Управляемость линейных систем интегро-дифференциальных уравнений

С.А. Айсагалиев, А.А. Кабидолданова
Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби
e-mail: kabasem@mail.ru

Аннотация

Исследованы вопросы разрешимости задач управляемости для линейных систем интегро - дифференциальных уравнений и предлагается конструктивный метод построения их решения. Рассмотрены линейные интегральные уравнения и интегральные уравнения Фредгольма первого рода, возникающие при решении различных краевых задач обыкновенных и интегро - дифференциальных уравнений.

Постановка задачи I. Пусть управляемый процесс описывается уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u(t,\tau)d\tau + \mu(t),\ t \in I = [t_0, t_1], \tag{1}$$

с краевым условием

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \tag{2}$$

где $A(t)$, $B(t)$ – заданные матрицы с кусочно-непрерывными элементами порядков $n \times n$,
$n \times m$ соответственно, $\mu(t)$, $t \in I$ – заданная n - мерная функция с кусочно - непрерывными элементами, $u(t,\tau) \in L_2(Q, R^r)$ – управление, $K(t,\tau) = \|k_{ij}(t,\tau)\|$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,r}$ – заданная матрица с кусочно - непрерывными элементами, моменты времени t_0, t_1 – фиксированы, x_0, $x_1 \in R^n$ – любые фиксированные точки. При указанных предположениях система (1) при каждом фиксированном $u(t,\tau) \in L_2(Q, R^r)$ имеет единственное решение $x(t) = x(t; t_0; x_0, u)$, $t \in I$, исходящее из точки $x_0 \in R^n$, функция $x(t)$, $t \in I$ – абсолютна непрерывна, в общем случае $x(t_1) \neq x_1$.

Пусть $U \subset L_2(Q, R^r)$ – множество тех и только тех управлений для которых $x(t_1) = x(t_1; t_0, x_0, u) = x_1$, т.е.

$$U = \{u(t,\tau) \in L_2(Q, R^r) / x(t_1; t_0, x_0, u) = x_1\} \subset L_2(Q, R^r).$$

Ставится задача: найти множество U.

Введем обозначение

$$v(t) = \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u(t,\tau)d\tau, \quad t \in I,\ v(\cdot) \in L_2(Q, R^m). \tag{3}$$

Теперь уравнение (1) с краевым условием (2) запишется так

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)v(t) + \mu(t), \quad v(\cdot) \in L_2(I, R^m),\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1. \tag{4}$$

Решение системы (4) имеет вид

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau,\ t\in I,$$

где $\Phi(t,\tau)=\theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\xi}=A(t)\xi$.

Тогда управления $v(t)$, $t\in I$, которые переводят траекторию системы (4) из начального состояния $x_0\in R^n$ в состояние $x_1\in R^n$, определяются из условия

$$x_1=x(t_1)=\Phi(t_1,t_0)x_0+\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,t)B(t)v(t)dt+\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,t)\mu(t)dt.$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)v(t)dt=a,\quad a=\Phi(t_0,t_1)[x_1-\Phi(t_1,t_0)x_0]-\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu(t)dt\in R^n. \quad (5)$$

Итак, решение исходной задачи сводится к решению интегрального уравнения вида (3), где $v(t)$, $t\in I$, - решение интегрального уравнения (5). Так как уравнение (5) является частным случаем уравнения (3), то исследуем интегральное уравнение (3).

Интегральное уравнение. Рассмотрим интегральное уравнение следующего вида

$$Ku=\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t,\tau)u(t,\tau)d\tau=v(t),\quad t\in I=[t_0,t_1], \quad (6)$$

где $K(t,\tau)=\|k_{ij}(t,\tau)\|$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, – известная матрица порядка $n\times m$, элементы матрицы $K(t,\tau)$, функции $k_{ij}(t,\tau)$ измеримы и принадлежат классу L_2 на квадрате

$$Q=\Big\{(t,\tau)\in R^2/t\in I,\quad \tau\in I\Big\},\quad \text{т.е.}\quad \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_1}|k_{ij}(t,\tau)|^2d\tau dt<\infty,$$

функция $v(t)\in L_2(I,R^n)$ – задано, $u(t,\tau)\in L_2(Q,R^m)$ – искомая функция, моменты времени t_0,t_1 – фиксированы, $K:L_2(Q,R^m)\to L_2(I,R^n)$.

Ставятся следующие задачи:

Задача I.1. Найти необходимые и достаточные условия существования решения интегрального уравнения (6).

Задача I.2. Найти общее решение интегрального уравнения (6).

