состояние* $u(x,T)=\psi(x)$;

Если значение $J_*>0$, *то управление* $v_*(\xi,\tau)\in V$ *минимизирует норму* $\|u(x,T)-$ $-\psi(x)\|$, *т.е. управление* $v_*(\xi,\tau)\in V$ *обеспечивает наилучшее приближение* $u(x,T)$ *к* $\psi(x)$.

Теорема 6. . *Пусть приращение функционала* $\Delta J=\Delta J_1+\Delta J_2$ *такое, что*

$$\Delta J_2=\frac{1}{2}\langle J''(v,w)\begin{pmatrix}\Delta v\\ \Delta w\end{pmatrix}, (\Delta v,\Delta w)\rangle_{L_2}\ge \mu\|(\Delta v,\Delta w\|^2, \tag{23}$$

$$(v,w)\in V\times W, \Delta v=\Delta v(\xi,\tau)\in L_2(Q,R^1), \Delta w=\Delta w(x,\tau)\in L_2(Q,R^1),$$

где $\mu=const>0$. *Тогда:*

1. Функционал $J(v,w)$ *сильно выпуклый на* $V\times W$;

2. Последовательности $\{v_n\}\subset V, \{w_n\}\subset W$ *из (20), (21) сильно сходятся к единственной точке* $(v_*,w_*)\in V\times W$, *т.е.* $v_n\to v_*, w_n\to w_*$ *при* $n\to\infty$

$$J_*=\inf_{v\in V, w\in W} J(v,w)=J(v_*,w_*)=\min_{v\in V, w\in W} J(v,w);$$

3. Управление $v_*=v_*(\xi,\tau)\in V$ *переводит траекторию системы (1) из начального состояния* $u(0,x)=\varphi(x), x\in I_1$ *в заданное конечное состояние* $u(x,T)=\psi(x), x\in I_1$, *тогда и только тогда, когда значение* $J(v_*,w_*)=0$;

4. Справедлива оценка

$$\|(v_n,w_n)-(v_*,w_*)\|^2\le \frac{2}{\mu}[J(v_n,w_n)-J(v_*,w_*)]\le \frac{2c}{\mu n}, n=1,2,\dots. \tag{24}$$

Построение слабо предельной точки. Рассмотрим случай, когда функционал $J(v,w)$, $(v,w)\in V\times W$ не является сильно выпуклым.

Как следует из теоремы 5, в указанном случае, минимизирующие последовательности $\{v_n\}\subset V, \{w_n\}\subset W$ слабо сходятся к точкам $v_*=v*(\xi,\tau)\in V$, $w_*=w_*(x,\tau)\in W$, т.е. $v_n\stackrel{c}{\to} v_*, w_n\stackrel{c}{\to} w_*$ при $n\to\infty$. Для определения управления $v_*(\xi,\tau)$, $w_*(x,\tau)$ необходимо найти слабо предельные точки минимизирующих последовательностей $\{v_n\}\subset V$, $\{w_n\}\subset W$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J_k(v,w)=\int\limits_0^T\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)d\xi-\frac{1}{T}\psi_1(x)-w(x,\tau)\right]^2 dxd\tau+$$

$$+\varepsilon_k\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^1 v^2(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^T\int\limits_0^1 w^2(x,\tau)dxd\tau\right]\to\inf \tag{25}$$

при условиях

$$v(\xi,\tau)\in V, w(x,\tau)\in W, \tag{26}$$

где $\varepsilon_k>0, k=1,2,\ldots, \lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0.$

Теорема 7. . *Функционал (25) при условиях (26) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*

$$J_k'(v,w)=(J_{1k}'(v,w),J_{2k}'(v,w))\in L_2(Q,R^1)\times L_2(Q,R^1)$$

в любой точке $(v,w)\in V\times W$ *равен*

$$J_{1k}'(v,w)=J_1'(v,w)+2\varepsilon_k v(\xi,\tau),\varepsilon_k>0,k=1,2,\ldots,\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0, \tag{27}$$

$$J_{2k}'(v,w)=J_2'(v,w)+2\varepsilon_k w(x,\tau),\varepsilon_k>0,k=1,2,\ldots,\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0, \tag{28}$$

