К динамике обобщенной модели «ротор - жидкость - фундамент»

А.Б. Кыдырбекулы
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы
e-mail: almatbek@kaznu.kz

Аннотация

Рассматривается новая динамическая модель роторной системы с полостью, частично заполненной жидкостью. Задача решена с учетом колебаний фундамента, колебаний жидкости, влияния несимметричности установки ротора на валу, анизотропности опор, вала и фундамента, статической и динамической неуравновешенности ротора, внешнего трения, внутреннего трения вала. Учёт этих факторов позволяет более точно произвести расчёт кинематических и динамических характеристик системы.

Рассмотрим вертикальный ротор, установленный на гибком валу с анизотропными упругими опорами, вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω_0 [1]-[2]. Посредством этих опор вал ротора прикреплён к упругому фундаменту [3].

Ротор имеет цилиндрическую полость, частично заполненную вязкой жидкостью с кинематическим коэффициентом вязкости ν, и установлен на валу несимметрично относительно опор и имеет перекос – наклонён на некоторый угол относительно плоскости, перпендикулярной оси вала. Угловая скорость вращения вала считается достаточно большой так, что гравитационная сила пренебрежимо мала по сравнению с центробежной силой, и жидкость принимает форму цилиндрического жидкого слоя с внешним радиусом R и радиусом свободной поверхности r_0 (рис.1). В состоянии динамического равновесия ротор и жидкость вращаются как единое твёрдое тело. Ротор имеет также и статическую неуравновешенность. Предполагается, что в движении системы фундамент перемещается в горизонтальной плоскости.

Декартова система координат A_0xyz неподвижна в пространстве; оси x и y фиксируют положение точки s, а ось z проходит через ось недеформированного вала (ось вращения). Углы поворота вала в точке s в плоскостях xy и yz обозначены соответственно через α и β. Все прогибы в направлении осей x и y полагаются малыми, а перемещениями в направлении оси z пренебрегается. Вторая система координат $O\zeta\eta\xi$ связана с ротором. Ось ζ есть полярная ось, ось ξ произвольно проведена через вектор эксцентриситета массы цилиндра. Фундамент считается задемпфированным. В равновесном положении центр тяжести фундамента с координатами x_k, y_k совпадает с началом неподвижной системы координат. Движение жидкости описывается в подвижной системе координат (r, φ, z), жёстко связанной с ротором.

Отклонения жидкости от положения равновесия, производные по времени от всех амплитуд колебаний принимаются малыми.

С учётом сил внешнего и внутреннего трения, сил реакции жидкости на стенки цилиндра уравнения движения неуравновешенного ротора с полостью, частично заполненной жидкостью и фундамента, имеют вид

$$m\ddot{x} + (n_e + n_i)\,\dot{x} + p_1 x - \Omega_0 n_i x - q_1\beta + \sigma_2 x_k = m\,\varepsilon\,\Omega_0^2 \cos\Omega_0 t + F_x, \quad (1)$$

$$m\ddot{y} + (n_e + n_i)\,\dot{y} + p_2 y - \Omega_0 n_i x - q_2\beta + \sigma_2 y_k = m\,\varepsilon\,\Omega_0^2 \sin\Omega_0 t + F_y, \quad (2)$$

$$A\ddot{\alpha} + C\Omega_0\dot{\beta} + (\mu_e + \mu_i)\,\dot{\alpha} - r_1 x + \Omega_0\mu_i\beta + s_1\alpha + \sigma_3 x_k = (C - A)\,\delta\,\Omega_0^2 \sin(\Omega_0 t - \chi) + M_\alpha, \quad (3)$$

$$A\ddot{\beta}-C\Omega_0\dot{\alpha}+(\mu_e+\mu_i)\,\dot{\beta}-r_2y-\Omega_0\mu_i\alpha+s_2\beta+\sigma_4y_k=(A-C)\,\delta\;\Omega_0^2\cos\left(\Omega_0t-\chi\right)+M_\beta, \tag{4}$$

$$M\,\ddot{x}_k+p_3x_k+r_3x+s_3\alpha+n_1\dot{x}_k=0, \tag{5}$$

$$M\,\ddot{y}_k+p_4y_k+r_4y+s_4\beta+n_2\dot{y}_k=0. \tag{6}$$

Здесь m – масса ротора; n_e, n_i и μ_e, μ_i – коэффициенты внешних и внутренних сил трения соответственно при поступательном и угловом перемещениях ротора; χ– угол опережения линией максимального перекоса цилиндра вектора эксцентриситета; ε и δ– линейный и угловой эксцентриситеты ротора; A и C – экваториальный и полярный моменты инерции относительно точки опоры; F_x и F_y – составлящие силы реакции жидкости; M_α и M_β – составляющие гидродинамического момента; n_1 и n_2 – коэффициенты демпфирования фундамента.