Частный случай интегрального уравнения (6) исследован в работах [1 – 3], методы решения различных краевых задач изложены в [4, 5]. В данной статье рассматривается общий случай.

Существование решения интегрального уравнения. Необходимые и достаточные условия существования решения интегрального уравнения (6) дает следующая теорема.

Теорема 1. *Интегральное уравнение (6) имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(t) = \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)K^*(t,\tau)d\tau, \ \ t \in I, \tag{7}$$

положительно определена для любого $t \in I$, где $(*)$ – знак транспонирования.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть матрица $C(t) > 0, \ \forall t, t \in I$, т.е. квадратичная форма $b^*C(\xi)b > 0, \forall b, b \in R^n, \ \xi \in I$. Покажем, что интегральное уравнение (6) имеет решение. В самом деле, поскольку матрица $C(t) > 0, \ t \in I$, то существует обратная матрица $C^{-1}(t), \ t \in I$. Выберем $u(t,\tau) = K^*(t,\tau)C^{-1}(t)v(t), \ t,\tau \in I$, где $v(t) \in L_2(I, R^n)$ – заданная функция. Тогда

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u(t,\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)K^*(t,\tau)C^{-1}(t)v(t)d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)K^*(t,\tau)d\tau C^{-1}(t)v(t)dt = C(t)C^{-1}(t)v(t) = v(t), \ t \in I.$$

Следовательно, в случае, когда матрица $C(t) > 0, \ t \in I$, уравнение (6) имеет, по крайней мере, одно решение $u(t,\tau) = K^*(t,\tau)C^{-1}(t)v(t), \ t,\tau \in I$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть интегральное уравнение (6) имеет решение при любом заданном $v(\cdot) \in L_2(I, R^n)$. Покажем, что матрица $C(t) > 0, \ \forall t, t \in I$. Заметим, что квадратичная форма $a^*C(t)a \geqslant 0, \ \forall a, \ a \in R^n$ при всех $t \in I$. В самом деле, как следует из соотношения (7), верно неравенство

$$a^*C(t)a = \int_{t_0}^{t_1} a^*K(t,\tau)K^*(t,\tau)a d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \langle K^*(t,\tau)a, \ K^*(t,\tau)a\rangle d\tau \geqslant 0,$$

где $< \cdot, \cdot >$ - скалярное произведение векторов. Следовательно, для доказательства $C(t) > 0, \ \forall t, \ t \in I$, достаточно показать, что матрица $C(t), \ t \in I$ неособая.

Предположим противное. Пусть матрица $C(t), \ t \in I$ особая. Тогда найдется момент времени $t = \xi \in I$ и существует вектор $c = C(\xi) \in R^n, \ \ c \neq 0$ такой, что $c^*C(t)c = 0$. Определим вектор $w(\tau) = K^*(\xi,\tau)c, \ \tau \in I, \ w(\cdot) \in L_2(I, R^n)$. Заметим, что

$$\int_{t_0}^{t_1} w^*(\tau)w(\tau)d\tau = c^* \int_{t_0}^{t_1} K(\xi,\tau)K^*(\xi,\tau)d\tau c = c^*C(\xi)c = 0. \tag{8}$$

Тогда функция $w(\tau) \equiv 0, \ \forall \tau, \ \tau \in I$. Так как интегральное уравнение (6) имеет решение для любого $v(\cdot) \in L_2(I, R^n)$, то в частности, существует функция $\overline{u}(\xi,\tau) \in L_2(Q, R^m)$ такая, что $(v(\cdot) = c)$

$$\int_{t_0}^{t_1} K(\xi,\tau)\overline{u}(\xi,\tau)d\tau = c = C(\xi), \ \xi \in I. \tag{9}$$

Как следует из соотношений (8), (9), верно равенство

$$0 = \int\limits_{t_0}^{t_1} w^*(\tau)\overline{u}(\xi,\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t_1} c^* K(\xi,\tau)\overline{u}(\xi,\tau)d\tau = c^*c.$$

Это противоречит тому, что $c = C(\xi) \neq 0$. Противоречие возникло вследствие предположения о том, что матрица $C(t),\ t \in I$ особая. Следовательно, матрица $C(t) > 0,\ t \in I$. Необходимость доказана. Теорема доказана.

Общее решение интегрального уравнения. Следующая теорема позволяет найти множество решений интегрального уравнения (6).