где $J_1'(v,w), J_2'(v,w)$ *определяются соотношениями (15), (16) соответственно.*

На основе соотношений (27), (28), (29) строим последовательности $\{v_n^k\}\subset V$, $\{w_n^k\}\subset W$, где

$$v_{n+1}^k=P_V[v_n^k-\alpha_{nk}J_{1k}'(v_n^k,w_n^k)], n=0,1,2,\ldots,$$

$$w_{n+1}^k=P_W[w_n^k-\alpha_{nk}J_{2k}'(v_n^k,w_n^k)], n=0,1,2,\ldots,$$

где $0\le\varepsilon_{0k}\le\alpha_{nk}\le\dfrac{2}{L_k+2\varepsilon},\varepsilon>0,L_k>0$ — постоянная Липшица из (29), $\varepsilon_k>0,k=1,2,\ldots,$ $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0.$

Теорема 8. . *Градиент функционала* $J_k'(v,w)\in L_2(Q,R^1)\times L_2(Q,R^1)$ *удовлетворяет условию Липшица, т.е.*

$$\|J_k'(v_1,w_1)-J_k'(v_2,w_2)\|\le L_k(\|v_1-v_2\|+\|w_1-w_2\|), \tag{29}$$

$$\forall(v_1,w_1),(v_2,w_2)\in V\times W, L_k=const>0,\varepsilon_k>0,k=1,2,\ldots.$$

Лемма 3. . *Функционал (25) при условиях (26) дважды непрерывно дифференцируем по Фреше и является сильно выпуклым, для любого* $\varepsilon_k>0,k=1,2,\ldots.$

На основе соотношений (27)-(29) строим последовательности $\{v_n^k\}\subset V,\{w_n^k\}\subset W$, где

$$v_{n+1}^k=P_V[v_n^k-\alpha_{nk}J_{1k}'(v_n^k,w_n^k)], n=0,1,2,\ldots,$$

$$w_{n+1}^k=P_W[w_n^k-\alpha_{nk}J_{2k}'(v_n^k,w_n^k)], n=0,1,2,\ldots,$$

где $0\le\varepsilon_{0k}\le\alpha_{nk}\le\frac{2}{L_k+2\varepsilon},\varepsilon>0,L_k>0$ — постоянная Липшица из (29), $\varepsilon_k>0,k=1,2,\ldots,$ $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0.$

Теорема 9. *. Для любого $\varepsilon_k > 0, k = 1, 2, \dots,$ верны утверждения:*

1. Последовательность $\{v_n^k, w_n^k\} \subset V \times W$ является минимизирующей, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} J_k(v_n^k, w_n^k) = J_k^* = \inf_{v\in V, w\in W} J_k(v, w);$$

2. Последовательность $\{v_n^k, w_n^k\}$ сходится к единственной точке (v_*^k, w_*^k) при $n \to \infty$, т.е. $v_n^k \to v_*^k, w_n^k \to w_*^k$ при $n \to \infty$, где

$$J_k(v_*^k, w_*^k) = J_k^* = \inf_{v\in V, w\in W} J_k(v, w) = \min_{v\in V, w\in W} J_k(v, w).$$

3. Справедливы следующие оценки

$$0 \le J_k(v_n^k, w_n^k) - J_k(v_*^k, w_*^k) \le \frac{m_{0k}}{n}, m_{0k} = const > 0, n = 1, 2, \dots;$$

$$\|(v_n^k - v_*^k, w_n^k - w_*^k)\| \le \frac{c_{0k}}{n}, c_{0k} = const > 0, n = 1, 2, \dots.$$

4. Последовательность $\{v_*^k, w_*^k\} \subset V \times W$ соответствующие $\varepsilon_k > 0, k = 1, 2, \dots,$ при $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ сходится к элементу $v_*(\xi, \tau), w_*(x, \tau) \in V \times W$, где v_*, w_* — оптимальное управление в задаче (14), (15).

Управление с минимальной нормой. В отличие от результатов работы [4], в предложенном выше методе решения задачи управляемости можно найти управления с минимальной нормой.