Квазиупругие коэффициенты $p_1, p_2, p_3, p_4, r_1, r_2, r_3, r_4, q_1, q_2, s_1, s_2, s_3, s_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ зависят от упругих свойств вала, опор и фундамента [4], [5].

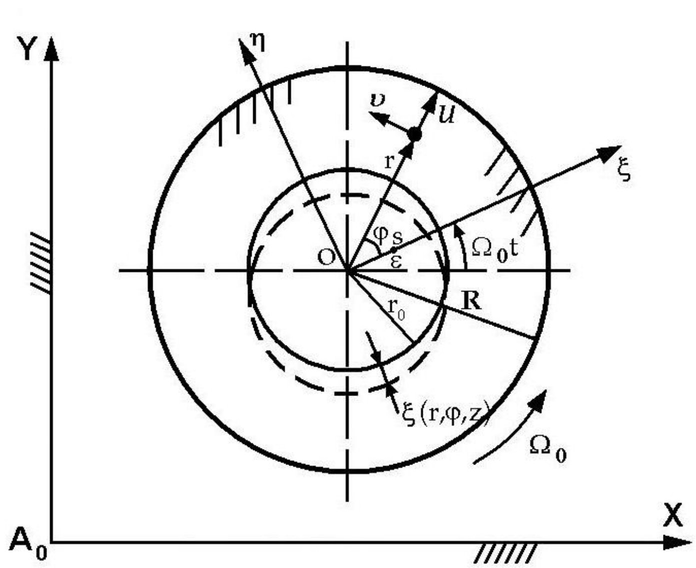

Рис. 1: Определение системы координат

Уравнения движения (1)-(6) можно также представить в комплексной форме:

$$\begin{aligned} &m\ddot{Q}+(n_e+n_i)\,\dot{Q}+p_{12}Q+\bar{p}_{12}\bar{Q}-i\Omega_0n_iQ-q_{12}\theta-\bar{q}_{12}\bar{\theta}+\\ &\quad+\sigma_{12}Q_k+\bar{\sigma}_{12}\bar{Q}_k=m\,\varepsilon\,\Omega_0^2e^{i\Omega_0t}+F_r, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &A\ddot{\theta}-iC\Omega_0\dot{\theta}+(\mu_e+\mu_i)\,\dot{\theta}-r_{12}Q-\bar{r}_{12}\bar{Q}-i\Omega_0\mu_i\theta+s_{12}\theta+\bar{s}_{12}\bar{\theta}+\\ &\quad+\sigma_{34}Q_k+\bar{\sigma}_{34}\bar{Q}_k=-i\,(C-A)\,\delta\;\Omega_0^2e^{i(\Omega_0t-\chi)}+M_\theta, \end{aligned} \tag{8}$$

$$M\,\ddot{Q}_k+p_{34}Q_k+\bar{p}_{34}\bar{Q}_k+r_{34}Q+\bar{r}_{34}\bar{Q}+s_{34}\theta+\bar{s}_{34}\bar{\theta}+n_{12}\dot{Q}_k+\bar{n}_{12}\dot{\bar{Q}}_k=0. \tag{9}$$

Здесь $Q=x+iy,\ \ \bar{Q}=x-iy,\ \ \theta=\alpha+i\beta, \bar{\theta}=\alpha-i\beta,\ \ Q_k=x_k+iy_k,\ \ \bar{Q}_k=x_k-iy_k.$

Определив переносное и кориолисово ускорения частицы жидкости с единичной массой, запишем гидродинамическое уравнение Эйлера

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial t}-\nu\Delta\bar{V}+2\;(\bar{\Omega}\times\bar{V})+\bar{\Omega}\times(\bar{\Omega}\times\bar{r})+\dot{\bar{\Omega}}\times\bar{r}=\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}P, \tag{10}$$

где $\bar{V}$ – вектор относительной скорости частицы жидкости; $\bar{r}$ – радиус-вектор этой частицы, имеющей в цилиндрической системе координат компоненты (r, φ, z).

