МРНТИ 27.31.44

Задача Дирихле для многомерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка

Майкотов М.Н., Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Республика Казахстан, +77272391273, E-mail: mukhit777@mail.ru

Одной из фундаментальных задач математической физики является изучение поведение колеблющейся струны, которая некорректна, если краевые условия заданы на всей границе области. А.В.Бицадзе и А.М.Нахушев отметили,что задача Дирихле некорректна(в смысле однозначной разрешимости) не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. С.А.Алдашевым ранее была изучена задача Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений, где была доказана однозначная разрешимость этой задачи, котоая существенно зависит от высоты рассматриваемой цилиндрической области. В данной статье показана разрешимость задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка.
Ключевые слова: многомерные гиперболо-параболические уравнения, вырождение типа и пордяка, цилиндрическая область,задача Дирихле,разрешимость,функция Бесселя.

Түрі мен реті азғындалған көп өлшемді гиперболо-параболалық теңдеулерге Дирихле есебінің шешімділігі

Майкотов М.Н., Абай атындағы қазақ ұлттық педагогикалық университеті,
Қазақстан Республикасы, Алматы қ. +77272391273, E-mail: mukhit777@mail.ru

Математикалық физиканың негізгі есептерінің бірі ішіектің тербелісін зерттеу. Егерде зерттеу облысының барлық шекарасында мән берілсе, онда бұл есеп жазықтықта бір шешімді емес екен. А.В.Бицадзе, А.М.Нахушев кейін көрсеткендей Дирихле есебі тек қана толқын теңдеуіне емес, және де басқа сызықтық гиперболалық теңдеулерге де бір шешімді болмай шықты. С.А.Алдашевтың жұмысында сызықтық көп өлшемді гиперболо-параболалық теңдеулерге Дирихле есебі зерттелген. Бұл есептің бір шешімділігі қарастырылған цилиндрлік облыстың биіктігіне тікелей байланысты екендігі дәлелденген. Бұл жұмыста түрі мен реті азғындалған көп өлшемді гиперболо-параболалық теңдеулердің цилиндрлік облыста шешімділігі көрсетілген.
Түйін сөздер:көп өлшемді гиперболо-параболалық теңдеулер,түрі мен реті азғындалған, цилиндрлік облыс, Дирихле есебі, шешімділік, Бессель функциясы.

The Dirichlet problem for multidimensional hyperbola-parabolic equations with degeneracy of type and order

Maikotov M.N., Kazakh national pedagogical university after Abay,
Almaty, Kazakhstan, +77272391273, email: mukhit777@mail.ru

The fundamental problems of mathematical physics-the study of the behavior of an oscillating string-is incorrect when the boundary conditions are given on the entire boundary of the region. As A. Bitsadze, A.Nakhushev noted, the Dirichlet problem is ill-posed (in the sense of unique solvability) not only for the wave equation, but also for general hyperbolic equations. S.A Aldashev previously studied the Dirichlet problem for degenerate multidimensional hyperbolic equations, where a unique solvability of this problem is proved, which depends essentially on the height of the cylindrical region under consideration. This paper shows the solvability of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for multidimensional hyperbola-parabolic equations with degeneration of type and order.
Key words: multidimensional hyperbolic-parabolic equations, degeneration of type and porch, cylindrical domain, Dirichlet problem, solvability, Bessel function.

1 Введение

На плоскости теория краевых задач для вырождающихся гиперболо-параболических уравнений были изучены довольно глубоко (Нахушев А.М., 2006). Их многомерные аналоги исследованы не достаточно хорошо (Врагов В.Н., 1983). В предыдущей работе(Алдашев С.А., 2016) установлена корректность задачи Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений в цилиндричекой области. В исследуемой работе для многомерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка в цилиндрической области показана разрешимость задачи Дирихле.

2 Обзор литературы

Ранее теорией по краевым задачам для гиперболо-параболичеких уравнений занимались известные ученые Нахушев А.М (Нахушев А.М., 2006), Врагов В.Н. (Врагов В.Н., 1983). В последние годы активно занимается исследованиями Алдашев С.А. В его исследовании изучена задача Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений. Однако, многомерные аналоги мало исследованы и изучены.