Теорема 2. *Пусть матрица $C(t),\ t \in I$, положительно определена. Тогда общее решение интегрального уравнения (6) имеет вид*

$$u(t,\tau) = K^*(t,\tau)C^{-1}(t)v(t) + p(t,\tau) - K^*(t,\tau)C^{-1}(t)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)p(t,\tau)d\tau,\ t \in I. \quad (10)$$

где $p(t,\tau) \in L_2(Q,R^m)$ - произвольная функция, $v(\cdot) \in L_2(I,R^n)$.

Доказательство. Введем следующие множества

$$U = \left\{ u(t,\tau) \in L_2(Q,R^m) \Big/ \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u(t,\tau)d\tau = v(t),\ t \in I \right\}, \quad (11)$$

$$W = \Bigg\{ u(t,\tau) \in L_2(Q,R^m) \Big/ u(t,\tau) = K^*(t,\tau)C^{-1}(t)v(t) + p(t,\tau) -$$

$$- K^*(t,\tau)C^{-1}(t)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)p(t,\tau)d\tau,\ \forall p(t,\tau),\ p(t,\tau) \in L_2(Q,R^m) \Bigg\}, \quad (12)$$

где множество U содержит все решения интегрального уравнения (6). Теорема утверждает, что функция $u(t,\tau) \in L_2(Q,R^m)$ принадлежит множеству U тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству W, т.е. $U = W$.

Докажем, что $U = W$. Для этого достаточно показать, что: $W \subset U,\ U \subset W$. Покажем, что $W \subset U$. В самом деле, если $u(t,\tau) \in W$, то как следует из соотношения (12) верно равенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u(t,\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)\Big[K^*(t,\tau)C^{-1}(t)v(t) + p(t,\tau) - K^*(t,\tau)C^{-1}(t) \times$$

$$\times \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)p(t,\tau)d\tau\Big]d\tau = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)K^*(t,\tau)d\tau C^{-1}(t)v(t) + \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)p(t,\tau)d\tau -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)K^*(t,\tau)d\tau C^{-1}(t)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)p(t,\tau)d\tau = v(t),\ t \in I.$$

Отсюда следует, что $u(t,\tau) \in U$. Следовательно, множество $W \subset U$.

Покажем, что $U \subset W$. Пусть $u_*(t,\tau) \in U$, т.е. для функции $u_*(t,\tau) \in U$ выполнено равенство (см. (11))

$$\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u_*(t,\tau)d\tau = v(t),\ t \in I.$$

Заметим, что в соотношении (12) функция $p(t,\tau) \in L_2(Q,R^m)$ произвольная. В частности, можно выбрать $p(t,\tau) = u_*(t,\tau),\ (t,\tau) \in Q$. Теперь функция $u(t,\tau) \in W,\ (t,\tau) \in Q$, запишется в виде

$$\begin{aligned} u(t,\tau) &= K^*(t,\tau)C^{-1}(t)v(t) + u_*(t,\tau) - K^*(t,\tau)C^{-1}(t)\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u_*(t,\tau)d\tau = \\ &= K^*(t,\tau)C^{-1}(t)[\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u_*(t,\tau)d\tau] + u_*(t,\tau) - \\ &- K^*(t,\tau)C^{-1}(t)\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u_*(t,\tau)d\tau = u_*(t,\tau). \end{aligned}$$

Следовательно, $u_*(t,\tau) = u(t,\tau) \in W$. Отсюда следует, что $U \subset W$. Из включений $W \subset U,\ \ U \subset W$ следует, что $U = W$. Теорема доказана.

Свойства решения. Как следует из общего решения (10) интегрального уравнения (6) верны утверждения:

1. Функция $u(t,\tau) \in W = U$ может быть представлена в виде $u(t,\tau) = u_1(t,\tau) + u_2(t,\tau)$, где $u_1(t,\tau) = K^*(t,\tau)C^{-1}(t)v(t),\ (t,\tau) \in Q$, – частное решение интегрального уравнения (6), $u_2(t,\tau) = p(t,\tau) - K^*(t,\tau)C^{-1}(t)\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)p(t,\tau)d\tau,\ (t,\tau) \in Q$, – решение однородного интегрального уравнения

$$\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u_2(t,\tau)d\tau = 0.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u_1(t,\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)K^*(t,\tau)d\tau C^{-1}(t)v(t) = v(t),\ t \in I, \\ &\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u_2(t,\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)p(t,\tau)d\tau - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)K^*(t,\tau)d\tau C^{-1}(t)\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)p(t,\tau)d\tau = 0; \end{aligned}$$