С учётом малости вышеуказанных величин (а также $\cos\alpha = \cos\beta \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\beta \approx \beta$), проектируя равенство (10) на радиальное, тангенциальное и осевое направления, получим линеаризованные уравнения движения вязкой жидкости

$$\frac{\partial U}{\partial t} - 2\Omega_0 v - \nu\left(\Delta U - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi} - \frac{U}{r^2}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \ddot{x}\cos\left(\Omega_0 t + \varphi\right) - \\ - \ddot{y}\sin\left(\Omega_0 t + \varphi\right) + z\Big[\ddot{\alpha}\sin\left(\Omega_0 t + \varphi\right) - \ddot{\beta}\cos\left(\Omega_0 t + \varphi\right) - \delta\,\Omega_0^2\cos\left(\Omega_0 t + \varphi - \chi\right)\Big], \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega_0 U - \nu\left(\Delta v - \frac{2}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\varphi} - \frac{v}{r^2}\right) = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial\varphi} + \ddot{x}\sin\left(\Omega_0 t + \varphi\right) - \\ - \ddot{y}\cos\left(\Omega_0 t + \varphi\right) + z\Big[\ddot{\alpha}\cos\left(\Omega_0 t + \varphi\right) + \ddot{\beta}\sin\left(\Omega_0 t + \varphi\right) + \delta\,\Omega_0^2\sin\left(\Omega_0 t + \varphi - \chi\right)\Big], \tag{12}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \nu\Delta W = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + r[-\ddot{\alpha}\sin\left(\Omega_0 t + \varphi\right) + \ddot{\beta}\cos\left(\Omega_0 t + \varphi\right) - \\ - 2\Omega_0\dot{\alpha}\cos\left(\Omega_0 t + \varphi\right) - 2\Omega_0\dot{\beta}\sin\left(\Omega_0 t + \varphi\right) + \delta\,\Omega_0^2\cos\left(\Omega_0 t + \varphi - \chi\right)], \tag{13}$$

$$\frac{\partial\left(rU\right)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial\varphi} + r\frac{\partial W}{\partial z} = 0, \tag{14}$$

где ρ и P – плотность и давление в любой точке жидкости; U, v, W – составляющие скорости частицы жидкости; Δ – оператор Лапласа. Уравнение (14) есть уравнение неразрывности при $\rho = const$.

Граничные условия задачи имеют следующий вид. Условие прилипания и непроницаемости: на стенке ротора

$$U\big|_{r=R} = v\big|_{r=R} = W\big|_{r=R} = 0, \tag{15}$$

на верхней и нижней границах ротора

$$U = v = W = 0; \tag{16}$$

на свободной поверхности жидкости: условие отсутствия касательного напряжения

$$\nu\rho\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right]_{r=r_0} = 0, \tag{17}$$

$$\nu\rho\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi} + \frac{\partial v}{\partial z}\right]_{r=r_0} = 0, \tag{18}$$

кинематическое условие

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}\Big|_{r=r_0} = U\big|_{r=r_0}, \tag{19}$$

динамическое условие равенства нулю нормального напряжения

$$\left[-P - \frac{1}{2}\rho\,\Omega_0^2\left(r^2 - r_0^2\right) + 2\nu\rho\frac{\partial U}{\partial r}\right]_{r=r_0+\xi(\varphi,z,t)} = 0. \tag{20}$$

Радиус свободной поверхности жидкости определяется уравнением $r = r_0 + \xi(\varphi, z, t)$, где $\xi(\varphi, z, t)$ есть смещение свободной поверхности жидкости от равновесного состояния, то есть некоторое возмущение.

Уравнения (1)-(6) и (8)-(17) являются уравнениями совместного движения неуравновешенного ротора с жидкостью.

Отметим, что полученная система уравнений (1)-(6), (8)-(17) является обобщённой математической моделью роторных систем с полостями, частично заполненными жидкостью. Отсюда можно получить частные задачи, рассмотренные в работе [5].

Приведённая выше система уравнений движения ротора с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью, весьма сложна с точки зрения её дальнейшего теоретического анализа. В связи с этим в работе будут исследованы колебания и устойчивость различных схем роторных систем с учётом пространственного движения идеальной жидкости, заполняющей полость ротора, и малости последнего члена в уравнениях системы (11)-(13), выражающего отклонение жидкости от оси симметрии ротора. В работах [6]-[8], посвященных движению твёрдого тела и роторных систем с полостями, частично заполненными идеальной несжимаемой жидкостью, показано, что результаты теоретических исследований в такой постановке дают очень хорошие количественные и качественные совпадения с экспериментальными данными.