3 Материалы и методы

Пусть $\Phi_{\eta\zeta}$ - есть цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(X_1, ..., X_m, t)$, которая ограничена цилиндром $\gamma = \{(X,t) \ : \ |X| = 1\}$ а также плоскостями $t = \eta > 0$, $t = \zeta < 0$, где $|X|-$ длина вектора $X = (X_1, ..., X_m)$.

Через Φ_η и Φ_ζ обозначим части области $\Phi_{\eta\zeta}$, а Φ_η, Φ_ζ- это части поверхности Φ, которые обычно лежат в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_η - это верхнее основание области $\Phi_{\eta\zeta}$, а σ_ζ - это нижнее основание области $\Phi_{\eta\zeta}$.

S - общая часть границ областей Φ_η , Φ_ζ, которая представляет собой множество $\{t = 0, \ 0 < |X| < 1\}$ в E_m.

В указанной области $\Phi_{\eta\zeta}$ рассмотрим вырождающиеся многомерные гиперболо-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} h_1(t)\Delta_X U - h_2(t)U_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(X,t)U_{X_i} + b(X,t)U_t + c(X,t)U, \ t > 0, \\ q(t)\Delta_X U - U_t + \sum\limits_{i=1}^{m} d_i(X,t)U_{X_i} + e(X,t)U, \ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $h_i(t) > 0$ при $t > 0$, $h_i(0) = 0$, $h(t) \in C([0,\eta]) \cap C^2((0,\eta))$, $i = 1, 2, G(t) > 0$ при $t > 0, G(0) = 0$, $G(t) \in C([\zeta, 0])$, а Δ_X- это оператор Лапласа по переменным $X_1, ..., X_m$, $m \geq 2$.

Затем нам необходимо перейти от декартовых координат $X_1, ..., X_m, t$ к сферическим координатам $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 1, 2, ..., m-2$, $0 \leq \theta_{m-1} < 2\pi, \theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$.

Задача 1(Дирихле). Необходимо найти решение уравнения (1) в области $\Phi_{\eta\zeta}$ при $t \neq 0$ из следующего класса $C(\overline{\Phi}_{\eta\zeta}) \cap C^2(\Phi_\eta \cup \Phi_\zeta)$, которая будет удовлетворять следующим краевым условиям

$$U\Big|_{\sigma_\eta} = \varphi_1(r,\theta), \quad U\Big|_{\gamma_\eta} = \psi_1(t,\theta), \tag{2}$$

$$U\Big|_{\gamma_\zeta} = \psi_2(t,\theta),\ U\Big|_{\sigma_\zeta} = \varphi_2(r,\theta). \tag{3}$$

где $\varphi_1(1,\theta) = \psi_1(\alpha,\theta), \psi_1(0,\theta) = \psi_2(0,\theta), \psi_2(\zeta,\theta) = \varphi_2(1,\theta)$

$\{Z^k_{n,m}(\theta)\}-$ это система линейных независимых сферических функций следующего порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W^l_2(S)$, $l = 0,1,...$ пространства Соболева. При этом будет иметь место (Михлин С.Г., 1962).

Лемма 1. Если ряд $F(r,\theta) \in W^l_2(S)$. и $l \ge m-1$, то ряд

$$F(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} F^k_n(r) Z^k_{n,m}(\theta), \tag{4}$$

следующие ряды, которые были получены дифференцированием порядка $h \le l-m+1$ будут сходится абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Чтобы ряд $F(r,\theta) \in W^l_2(S)$, которому необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли следующим неравенствам

$$|F^1_0(r)| \le c_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|F^k_n(r)|^2 \le c_2,\ \ c_1,\, c_2 = const.$$

Если через $\widetilde{d}^k_{in}(r,t),\ d^k_{in}(r,t),\ \widetilde{e}^k_n(r,t),\ \widetilde{d}^k_n(r,t),\ \rho^k_n,\ \overline{\varphi}^k_{1n}(r),\ \overline{\varphi}^k_{2n}(r),\ \psi^k_{1n}(t),\ \psi^k_{2n}(t)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответствующих функций $d_i(r,\theta,t)\rho,\ d_i\frac{x_i}{r}\rho,\ e(r,\theta,t)\rho, \dot{(}r,\theta,t)\rho,\ \rho(\theta),\ i = 1,...,m,\ \varphi_1(r,\theta),\ \varphi_2(r,\theta),\ \psi_1(t,\theta),\ \psi_2(t,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, где $H-$ это единичная сфера в E_m.