2. Функции $u_1(t,\tau) \in L_2(Q,R^m),\ u_2(t,\tau) \in L_2(Q,R^m)$ ортогональны, т.е. $u_1 \perp u_2$. Действительно,

$$\langle u_1, u_2\rangle_{L_2} = \int_{t_0}^{t_1} u_1^*(t,\tau)u_2(t,\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} v^*(t)C^{-1}(t)K(t,\tau)[p(t,\tau) - K^*(t,\tau)C^{-1}(t)\times$$

$$\times \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)p(t,\tau)d\tau]d\tau = v^*(t)C^{-1}(t)\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)p(t,\tau)d\tau - v^*(t)\times$$

$$\times C^{-1}(t)\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)K^*(t,\tau)d\tau C^{-1}(t)\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)p(t,\tau)d\tau \equiv 0,\ \forall t,\ t\in I.$$

3. Функция $u_1(t,\tau) = K^*(t,\tau)C^{-1}(t)v(t)$, $(t,\tau)\in Q$ является решением интегрального уравнения (6) с минимальной нормой в $L_2(Q,R^m)$. В самом деле, $\|u\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$. Отсюда следует, что $\|u\|^2 \geq \|u_1\|^2$. Если функция $p(t,\tau)\equiv 0,\ (t,\tau)\in Q$, то функция $u_2(t,\tau)\equiv 0,\ (t,\tau)\in Q$. Тогда $u(t,\tau) = u_1(t,\tau),\ \|u\| = \|u_1\|$;

4. Множество решений интегрального уравнения (6) является выпуклым. Как следует из доказательства теоремы 2, множеством всех решений уравнения (6) является W. Покажем, что W – выпуклое множество. Пусть

$$\bar{u}(t,\tau) = K^*(t,\tau)C^{-1}(t)v(t) + \bar{p}(t,\tau) - K^*(t,\tau)C^{-1}(t)\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)\bar{p}(t,\tau)d\tau \in W,$$

$$\bar{\bar{u}}(t,\tau) = K^*(t,\tau)C^{-1}(t)v(t) + \bar{\bar{p}}(t,\tau) - K^*(t,\tau)C^{-1}(t)\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)\bar{\bar{p}}(t,\tau)d\tau \in W \quad -$$

– произвольные элементы множества W. Функция

$$u_\alpha(t,\tau) = \alpha\bar{u}(t,\tau) + (1-\alpha)\bar{\bar{u}}(t,\tau), \alpha\in[0,1], (t,\tau)\in Q.$$

Легко убедится в том, что $u_\alpha(t,\tau)\in W$ при всех $\alpha,\ \alpha\in[0,1]$. В самом деле,

$$\begin{aligned} u_\alpha(t,\tau) &= \alpha\bar{u}(t,\tau) + (1-\alpha)\bar{\bar{u}}(t,\tau) = \\ &= K^*(t,\tau)C^{-1}(t)v(t) + p_\alpha(t,\tau) - K^*(t,\tau)C^{-1}(t)\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)p_\alpha(t,\tau)d\tau \in W, \end{aligned}$$

где $p_\alpha(t,\tau) = \alpha\bar{p}(t,\tau) + (1-\alpha)\bar{\bar{p}}(t,\tau)\in L_2(Q,R^m)$.

Следующая теорема позволяет найти множество всех управлений $v(t)$, $t\in I$, которые являются решениями интегрального уравнения (5).

Теорема 3. *Пусть матрица*

$$W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt \tag{13}$$

порядка $n\times n$ положительно определена. Тогда управление $v(\cdot)\in L_2(I,R^m)$ переводит траекторию системы (4) из любой начальной точки $x_0\in R^n$ в любое конечное состояние $x_1\in R^n$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} v(t)\in V = \{v(\cdot)\in L_2(I,R^m)/v(t) = w(t) + \\ + \Lambda_1(t,x_0,x_1) + N_1(t)z(t_1,w),\ t\in I, \forall w(t),\ w(\cdot)\in L_2(I,R^m)\}, \end{aligned} \tag{14}$$

где функция $z(t) = z(t, w)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)w(t),\ z(t_0) = 0,\ w(\cdot) \in L_2(I, R^m).$$

Решение дифференциального уравнения (4), соответствующее управлению $v(t) \in V$, определяется по формуле

$$x(t) = z(t, w) + \Lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t)z(t_1, w),\ t \in I,$$

где

$$\Lambda_1(t, x_0, x_1) = B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)a,\ N_1(t) = -B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1),$$

$$\Lambda_2(t, x_0, x_1) = \Phi(t, t_0)W(t, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)x_0 + \Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1)x_1 + \\ + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\mu(\tau)d\tau - \Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu(t)dt,$$

$$N_2(t) = -\Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1).$$

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теорем 1,2. В самом деле, интегральное уравнение (см. (5))