В случае идеальной жидкости уравнения (11)-(13) имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} - 2\Omega_0 v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \ddot{Q}e^{-i(\Omega_0 t+\varphi)} + iz\ddot{\theta}e^{-i(\Omega_0 t+\varphi)}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega_0 U = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \varphi} + \ddot{Q}e^{-i(\Omega_0 t+\varphi)} + z\ddot{\theta}e^{-i(\Omega_0 t+\varphi)}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - \left(i\ddot{\theta} + 2\Omega_0\dot{\theta}\right) re^{-i(\Omega_0 t+\varphi)}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial (rU)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \qquad \text{при} \qquad \rho = const, \tag{24}$$

с граничными условиями: на стенке, верхней и нижней границах цилиндра

$$U = W = 0, \tag{25}$$

на свободной поверхности жидкости

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \rho\,\Omega_0^2 r_0 U\right)\Big|_{r=r_0} = 0. \tag{26}$$

Здесь $Q = x + iy, \quad \theta = \alpha + i\beta$.

В случае вынужденных колебаний ротора, обусловленных его линейной и угловой неуравновешенностью, и автоколебаний, вызываемых неконсервативными силами [9], закон движения представим в виде:

$$\left.\begin{array}{l} x = A_1e^{i\Omega_0 t} + B_1e^{i\omega t}, \\ y = A_2e^{i\Omega_0 t} + B_2e^{i\omega t}, \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha = A_3e^{i\Omega_0 t} + B_3e^{i\omega t}, \\ \beta = A_4e^{i\Omega_0 t} + B_4e^{i\omega t}, \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x_k = A_5e^{i\Omega_0 t} + B_5e^{i\omega t}, \\ y_k = A_6e^{i\Omega_0 t} + B_6e^{i\omega t}, \end{array}\right\} \tag{27}$$

где A_1, A_2 и A_3, A_4 – соответственно, линейные и угловые комплексные амплитуды колебаний ротора, обусловленные действием собственной неуравновешенности; A_5, A_6 – амплитуды вынужденных колебаний фундамента; B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 – амплитуды самовозбуждающихся колебаний ротора и фундамента; ω – искомая частота колебаний ротора; характеристическое число ω в общем случае является комплексной величиной, действительная часть которой определяет частоту автоколебаний, а мнимая часть характеризует степень неустойчивости системы; вторые члены в правых частях уравнений (27) выражают колебания ротора, вызванные возмущённым движением жидкости относительно цилиндра.

Уравнения (27) можно представить в комплексной форме:

$$\left.\begin{array}{l} Q = A_{12}e^{i\Omega_0 t} + B_{12}e^{i\omega t}, \\ \bar{Q} = \bar{A}_{12}e^{i\Omega_0 t} + \bar{B}_{12}e^{i\omega t}, \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \theta = A_{34}e^{i\Omega_0 t} + B_{34}e^{i\omega t}, \\ \bar{\theta} = \bar{A}_{34}e^{i\Omega_0 t} + \bar{B}_{34}e^{i\omega t}, \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} Q_k = A_{56}e^{i\Omega_0 t} + B_{56}e^{i\omega t}, \\ \bar{Q}_k = \bar{A}_{56}e^{i\Omega_0 t} + \bar{B}_{56}e^{i\omega t}, \end{array}\right\} \tag{28}$$

где $A_{12} = A_1 + iA_2$, $\bar{A}_{12} = A_1 - iA_2$, $A_{34} = A_3 + iA_4$, $\bar{A}_{34} = A_3 - iA_4$, $A_{56} = A_5 + iA_6$, $\bar{A}_{56} = A_5 - iA_6$, $B_{ij} = B_i + iB_j$, $\bar{B}_{ij} = B_i - iB_j$ $(i, j = 1, 6)$.

Выражения для гидродинамической силы и её момента в комплексной форме относительно инерциальных осей координат записываются в виде [2].

После решения уравнений движения жидкости (22)-(24) с использованием (27) и граничных условий (25)-(26), будем иметь

$$P' = \left[\sum_{k=1}^{\infty} Z_1\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 r\right)\cos\frac{\pi k}{H}(z - H) + A_0 r + \frac{B_0}{r} + i\rho r\omega z(\omega - 2\Omega_0)B_{34}\right]e^{i(\sigma t - \varphi)}, \tag{29}$$

$$\begin{gathered} U = \left\{\frac{1}{\rho a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2\Omega_0 i}{r}Z_1\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 r\right) - eZ_1'\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 r\right)\right]\cos\frac{\pi k}{H}(z - H) + \right. \\ \left. -\frac{A_0}{\rho(2\Omega_0 i + e)} + \frac{B_0}{\rho r^2(e - 2\Omega_0 i)} + \frac{\omega^2 B_{12} - 2iz\omega\sigma B_{34}}{2\Omega_0 i + e}\right\}e^{i(\sigma t - \varphi)}, \end{gathered} \tag{30}$$