Кратко сформулируем последовательность решения указанной задачи:

1. Находим решение интегрального уравнения (12), (13) путем построения минимизирующей последовательности $\{v_n, w_n\} \subset L_2(Q, R^1) \times W$ по алгоритму

$$v_{n+1} = v_n - \alpha_n J_1'(v_n, w_n), w_{n+1} = P_W[w_n - \alpha_n J_2'(v_n, w_n)], n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $V = L_2(Q, R^1)$. В результате, находим $v_* = v_*(\xi, \tau), w_* = w_*(x, \tau), J(v_*, w_*) = 0$.

2. Определим величину

$$r_*^2 = \iint\limits_Q v_*^2(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

3. Выберем значение $r = \frac{r_*}{2}$. Находим решение задачи (12), (13), путем построения минимизирующей последовательности

$$v_{n+1} = P_V[v_n - \alpha_n J_1'(v_n, w_n)], w_{n+1} = P_W[w_n - \alpha_n J_2'(v_n, w_n)], n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $V = \{v \in L_2(Q, R^1) / \|v\|^2 \le r^2 = \frac{r_*^2}{4}\}$. В результате,находим $v_{**} = v_{**}(\xi, \tau)$, $w_{**} = w_{**}(x, \tau)$, значение $J(v_{**}, w_{**}) = J_{**}$. Здесь возможны случаи: а) $J_{**} = 0$; б) $J_{**} > 0$. В случае а) выберем новое значение $r = \frac{1}{2}\left(\frac{r_*}{2}\right) = \frac{r_*}{4}$ и решаем задачу (12), (13) с новым значением $r = \frac{r_*}{4}$. В случае б) выберем значение $r = \frac{1}{2}\left(r_* + \frac{r_*}{2}\right) = \frac{3r_*}{4}$ и решаем задачу (12), (13) и т.д. Применяя данную процедуру находим минимальное значение $r > 0$.

Оптимальное быстродействие. Задача оптимального быстродействия может быть решена по следующему алгоритму:

1. Выбирается значение $T = T_0$, где T_0 — заданная величина. Строится последовательность $\{v_n, w_n\} \subset V \times W$ по правилу (20), (21), множество

$$V = \left\{ v(\xi,\tau) \in L_2(Q,R^1) / \int\limits_0^T \int\limits_0^1 v^2(\xi,\tau)d\xi d\tau \le r^2 \right\},$$

где r — заданное число. Определим $v_* = v_*(\xi,\tau)$, $w_* = w_*(x,\tau)$, где $J(v_*, w_*) = J_* = = \inf\limits_{v\in V, w\in W} J(v,w)$.

2. Если значение $J_* > 0$, то новое значение $T = 2T_0$, а в случае $J_* = 0$ значение $T = T_0/2$.

3. Для новых значений

$$T = \begin{cases} 2T_0, \text{если} J_* > 0 \\ T_0/2, \text{если} J_* = 0 \end{cases}$$

строятся последовательности $\{v_n, w_n\}$ и определяются $v_{**} = v_{**}(\xi,\tau)$, $w_{**} = w_{**}(x,\tau)$ и значение $J(v_{**}, w_{**}) = \inf\limits_{v\in V, w\in W} J(v,w) = J_{**}$. Здесь возможны случаи: а) $J_{**} > 0$; б) $J_{**} = 0$. Определяется значение

$$T = \begin{cases} 3T_0, \text{если} J_* > 0 \\ T_0/4, \text{если} J_* = 0 \end{cases}$$

Последовательно применяя данную схему вычисления T находим минимальное значение $T = T_*$.

Литература

[1] *Айсагалиев С.А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений. // Дифференциальные уравнения, Минск-Москва, 1991. Т.27, N9, с. 1476-1486.

[2] *Айсагалиев С.А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений. // Математический журнал, 2005, N4, с. 7-13

[3] *Айсагалиев С.А.Айсагалиев Т.С.* Методы решения краевых задач. – Алматы, 2002, 348 с.

[4] *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978, 464 с.

[5] *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределлнными параметрами – М.: Наука, 1975, 568 с.