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)v(t)dt = a$$

является частным случаем уравнения (6), где $K(t, \tau) = K(t_0, \tau) = \Phi(t_0, t)B(t)$, $t \in I = [t_0, t_1]$, $u(t_0, t) = v(t)$, $\Phi(t_0, t)$ – неособая матрица. При фиксированном $t = t_0$, матрица

$$C(t_0) = W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)K^*(t_0, t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt$$

должна быть положительно определена (см. (13)). Согласно теореме 2 при $t = t_0$, имеем

$$W = \Big\{u(t_0, t) \in L_2(I, R^m)/u(t_0, t) = v(t) = w(t) + \Lambda_1(t, x_0, x_1) + N_1(t)z(t_1, w), \\ \forall w(t),\ w(\cdot) \in L_2(I, R^m)\Big\} = V,$$

где $w(t) = p(t_0, t)$, $\Lambda_1(t, x_0, x_1) = K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0)a$, $N_1(t)z(t_1, w) = -K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0) \times \times \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)p(t_0, t)dt$. Вектор функция $v(t)$ из (5) заменена на вектор $a \in R^n$.

Заметим, что $z(t_1) = \Phi(t_1, t_0)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)w(t)dt$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим интегральное уравнение (3), где $v(t)$, $t \in I$ – известная функция, определяемая по формуле (14). Множество

$$U = \Big\{u(t, \tau) \in L_2(Q, R^r)/\int_{t_0}^{t_1} K(t, \tau)u(t, \tau)d\tau = v(t),\ t \in I,\ v(t) \in V\Big\}.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) матрица $C(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)K^*(t_0,\tau)d\tau, \ \ t \in I = [t_0, t_1]$ *положительно определена;*

2) матрица $W(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt$ *положительно определена.*

Тогда управление $u(t,\tau) \in L_2(Q, R^r)$ *переводит траекторию системы (1) из любой начальной точки* $x_0 \in R^n$ *в любое конечное состояние* $x_1 \in R^n$ *тогда и только тогда, когда*

$$u(t,\tau) \in U = \Big\{u(t,\tau) \in L_2(Q, R^r)/u(t,\tau) = K^*(t,\tau)C^{-1}(t)v(t) + p(t,\tau) -$$

$$- K^*(t,\tau)C^{-1}(t)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)p(t,\tau)d\tau, \ \forall p(t,\tau), \ p(t,\tau) \in L_2(Q, R^r)\Big\}, \quad (15)$$

где функция $v(t) \in V \subset L_2(Q, R^m)$.

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теорем 1,2. Общее решение интегрального уравнения (3) определяется по формуле (15).

Постановка задачи II. Рассмотрим задачу управляемости для интегро-дифференциального уравнения вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u(\tau)d\tau + \mu(t), \ t \in I = [t_0, t_1], \quad (16)$$

$$x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1, \ u(\tau) \in L_2(Q, R^r). \quad (17)$$

В отличие от краевой задачи (1), (2), управление не зависит от t . Для задачи управляемости (16), (17) функция

$$v(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u(\tau)d\tau, \ t \in I, \ v(\cdot) \in L_2(Q, R^m). \quad (18)$$

Ставится задача: Найти множество

$$U = \Big\{u(\tau) \in L_2(Q, R^r)/\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u(\tau)d\tau = v(t), \ \ t \in I, \ v(t) \in V\Big\}, \quad (19)$$

где множество V определяется по формуле (13).

Интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Рассмотрим уравнение

$$Lu = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u(\tau)d\tau = v(t), \ \ t \in I = [t_0, t_1], \quad (20)$$

где ядро оператора $K(t,\tau)$ удовлетворяет вышеуказанным условиям, $L : L_2(I, R^m) \to$ $\to L_2(I, R^n)$.

Задача II.1. Найти необходимые и достаточные условия существования решения интегрального уравнения (20).

Задача II.2. Найти решение интегрального уравнения (20).

Для решения задач II.1, II.2 необходимо исследовать следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} |v(t) - \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u(\tau)d\tau|^2 dt \to inf \tag{21}$$

при условиях

$$u(\cdot) \in L_2(I, R^m),\ \tau \in I = [t_0,\, t_1], \tag{22}$$

где $v(t) \in L_2(I, R^n)$ – заданная вектор функция, $|\cdot|$ – евклидова норма.