$$\begin{gathered} v = \left\{\frac{1}{\rho a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[2\Omega_0 Z_1'\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 r\right) - \frac{ei}{r}Z_1\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 r\right)\right]\cos\frac{\pi k}{H}(z - H) + \right. \\ \left. +\frac{iA_0}{\rho(2\Omega_0 i + e)} + \frac{iB_0}{\rho r^2(e - 2\Omega_0 i)} - \frac{2z\omega\sigma B_{34}}{2\Omega_0 i + e}\right\}e^{i(\sigma t - \varphi)}, \end{gathered} \tag{31}$$

$$W = \left\{-\frac{1}{\rho\sigma}\frac{\pi}{H}\sum_{k=1}^{\infty} Z_1\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 r\right)\sin\frac{\pi k}{H}(z - H)\right\}e^{i(\sigma t - \varphi)}, \tag{32}$$

где $Z_1\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 r\right) = C_{1k}J_1\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 r\right) + C_{2k}N_1\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 r\right)$, $e = i\sigma$; J_1 и N_1 есть функции Бесселя и Неймана действительного аргумента 1-го порядка; k – осевое волновое число.

Неизвестные постоянные A_0, B_0, C_{1k}, C_{2k} определяются с помощью граничных условий (25)-(26).

Далее находим окончательные выражения для комплексной силы реакции жидкости и её момента:

$$F = \Omega_0^2 m_L\left(A_{12} - \frac{1}{2}iHA_{34}\right)e^{i\Omega_0 t} + m_L\left(\frac{A_0}{\rho} + \frac{B_0}{\rho R^2} + i\omega(\omega - 2\Omega_0)\frac{H}{2}B_{34}\right)e^{i\omega t}, \tag{33}$$

$$\begin{gathered} M_\theta = \Omega_0^2 m_L\left\{\frac{1}{2}iHA_{12} + E_1 A_{34}\right\}e^{i\Omega_0 t} + m_L\left\{\frac{2H}{\pi\rho R}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k^2}Z_1\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 R\right) - \frac{2i}{\rho H}\cdot\right.\right. \\ \left.\left.\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left[Z_2\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 R\right) - \frac{1}{q^2}Z_2\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 r_0\right)\right] + \frac{iH}{2\rho}\left(A_0 + \frac{B_0}{R^2}\right) - E_1\omega(\omega - 2\Omega_0)B_{34}\right\}e^{i\omega t}, \end{gathered} \tag{34}$$

$$E_1=\frac{H^2}{3}-\frac{R^2}{4}\left(1-\frac{1}{q^4}\right),\quad \frac{m_L}{\rho}(A_0+\frac{B_0}{R^2})=m_L\omega^2 B_{12}\frac{\omega^2-4\Omega_0\omega+2\Omega_0^2}{\gamma_0\omega^2-2(\gamma_0+1)\Omega_0\omega+(\gamma_0+1)\Omega_0^2},$$

$m_L=\pi R^2\rho H$ - масса жидкости, необходимая для полного заполнения полости цилиндра, $q=\frac{R}{r_0}$ - относительное заполнение, $\gamma_0=\frac{q^2-1}{q^2+1}$.

Подставляя выражения (33) и (34) в уравнение движения ротора и фундамента (1)-(6), учитывая (27) и приравнивая выражения при одинаковых функциях времени $\exp(i\Omega_0 t)$ и $\exp(i\omega t)$, получим системы уравнений относительно, соответственно, постоянных A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 и B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6. Разрешив первую систему алгебраических неоднородных уравнений, находим амплитуды вынужденных колебаний и сдвиги фаз вынужденных колебаний ротора и фундамента, обусловленных его линейным и угловым эксцентриситетом. Из условия равенства нулю определителя второй однородной системы уравнений, получим характеристическое уравнение. Или же, подставив (28) в (7)-(9) и приравнивая выражения при $\exp(i\Omega_0 t)$, и далее, отделяя действительные и мнимые части, получим систему неоднородных уравнений относительно неизвестных $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6$ – амплитуды вынужденных колебаний ротора и фундамента.