Если $\frac{a_i(r,\theta,t)}{h_2(t)},\ \frac{b(r,\theta,t)}{h_2(t)},\ \frac{c(r,\theta,t)}{h_2(t)} \in W^l_2(\Phi_\eta) \subset C(\bar{\Phi}_\eta),\ d_i(r,\theta,t),\ e(r,\theta,t) \in W^l_2(\Phi_\zeta)$, $i = 1,...,m,\ l \ge m+1$. Тогда справедлива

Теорема 1. Пусть $\varphi_1(r,\theta),\ \varphi_2(r,\theta) \in W^h_2(S),\ \psi_1(t,\theta) \in W^h_2(\gamma_\eta),\ \psi_2(t,\theta) \in W^l_2(\gamma_\zeta)$, $h > \frac{3m}{2}$ и

$$\cos\mu_{s,n}\eta' \ne 0,\ \ s = 1,2,..., \tag{5}$$

то исследуемая задача 1 разрешима, где $\mu_{s,n}-$ это положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z),\ \eta' = \int\limits_0^\eta \sqrt{\frac{h_1(\xi)}{h_2(\xi)}}d\xi$.

4 Доказательство

Вначале укажем на разрешимость задачи (1) и (3). В сферических координатах уравнение (1) в области Φ_ζ имеет следующий вид:

$$L_1U \equiv G(t)\left(U_{rr} + \frac{m-1}{r}U_r - \frac{1}{r^2}\delta U\right) - U_t + \sum_{i=1}^{m} d_i(r,\theta,t)U_{X_i} + e(r,\theta,t)U = 0, \tag{6}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{G_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\; G_1 = 1,\; G_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2,\; j > 1.$$

Из первоисточников нам известно (Михлин С.Г., 1962), что спектр оператора δ, который состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых может соответствовать k_n ортонормированные собственные функций $Z^k_{n,m}(\theta)$.

Искомое решение исследуемой задачи 1 в указанной области Φ_ζ будем искать в виде:

$$U(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{U}^k_n(r,t) Z^k_{n,m}(\theta), \tag{7}$$

где $\bar{U}^k_n(r,t)$– это функции, которые подлежат определению.

Подставив (7) в (6), а затем умножив полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$,а затем проинтегрировав его по сфере H для $\overline{U}^k_n$, в итоге получим (Алдашев С.А., 1994), (Алдашев С.А.,2006), (Алдашев С.А., 2007)

$$G(t)\rho^1_0\bar{U}^1_{0rr} - \rho^1_0\bar{U}^1_{0t} + \left(\frac{m-1}{r}G(t)\rho^1_0 + \sum_{i=1}^{m} d^1_{i0}\right)\bar{U}^1_{0r} + \tilde{e}^1_0\bar{U}^1_0 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{G(t)\rho^k_n\bar{U}^k_{nrr} - \rho^k_n\bar{U}^k_{nt} + \left(\frac{m-1}{r}G(t)\rho^k_n + \sum_{i=1}^{m} d^k_{in}\right)\bar{u}^k_{nr} +\right.$$

$$\left. + \left[\tilde{e}^k_n - \lambda_n\frac{\rho^k_n}{r^2}G(t) + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{d}^k_{in-1} - nd^k_{in})\right]\bar{U}^k_n\right\} = 0. \tag{8}$$