Теорема 5. *Функционал (21) при условии (22) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала $J'(u) \in L_2(I, R^m)$ в любой точке $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ определяется по формуле*

$$J'(u) = -2\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)v(t)dt + 2\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)K(t,\sigma)u(\sigma)d\sigma dt; \tag{23}$$

Градиент функционала $J'(u) \in L_2(I, R^m)$ удовлетворяет условию Липшица;

Функционал (21) является выпуклым;

Вторая производная $J''(u)$ по Фреше

$$J''(u) = 2\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\sigma)K(t,\tau)dt; \tag{24}$$

Если выполнено неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \xi^*(\sigma)\left(\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)K(t,\tau)dt\right)\xi(\tau)d\tau d\sigma =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)\xi(\tau)d\tau\right]^2 dt \geqslant \mu\int_{t_0}^{t_1}|\xi(t)|^2dt,\ \mu > 0,\ \forall\xi(t) \in L_2(I, R^m), \tag{25}$$

то функционал (21) является сильно выпуклым на $L_2(I, R^m)$.

Доказательство. Как следует из (21) функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1}\left[v^*(t)v(t) - 2v^*(t)\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} u^*(t)K^*(t,\tau)K(t,\sigma)u(\sigma)d\sigma d\tau\right]dt.$$

Тогда приращение функционала ($u,\, u+h \in L_2(I, R^m)$)

$$\Delta J = J(u+h) - J(u) = \int_{t_0}^{t_1}\langle -2\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\sigma)v(t)dt + 2\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)K(t,\sigma)u(\sigma)d\sigma dt,\ h(\sigma)\rangle d\sigma +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} h^*(\tau)K^*(t,\tau)K(t,\sigma)h(\sigma)d\sigma d\tau\right]dt = \langle J'(u),\, h\rangle + o(h), \quad (26)$$

где

$$|o(h)| = \left|\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} h^*(\tau)K^*(t,\tau)K(t,\sigma)h(\sigma)d\sigma d\tau\right]dt\right| \leqslant c_1\|h\|^2_{L_2}.$$

Из (26) следует, что $J'(u)$ определяется по формуле (23).

Так как

$$J'(u+h) - J'(u) = 2\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)K(t,\sigma)h(\sigma)d\sigma dt,$$

то

$$|J'(u+h) - J'(u)| \leqslant 2\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \|K^*(t,\tau)\|\|K(t,\sigma)\||h(\sigma)|d\sigma dt \leqslant C_2\|h\|_{L_2}.$$

Тогда для любых $u, u+h \in L_2(I, R^m)$

$$\|J'(u+h) - J'(u)\|_{L_2} = \left(\int_{t_0}^{t_1} |J'(u+h) - J'(u)|^2 d\tau\right)^{1/2} \leqslant L\|h\|,$$

то есть градиент функционала $J'(u) \in L_2(I, R^m)$ удовлетворяет условию Липшица.

Покажем, что функционал (21) является выпуклым. В самом деле, для любых $u, w \in \quad \in L_2(I, R^m)$ и при всех α, $\alpha \in [0,1]$ верно неравенство

$$\langle J'(u) - J'(w),\, u-w\rangle_{L_2} = \left\langle 2\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)K(t,\sigma)[u(\sigma) - w(\sigma)]d\sigma dt,\ u-w\right\rangle_{L_2} =$$

$$= 2\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[u(\sigma) - w(\sigma)]^* K^*(t,\tau)K(t,\sigma)[u(\sigma) - w(\sigma)]d\sigma dt\right)d\tau \geqslant 0.$$

Следовательно, функционал (21) выпуклый. Как следует из (23), приращение

$$J'(u+h) - J'(u) = \langle J''(u), h\rangle_{L_2} = \left\langle 2\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\sigma)K(t,\tau)dt,\ h\right\rangle_{L_2} =$$

$$= 2\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)K(t,\sigma)h(\sigma)d\sigma dt.$$

Следовательно, $J''(u)$ определяется по формуле (24). Из (24) и (25) следует, что $\langle J''(u)\xi,\, \xi\rangle_{L_2} \geqslant \mu\|\xi\|^2$, $\forall u$, $u \in L_2(I, R^m)$, $\forall \xi$, $\xi \in L_2(I, R^m)$. Это означает, что функционал $J(u)$ сильно выпуклый в $L_2(I, R^m)$. Теорема доказана.