Эта система уравнений в матричной форме имеет вид:

$$(a)\,\bar{A}=\bar{b},\quad \bar{A}=(a)^{-1}\bar{b}, \tag{35}$$

где (a) – матрица коэффициентов, $\bar{A}$ – вектор-столбец неизвестных амплитуд вынужденных колебаний, $\bar{b}$ – вектор-столбец свободных членов:

$$(a)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{61} & a_{62} & \dots & a_{66}\end{pmatrix},\qquad \overline{A}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\\A_5\\A_6\end{pmatrix},\qquad \overline{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\\b_6\end{pmatrix}.$$

Система уравнений (35) без затруднений решается на ЭВМ или же аналитически, например, методом Гаусса. Коэффициенты матрицы (a) и вектора $\bar{b}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&a_{11}=-(m+m_L)\Omega_0^2+p_1,\ a_{12}=-n_e\Omega_0,\ a_{13}=-q_1,\ a_{14}=-0,5Hm_L\Omega_0^2,\ a_{15}=\sigma_1,\\
&a_{16}=0,\quad a_{21}=n_e\Omega_0,\quad a_{22}=-(m+m_L)\Omega_0^2+p_2,\quad a_{23}=0,5Hm_L\Omega_0^2,\quad a_{24}=-q_2,\\
&a_{25}=0,\ a_{26}=\sigma_2,\ a_{31}=-r_1,\ a_{32}=0,5Hm_L\Omega_0^2,\ a_{33}=(C-A)\Omega_0^2-m_L\Omega_0^2E_1+s_1,\\
&a_{34}=-\mu_e\Omega_0,\quad a_{35}=\sigma_3,\quad a_{36}=0,\quad a_{41}=-0,5Hm_L\Omega_0^2,\quad a_{42}=-r_2,\\
&a_{43}=\mu_e\Omega_0,\quad a_{44}=(C-A)\Omega_0^2-m_L\Omega_0^2E_1+s_2,\quad a_{45}=0,\quad a_{46}=\sigma_4,\\
&a_{51}=r_3,\quad a_{52}=0,\quad a_{53}=s_3,\quad a_{54}=0,\quad a_{55}=-M\Omega_0^2+p_3,\quad a_{56}=-n_2\Omega_0,\\
&a_{61}=0,\quad a_{62}=r_4,\quad a_{63}=0,\quad a_{64}=s_4,\quad a_{65}=n_1\Omega_0,\quad a_{66}=-M\Omega_0^2+p_4,\\
&b_1=em\Omega_0^2,\ b_2=0,\ b_3=-(C-A)\delta\Omega_0^2\sin\chi,\ b_4=(A-C)\delta\,\Omega_0^2\cos\chi,\ b_5=0,\ b_6=0.
\end{aligned}$$

Амплитуда линейных колебаний ротора определяется как $A_1'=\sqrt{(A_1)^2+(A_2)^2}$, амплитуда угловых колебаний ротора – $A_2'=\sqrt{(A_3)^2+(A_4)^2}$, амплитуда вынужденных колебаний фундамента – $A_3'=\sqrt{(A_5)^2+(A_6)^2}$. Вторая система уравнений имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
b_{11}B_1+b_{12}B_2+b_{13}B_3+b_{14}B_4+b_{15}B_5+b_{16}B_6=0,\\
b_{21}B_1+b_{22}B_2+b_{23}B_3+b_{24}B_4+b_{25}B_5+b_{26}B_6=0,\\
b_{31}B_1+b_{32}B_2+b_{33}B_3+b_{34}B_4+b_{35}B_5+b_{36}B_6=0,\\
b_{41}B_1+b_{42}B_2+b_{43}B_3+b_{44}B_4+b_{45}B_5+b_{46}B_6=0,\\
b_{51}B_1+b_{52}B_2+b_{53}B_3+b_{54}B_4+b_{55}B_5+b_{56}B_6=0,\\
b_{61}B_1+b_{62}B_2+b_{63}B_3+b_{64}B_4+b_{65}B_5+b_{66}B_6=0,
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