Далее будем рассматривать бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$G(t)\rho^1_0\bar{U}^1_{0rr} - \rho^1_0\bar{U}^1_{0t} + \frac{(m-1)}{r}G(t)\rho^1_0\bar{U}^1_{0r} = 0, \tag{9}$$

$$G(t)\rho^k_1\bar{U}^k_{1rr} - \rho^k_1\bar{U}^k_{1t} + \frac{(m-1)}{r}G(t)\rho^k_1\bar{u}^k_{1r} - \frac{\lambda_1}{r^2}G(t)\rho^k_1\bar{U}^k_1 = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} d^1_{i0}\bar{U}^1_{0r} + \tilde{e}^1_0\bar{U}^1_0\right),\; n = 1,\; k = \overline{1, k_1}, \tag{10}$$

$$G(t)\rho^k_n\bar{U}^k_{nrr} - \rho^k_n\bar{U}^k_{nt} + \frac{(m-1)}{r}G(t)\rho^k_n\bar{U}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}G(t)\rho^k_n\bar{U}^k_n = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} d^k_{in-1}\bar{U}^k_{n-1r} +\right.$$

$$\left. + \left[\tilde{e}^k_{n-1} + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{d}^k_{in-2} - (n-1)d^k_{in-1})\right]\bar{U}^k_{n-1}\right\},\; k = \overline{1, k_n},\; n = 2, 3 \ldots. \tag{11}$$

Далее суммируя уравнение (10) от 1 до k_1, а также уравнение (11) - от 1 до k_n, в дальнейшем сложив полученные выражения вместе с (9), приходим к следующему уравнению (8).

Далее следует, что если $\left\{\bar{U}^k_n\right\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, ...$ - это решение системы (9) - (11) и оно будет являтся решением уравнения (8).

Можно заметить, что эти уравнения системы (9)-(11) можно представить в следующем виде:

$$G(t)\left(\bar{U}^k_{nrr}+\frac{(m-1)}{r}\bar{U}^k_{nr}-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{U}^k_n\right)-\bar{U}^k_{nt}=\bar{F}^k_n(r,t), \tag{12}$$

где $\bar{F}^k_n(r,t)$ будут определятся из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{F}^1_0(r,t) \equiv 0$.

Из краевого условия (3) в силу (7) имеем

$$\bar{U}^k_n(r,\zeta)=\bar{\varphi}^k_{2n}(r),\quad \bar{U}^k_n(1,t)=\psi^k_{2n}(t),\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\dots. \tag{13}$$

Далее произведя замену $\bar{\Upsilon}^k_n(r,t)=\bar{U}^k_n(r,t)-\psi^k_{2n}(t)$ в (12) и (13),получим

$$G(t)\left(\bar{\Upsilon}^k_{nrr}+\frac{(m-1)}{r}\bar{\Upsilon}^k_{nr}-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\Upsilon}^k_n\right)-\bar{\Upsilon}^k_{nt}=F^k_n(r,t), \tag{14}$$

$$\bar{\Upsilon}^k_n(r,\zeta)=\varphi^k_{2n}(r),\quad \bar{\Upsilon}^k_n(1,t)=0,\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\dots, \tag{15}$$

$$F^k_n(r,t)=\bar{F}^k_n(r,t)+\psi^k_{2nt}+\frac{\lambda_n G(t)}{r^2}\psi^k_{2n},\ \varphi^k_{2n}(r)=\bar{\varphi}^k_{2n}(r)-\psi^k_{2n}(\zeta).$$

Далее произведя замену $\bar{\Upsilon}^k_n(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}\Upsilon^k_n(r,t)$ следующие задачи (14) и (15), придем к следующей задаче

$$L\Upsilon^k_n \equiv G(t)\left(\Upsilon^k_{nrr}+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\Upsilon^k_n\right)-\Upsilon^k_{nt}=\tilde{F}^k_n(r,t), \tag{16}$$

$$\Upsilon^k_n(r,\zeta)=\tilde{\varphi}^k_{2n}(r),\quad \Upsilon^k_n(1,t)=0, \tag{17}$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{(m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4},\quad \widetilde{F}^k_n(r,t)=r^{\frac{(m-1)}{2}}F^k_n(r,t),\quad \tilde{\varphi}^k_{2n}(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi^k_{2n}(r).$$