Заметим, что нижняя грань функционала (21) на множестве $L_2(I,R^m)$ достигается в точке $u_*(\tau)\in L_2(I,R^m)$ тогда и только тогда, когда $J'(u_*)=0$. Таким образом, необходимым и достаточным условием оптимальности для задачи (21), (22) является

$$\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)v(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)K(t,\sigma)u_*(\sigma)d\sigma dt. \qquad (27)$$

Однако, решение интегрального уравнения (27) довольно сложная задача. Ниже предлагается другой метод поиска оптимального управления $u_*(\tau)\in L_2(I,R^m)$ для задачи (21), (22). Строим последовательность управлений $\{u_n(\tau)\}\in L_2(I,R^m)$ по следующему алгоритму:

1. Выбирается начальная точка $u_0(\tau)\in L_2(I,R^m)$;

2. Вычислим в точке $u_0(\tau)\in L_2(I,R^m)$ градиент функционала по формуле (23), т.е.

$$J'(u_0)=-2\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)v(t)dt+2\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)K(t,\sigma)u_0(\sigma)d\sigma dt;$$

3. Определим следующее приближение $u_1(\tau)=u_0(\tau)-\alpha_0 J'(u_0)\in L_2(I,R^m)$, где величина $\alpha_0>0$ определяется из условия $g_0(\alpha_0)=\min\limits_{\alpha\geqslant 0} g_0(\alpha)$, $g_0(\alpha)=J(u_0-\alpha J'(u_0))$;

4. В общем случае

$$u_{n+1}(\tau)=u_n(\tau)-\alpha_n J'(u_n),\ g_n(\alpha_n)=\min_{\alpha\geqslant 0} g_n(\alpha),\ g_n(\alpha)=J(u_n-\alpha J'(u_n)), \qquad (28)$$

$$n=0,1,2,....$$

Теорема 6. *Пусть для задачи (21), (22) построена последовательность* $\{u_n(\tau)\}\subset L_2(I,R^m)$ *по алгоритму (28). Тогда:*

1) числовая последовательность $\{J(u_n)\}$ *монотонно убывает,* $\lim\limits_{n\to\infty} J'(u_n)=0$, *т.е.*

$$\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)v(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)K(t,\sigma)u_n(\sigma)d\sigma dt;$$

2) если множество $M(u_0)=\{u(\tau)\in L_2(I,R^m)/J(u)\leqslant J(u_0)\}$ *ограничено, то последовательность* $\{u_n(\tau)\}$ *является минимизирующей, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} J(u_n)=J_*=inf J(u)$, $u\in L_2(I,R^m)$ *и* $u_n \xrightarrow{сл} u_*$ *при* $n\to\infty$, *где*

$$u_*(\tau)\in U_*=\{u_*(\tau)\in L_2(I,R^m)/J(u_*)=\min_{u\in M(u_0)} J(u)=J_*=\inf_{u\in L_2(I,R^m)} J(u)\}.$$

Справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0\leqslant J(u_n)-J_*\leqslant \frac{m_0}{n},\ n=1,2,...,\ m_0=const\geqslant 0; \qquad (29)$$

3) если выполнено неравенство (25), то последовательность $\{u_n\}\subset L_2(I,R^m)$ *сильно сходится к единственной точке* $u_*\in U$, *т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=u_*$. *Справедливы следующие оценки*

$$0\leqslant J(u_n)-J_*\leqslant [J(u_0)-J_*]q^n,\quad q=1-\frac{\mu}{L},\quad 0\leqslant q<1,\ \mu>0,$$

$$\|u_n - u_*\| \leqslant \left(\frac{2}{\mu}\right)[J(u_0) - J_*]q^n, \ n = 0, 1, 2, ...; \tag{30}$$

4) для того, чтобы интегральное уравнение Фредгольма первого рода (20) имело решение необходимо и достаточно, чтобы значение $J(u_*) = 0$, $u_* \in U_*$. В этом случае $u_* \in U$ – решение интегрального уравнения (20);

5) если значение $J(u_*) > 0$, то интегральное уравнение (20) не имеет решения.

Доказательство. Так как $g_n(\alpha_n) \leqslant g_n(\alpha)$, то

$$J(u_n) - J(u_{n+1}) \geqslant J(u_n) - J(u_n - \alpha J'(u_n)), \ \alpha \geqslant 0, \ n = 0, 1, 2, ...$$

С другой стороны, из $J(u) \in C^{1,1}(L_2(I, R^m))$ следует, что

$$J(u_n) - J(u_n - \alpha J'(u_n)) \geqslant \alpha\left(1 - \frac{\alpha L}{2}\right)\|J'(u_n)\|^2, \ \alpha \geqslant 0, \ n = 0, 1, 2, ...$$

Тогда $J(u_n) - J(u_{n+1}) \geqslant \dfrac{1}{2L}\|J'(u_n)\|^2 > 0$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} J'(u_n) = 0$ и числовая последовательность $\{J(u_n)\}$ монотонно убывает. Первое утверждение теоремы доказано.