где

$$
\begin{aligned}
&b_{11}=-\omega^2(m+m_L\chi_{10})+p_1, \quad b_{12}=-n_e\omega, \quad b_{13}=-q_1, \quad b_{14}=m_L\chi_{11}, \quad b_{15}=\sigma_1,\\
&b_{16}=0, \quad b_{21}=n_e\omega, \quad b_{22}=-\omega^2(m+m_L\chi_{10})+p_2, \quad b_{23}=-m_L\chi_{11},\\
&b_{24}=-q_2, \quad b_{25}=0, \quad b_{26}=\sigma_2, \quad b_{31}=-r_1, \quad b_{32}=0,5H\omega^2 m_L\chi_{10},\\
&b_{33}=(C-A)\omega^2+s_1+\frac{2E_1}{H}\chi_{11}-Q_1^{(k)}, \quad b_{34}=-\mu_e\omega+Q_2^{(k)}, \quad b_{35}=\sigma_3,\\
&b_{36}=0, \quad b_{41}=-0,5H\omega^2 m_L\chi_{10}, \quad b_{42}=-r_2, \quad b_{43}=\mu_e\omega-Q_2^{(k)},\\
&b_{45}=0, \quad b_{46}=\sigma_4, \quad b_{51}=r_3, \quad b_{44}=(C-A)\omega^2+s_2+\frac{2E_1}{H}\chi_{11}-Q_1^{(k)}, \quad b_{52}=0,\\
&b_{53}=s_3, \quad b_{54}=0, \quad b_{55}=-M\omega^2+p_3,\\
&b_{56}=-n_2\omega, \quad b_{61}=0, b_{62}=r_4, \quad b_{63}=0, \quad b_{64}=s_4, \quad b_{65}=n_1\omega, \quad b_{66}=-M\omega^2+p_4,
\end{aligned}
$$

$$
\chi_{10}=\frac{\omega^2-4\Omega_0\omega+2\Omega_0^2}{\gamma_0\omega^2-2(\gamma_0+1)\Omega_0\omega+(\gamma_0+1)\Omega_0^2}, \qquad \chi_{11}=\frac{1}{2}m_L\omega H\left(\omega-2\Omega_0\right),
$$

$$
\frac{1}{\rho}(A_0+\frac{B_0}{R^2})=\omega^2\chi_{10}B_{12}, \qquad Q_1^{(k)}=\frac{2m_L H}{\pi\rho R}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}Z_1\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 R\right),
$$

$$
Q_2^{(k)}=-\frac{2m_L}{\rho H}\sum_{k=1}^{\infty}\left[Z_2\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 R\right)-\frac{1}{q^2}Z_2\left(\frac{\pi k}{H}\gamma_1 r_0\right)\right].
$$

Для того чтобы система (36) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно равенство нулю её определителя. Понижая порядок определителя до четырёх, после некоторых математических выкладок, получим характеристическое уравнение в виде:

$$
\begin{aligned}
&\left(b'_{11}b'_{22}-b'_{12}b'_{21}\right)\left(b'_{33}b'_{44}-b'_{34}b'_{43}\right)+\left(b'_{11}b'_{23}-b'_{13}b'_{21}\right)\left(b'_{34}b'_{42}-b'_{32}b'_{44}\right)+\\
&+\left(b'_{11}b'_{24}-b'_{14}b'_{21}\right)\left(b'_{32}b'_{43}-b'_{33}b'_{42}\right)+\left(b'_{12}b'_{23}-b'_{13}b'_{22}\right)\left(b'_{31}b'_{44}-b'_{34}b'_{41}\right)+\\
&+\left(b'_{12}b'_{24}-b'_{14}b'_{22}\right)\left(b'_{33}b'_{41}-b'_{31}b'_{43}\right)+\left(b'_{13}b'_{24}-b'_{14}b'_{23}\right)\left(b'_{31}b'_{42}-b'_{32}b'_{41}\right)=0,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&b'_{11}=\frac{(\bar a_0+p_1)s_3+r_3q_1}{r_3s_3}, \quad b'_{12}=\frac{n_es_4\omega-r_4\chi_{11}}{r_4s_4},\\
&b'_{13}=-\frac{q_1[(\bar e_0+p_3)(\bar e_0+p_4)+n_2\omega]+\sigma_1s_3(\bar e_0+p_4)}{s_3[(\bar e_0+p_3)(\bar e_0+p_4)+n_2\omega]}, \quad b'_{14}=\frac{n_1\omega\chi_{11}-\sigma_1s_4}{s_4n_1\omega},\\
&b'_{21}=\frac{n_es_3\omega+r_3\chi_{11}}{r_3s_3}, \quad b'_{22}=\frac{(\bar a_0+p_2)s_4+r_4q_2}{r_4s_4}, \quad b'_{24}=-\frac{q_2}{s_4},\\
&b'_{23}=\frac{-\chi_{11}[(\bar e_0+p_3)(\bar e_0+p_4)+n_2\omega]+\sigma_2s_3n_1\omega}{s_3[(\bar e_0+p_3)(\bar e_0+p_4)+n_2\omega]}, \quad b'_{31}=-\frac{(\bar c_0+s_1)r_3+r_1s_3}{r_3s_3},\\
&b'_{32}=\frac{\bar b_0s_4-r_4\bar d_0}{r_4s_4}, \quad b'_{33}=\frac{(\bar c_0+s_1)[(\bar e_0+p_3)(\bar e_0+p_4)+n_2\omega]-\sigma_3s_3(\bar e_0+p_4)}{s_3[(\bar e_0+p_3)(\bar e_0+p_4)+n_2\omega]},\\
&b'_{34}=\frac{n_1\bar d_0\omega-s_4\sigma_3}{n_1s_4\Omega_0}, \; b'_{41}=\frac{\bar d_0r_3-s_3\bar b_0}{r_3s_3}, \; b'_{43}=\frac{-\bar d_0[(\bar e_0+p_3)(\bar e_0+p_4)+n_2\omega]+\sigma_4s_3n_1\omega}{s_3[(\bar e_0+p_3)(\bar e_0+p_4)+n_2\omega]},\\
&b'_{42}=-\frac{(\bar c_0+s_2)r_4+r_2s_4}{r_4s_4}, \; b'_{44}=\frac{\bar c_0+s_2}{s_4}, \; \bar a_0=-\omega^2(m+m_L\chi_{10}), \; \bar b_0=\frac{1}{2}Hm_L\chi_{10}\omega^2,\\
&\bar e_0=-M\omega^2, \quad \bar c_0=(C-A)\omega^2+\frac{2}{H}E_1\chi_{11}-Q_1^{(k)}, \quad \bar d_0=\mu_e\omega+Q_2^{(k)}.
\end{aligned}
$$