Решение задачи (16), (17) будем искать в виде

$$\Upsilon^k_n(r,t)=\Upsilon^k_{1n}(r,t)+\Upsilon^k_{2n}(r,t), \tag{18}$$

где $\Upsilon^k_{1n}(r,t)$ - это и есть решение задачи

$$L\Upsilon^k_{1n}=\widetilde{F}^k_n(r,t), \tag{19}$$

$$\Upsilon^k_{1n}(r,\zeta)=0,\ \Upsilon^k_{1n}(1,t)=0, \tag{20}$$

а $\Upsilon^k_{2n}(r,t)$- это решение задачи

$$L\Upsilon^k_{2n}=0, \tag{21}$$

$$\Upsilon^k_{2n}(r,\zeta)=\tilde{\varphi}^k_{2n}(r),\ \Upsilon^k_{2n}(1,t)=0. \tag{22}$$

Выше указанные задачи решим и рассмотрим в виде

$$\Upsilon^k_n(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{23}$$

пусть при этом

$$\tilde{F}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r),\ \ \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r). \tag{24}$$

Подставив (23) в (19) и (20), с учетом (24), в конечном итоге получим

$$R_{srr} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0,\ \ 0 < r < 1, \tag{25}$$

$$R_s(1) = 0,\ \ |R_s(0)| < \infty, \tag{26}$$

$$T_{st} + \mu G(t) T_s = -a_{s,n}(t),\ \ \zeta < t < 0, \tag{27}$$

$$T_s(\zeta) = 0. \tag{28}$$

Пусть ограниченным решением задачи (25) и (26) является (Камке Э.,1965)

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{29}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2},\ \ \mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (27) и (28) будет

$$T_{s,n}(t) = (\exp(-\mu_{s,n}^2 \int_0^t G(\xi) d\xi))(\int_t^\zeta a_{s,n}(\xi)(\exp \mu_{s,n}^2 \int_0^\xi G(\xi_1) d\xi_1) d\xi). \tag{30}$$

Подставив (29) в (24) в конце получим

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{F}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r),\ \ r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r),\ \ 0 < r < 1. \tag{31}$$

Ряды (31)- это разложения в ряды Фурье-Бесселя (Бейтмен Г.,1971), где

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{F}_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{32}$$

$$b_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{33}$$

$\mu_{s,n},\ s = 1, 2, ...-$ положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, которые расположены в порядке возрастания их величин.

Из (23),(29) и(30) в конечном итоге получим решение задач (19) и (20)

$$\Upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{34}$$

где $a_{s,n}^k(t)$ будут определяются из (32).

Подставив (23) в (21) и (22), а также с учетом (24), имеем задачу

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 G(t) T_s = 0,\ \zeta < t < 0,\ T_s(\zeta) = b_{s,n}^k,$$

где решением является

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} \exp(\mu_{s,n}^2 \int\limits_t^\zeta G(\xi)d\xi). \tag{35}$$

Из (29) и (35) будем иметь

$$\Upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}\sqrt{r}\left(\exp\mu_{s,n}^2\int\limits_t^\zeta G(\xi)d\xi\right)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{36}$$

где $b_{s,n}$ находится из (33).

Поэтому, вначале решив задачу (9) и (13) ($n=0$), далее (10) и (13)($n=1$) и т.д. найдем последовательно все $\Upsilon_n^k(r,t)$ из (18), где $\Upsilon_{1n}^k(r,t),\ \Upsilon_{2n}^k(r,t)$ будут определятся из (34) и (36).

Таким образом, в области Φ_ζ, будет иметь место

$$\int\limits_H \rho(\theta) L_1 U dH = 0. \tag{37}$$

Если $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, где $R(r) \in V_0,\ V_0-$ плотна в $L_2((0,1))$,$\rho(\theta) \in C^\infty(H)-$ плотна в $L_2(H)$, $T(t) \in V_1,\ V_1-$ плотна в $L_2((\zeta,0))$. Будем иметь $F(r,\theta,t) \in V$, $V = = V_0 \otimes H \otimes V_1-$ которая плотна в $L_2(\Phi_\zeta)$ (Колмогоров А.Н., Фомин С.В.,1976).