Поскольку функционал $J(u)$ выпуклый, то множество $M(u_0)$ выпукло. Тогда $0 \leqslant J(u_n) - J(u_*) \leqslant \langle J'(u_n), u_n - u_*\rangle \leqslant \|J'(u_n)\|\|u_n - u_*\| \leqslant D\|J'(u_n)\|$, где D – диаметр множества $M(u_0)$. Так как множество $M(u_0)$ – слабо бикомпактно, функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу, то множество $U_* \neq \varnothing$, $\{u_n\} \subset M(u_0)$, $u_* \in M(u_0)$. Заметим, что

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} J(u_n) - J(u_*) \leqslant D \lim_{n\to\infty}\|J'(u_n)\| = 0, \ \lim_{n\to\infty} J(u_n) = J(u_*) = J_* = \inf_{u\in M(u_0)} J(u).$$

Следовательно, последовательность $\{u_n\} \subset M(u_0)$ является минимизирующей.

Из неравенств

$$J(u_n) - J(u_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2L}\|J'(u_n)\|^2, \quad 0 \leqslant J(u_n) - J_* \leqslant D\|J'(u_n)\|, \ u_n \xrightarrow{сл} u_* \ \text{при} \ n \to \infty$$

следует оценка (29), где $m_0 = 2D^2L$. Второе утверждение доказано.

Если выполнено неравенство (25), то функционал (21) при условии (22) является сильно выпуклым. Тогда

$$J(u_n) - J_* \leqslant \langle J'(u_n), \ u_n - u_*\rangle - \frac{\mu}{2}\|u_n - u_*\|^2 \leqslant 2\mu\|J'(u_n)\|^2, \ n = 1, 2, ...$$

$$J(u_n) - J(u_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2L}\|J'(u_n)\|^2, \ n = 0, 1, 2, ...,$$

Отсюда следует, что $a_n - a_{n+1} \geqslant \frac{\mu}{L}a_n$, где $a_n = J(u_n) - J_*$. Следовательно $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant$ $\leqslant a_k(1 - \mu/L) = qa_n$. Тогда $a_n \leqslant qa_{n-1} \leqslant q^2a_{n-2} \leqslant ... \leqslant q^ka_0$. Это равносильно первой оценке из (30). Можно показать, что для сильно выпуклого функционала верна вторая оценка из (30). Третье утверждение доказана.

Как следует из (21), значение $J(u) \geqslant 0$, $\forall u$, $u \in L_2(I, R^m)$. Последовательность $\{u_n\} \subset L_2(I, R^m)$. Если $J(u_*) = 0$, то $v(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t, \tau)u_*(\tau)d\tau$. Таким образом, интегральное уравнение (20) имеет решение тогда и только тогда, когда значение $J(u_*) = 0$, где $u_* = u_*(\tau) \in L_2(I, R^m)$ – оптимальное управление для задачи (21), (22). Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определена, функция $v(t) \in V$. Тогда:*

1) краевая задача (16), (17) имеет решение тогда и только тогда, когда для некоторого $v(t) \in V$ интегральное уравнение Фредгольма первого рода (18) разрешима;

2) если последовательность $\{u_n\} \subset L_2(Q, R^r)$ построена по алгоритму (28) для задачи оптимального управления

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} |v(t) - \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u(\tau)d\tau|^2 dt \to inf,\ u(\tau) \in L_2(Q, R^r),\ v(t) \in V,$$

и она слабо сходится к элементу $u_*(\tau)$, значение $J(u_*) = 0$, то управление $u_*(\tau) \in L_2(Q, R^r)$ решение краевой задачи (16), (17);

3) множество U из (19) содержит те и только те точки $u_*(\tau) \in L_2(Q, R^r)$, для которых значение $J(u_*) = 0$.

Доказательство теоремы следует из теорем 3,4.

Литература

[1] *Айсагалиев С.А.* О свойствах решений некоторых интегральных уравнений // Изв. НАН РК, сер.физ.-мат. 1992, N1, С. 3–8.

[2] *Айсагалиев С.А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. - 1991. - Т. 27, N9. - С. 1475-1486.

[3] *Айсагалиев С.А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал, 2005, N4. С. 3 – 10.

[4] *Айсагалиев С.А.* Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траектории и ограниченным управлением // Дифференциальные уравнения. - 1996. - Т. 32, N6. - С. 1-7.

[5] *Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С.* Методы решения краевых задач. – Алматы, 2002, 347 С.