Уравнение (37) является характеристическим уравнением системы относительно искомой частоты ω. Общее численное решение данного уравнения затруднительно, так как искомые значения ω входят в аргументы бесселевых функций. Для приближённого определения зоны неустойчивости примем $k = 0$, то есть когда ротор возбуждает волны только на плоской поверхности жидкости. В этом случае осевая составляющая скорости частицы жидкости равна нулю ($W = 0$) и характеристическое уравнение (37) после преобразований принимает вид полинома шестнадцатой степени.

Заключение. Разрешена аналитически новая динамическая модель системы "ротор-жидкость-фундамент". Составлены и решены методами уравнений математической физики совместные уравнения движения ротора с фундаментом и пространственные уравнения движения жидкости, заполняющей его полость.

Литература

[1] *Рахметолла А.Ш., Кыдырбекулы А.Б.* Колебания и устойчивость обобщенной динамической модели "ротор-жидкость-фундамент" // Труды междунар. научно-техн. конф. "Современные проблемы механики, строительства и машиностроения". – Павлодар, 2006. – Т. 2. – С. 121-126.

[2] *Кыдырбекулы А.Б., Рахматуллаев А.Ш.* Динамика ротора с полостью, частично заполненной слабопроводящей идеальной жидкостью // Труды 4-ой традиционной казахстанско - российской научно - практической конференции "Математическое моделирование научно - технол. и экологич. проблем в нефте-, газодобывающей промышленности", Алматы, 25-26 сент., 2003. – С. 115-120.

[3] *Gasch R., Maurer J., Sarfeld W.* Soil influence on unbalance response and stability of a simple rotor-foundation system // Journal of Sound and Vibration. – 1984. – V. 9(34). – P. 549-566.

[4] *Гробов В.А.* Асимптотические методы расчёта изгибных колебаний валов турбомашин. – М.: Изд. АН СССР, 1961. – 162 с.

[5] *Рахимов Е.Р.* Уравнения движения обобщённой динамической модели "ротор-фундамент" // Труды VIII республ. Научной конференции по математике и механике. – Алма-Ата, 1986. – С. 125-144.

[6] *Луковский И.А.* Исследование нелинейных колебаний жидкости в сосуде, имеющем форму вращения // Сб.: Математическая физика. – Киев: Наукова думка, 1971. – Вып. 9. – С. 57-59.

[7] *Вольф мл.* Динамика прецессии ротора, частично заполненного жидкостью // Труды американ. общ. инж.-мех. Прикладная механика. – 1968. – N 4. – С. 56-63.

[8] *Лихтенберг.* Колебания упругоукрепленного вращающегося ротора, частично заполненного жидкостью // Констр. и технол. машиностр.: Труды американ. общ. инж.-мех. – 1982. – N 7. – С. 70-86.

[9] *Дайч И.М., Каждан Л.С.* Колебания вращающегося твёрдого тела с полостью, частично заполненной произвольной вязкой жидкостью // ПМ. – Киев, 1973. – Т. 9. – N 8. – С. 98-100.