Из (37), следует, что

$$\int\limits_{\Phi_\zeta} f(r,\theta,t) L_1 U d\Phi_\zeta = 0$$

и

$$L_1 U = 0,\ \forall (r,\theta,t) \in \Phi_\zeta.$$

Решением задачи (1) и (3) в области Φ_ζ является следующая функция:

$$U(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\Upsilon_{1n}^k(r,t) + \Upsilon_{2n}^k(r,t)\right]\right\} Z_{n,m}^k(\theta), \tag{38}$$

где $\Upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\Upsilon_{2n}^k(r,t)$ находятся из (34) и (36).

Используя формулу (Бейтмен Г., Эрдейи А.Н., 1974) $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, а также оценки (Тихонов А.Н., 1966) и (Михлин С.Г., 1962)

$$\begin{gathered} J_\nu(z) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \tfrac{\pi}{2}\nu - \tfrac{\pi}{4}\right) + 0\left(\tfrac{1}{z^{3/2}}\right),\ \nu \geq 0, \\ |k_n| \leq c_1 n^{m-2},\ \left|\tfrac{\partial^q}{\partial\theta_j^q} Z_{n,m}^k(\theta)\right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q},\ j = \overline{1, m-1},\ q = 0,1,\dots, \end{gathered} \tag{39}$$

и выше указанные леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\psi_2(t,\theta)$, $\varphi_2(t,\theta)$, как в (Алдашев С.А., 2016), можно доказать, что полученное решение (38) принадлежит классу $C(\bar{\Phi}_\zeta)\cap C^2(\Phi_\zeta)$.

Из (34), (36) и (38) $t\to -0$ будем иметь

$$U(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)Z_{n,m}^k(\theta), \tag{40}$$

$$\tau_n^k(r)=\psi_{2n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[\int_0^\zeta a_{s,n}(\xi)(\exp\mu_{s,n}^2\int_0^\xi G(\xi_1)d\xi_1)d\xi+b_{s,n}\exp(\mu_{s,n}^2\int_0^\zeta G(\xi)d\xi)\right]$$

$$J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r).$$

Из (32)-(34), а также из (36) и выше указанных лемм вытекает, что $\tau(r,\theta)\in W_2^l(S),\ l>\frac{3m}{2}$.

Учитывая краевые условия (2) и (40), в итоге получим в области Φ_η задачу Дирихле для следующего уравнения

$$L_2U\equiv h_1(t)\Delta_X U-h_2(t)U_{tt}+\sum_{i=1}^{m}a_i(r,\theta,t)U_{x_i}+b(r,\theta,t)U_t+c(r,\theta,t)U=0, \tag{41}$$

с данными

$$U\Big|_S=\tau(r,\theta),\quad U\Big|_{\gamma_\eta}=\psi_1(t,\theta),\ U\Big|_{\sigma_\eta}=\varphi_1(r,\theta). \tag{42}$$

В [Майкотов М.Н.,2017] была доказана следующая теорема

Теорема 2. Если $\tau(r,\theta)$, $\varphi_1(r,\theta)\in W_2^l(S)$, $\psi_1(t,\theta)\in W_2^l(\gamma_\eta)$, $l>\frac{3m}{2}$ и выполняется соотношение (5), то задачи (41) и (42) в классе $C^1(\overline{\Phi_\eta})\cap C^2(\Phi_\eta)$ разрешима.

Используя теорему 2, в итоге приходим к разрешимости задачи 1.
Теорема доказана.

5 Результаты и обсуждение

Таким образом, в результате изучения предыдущих работ известных ученых, где изучались их многомерные аналоги. В данной работе впервые была получена разрешимость задачи Дирихле для многомерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка.

6 Заключение

В исследуемой работе получена разрешимость задачи Дирихле для многомерных гиперболо-параболических уравнений.

Список литературы

[1] *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений// Алматы: Гылым. -1994. -С.170.

[2] *Алдашев С.А.* Задача Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений//Научные ведомости БелГУ. математика, физика, - 2016, №27(248), вып.45 -С.16-25.

[3] *Алдашев С.А.* Задачи Дарбу-Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений//Известия вузов, математика. - 2006, № 9(532)-С.3-9.

[4] *Алдашев С.А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения//Орал: ЗКАТУ.- 2007. - С.139.

[5] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. - т.2, М.: Наука, 1974. - 297с.

[6] *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.-Новосибирск:НГУ.- 1983.-84с.

[7] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука,1965. - 703с.

[8] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука. -1976. - 543с.

[9] *Майкотов М.Н.* Задача Дирихле для многомерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка//Алматы:Вестник КазНПУ имени Абая. -2017, №3(59). -С.105-109.

[10] *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. - М.: Физматгиз.- 1962.- 254с.

[11] *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных.- М.: Наука.- 2006. - 287с.

[12] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966.- 724с.

[13] *Ахтямов А.М.* Вырожденные краевые условия для дифференциального уравнения третьего порядка. - М.: Наука. 2018. - 427с.

References

[1] *Aldashev S.A.* Kraevye zadachi dlya mnogomernyh giperbolicheskih i smeshannyh uravnenij[Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations](Almaty: Gylym,1994),170.

[2] *Aldashev S.A.* Zadacha Dirihle dlya vyrozhdayushchihsya mnogomernyh giperbolo-parabolicheskih uravnenij["The Dirichlet problem for degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations,"] Scientific Bulletins of BelGU.mathematics, physics.no 45(2016):16-25.

[3] *Aldashev S.A.* Zadachi Darbu-Prottera dlya vyrozhdayushchihsya mnogomernyh giperbolicheskih uravnenij//Izvestiya vuzov, matematika["Darboux-Protter problems for degenerate multidimensional hyperbolic equations,"]. Proceedings of high schools,mathematics. no 9(532)(2006):3-9.

[4] *Aldashev S.A.* Vyrozhdayushchiesya mnogomernye giperbolicheskie uravneniya["Degenerating multidimensional hyperbolic equations"], Oral: ZKATU.(2007):139.

[5] *Bateman G., Erdei A.* Vysshie transcendentnye funkcii[Higher transcendental functions], vol.2(Moscow: Science,1974),297.

[6] *Vragov V.N.* Kraevye zadachi dlya neklassicheskih uravnenij matematicheskoj fiziki[Boundary value problems for nonclassical equations of mathematical physics],(NGU:1983),84.

[7] *Kamke E.* Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam[A Handbook of Ordinary Differential Equations] (Moscow: Science,1965),703.

[8] *Kolmogorov A.N, Fomin S.V.* Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza[Elements of the theory of functions and functional analysis](Moscow:Science,1976),543.

[9] *Maikotov M.N.*(2017). Zadacha Dirihle dlya mnogomernyh giperbolicheskih uravnenij s vyrozhdeniem tipa i poryadka["The Dirichlet problem for multidimensional hyperbolic equations with degeneration of type and order],"Almaty: Bulletin of KazNPU named after Abai,no 59(2017):105-109.

[10] *Mikhlin S.G.* Mnogomernye singulyarnye integraly i integral'nye uravneniya[Multidimensional singular integrals and integral equations] (Moscow: Fizmatgiz,1962),254.

[11] *Nakhushev A.M.* Zadachi so smeshcheniem dlya uravneniya v chastnyh proizvodnyh[Problems with displacement for a partial differential equation](Moscow: Science,2006),287.

[12] *Tikhonov A.N, Samarskii A.A.* Equations of mathematical physics[Equations of mathematical physics](Moscow: Science,1966),724.

[13] *Akhtyamov A.M.* Vyrozhdennye kraevye usloviya dlya differencial'nogo uravneniya tret'ego poryadka["Degenerate boundary conditions for a third-order differential equation,"] Moscow: Science(2018):427.