УДК 517.938

С.А. Айсагалиев

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

К решению краевой задачи с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений

Предлагается метод решения краевой задачи с параметром при наличии фазовых и интегральных ограничений. Получены необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений. Разработан метод построения решения краевой задачи с параметром и ограничениями, путем построения минимизирующих последовательностей. Основой предлагаемого метода решения краевой задачи является принцип погружения. Принцип погружения был создан путем построения общего решения одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В качестве примера приведено решение задачи Штурма-Лиувилля для значения параметра на заданном отрезке. Принципиальное отличие предлагаемого метода состоит в том, что разрешимость и построение решения краевой задачи с параметром и ограничениями решаются воедино, путем построения минимизирующих последовательностей, ориентированных на применении компьютерной техники. Разрешимость и построение решения краевой задачи определяются путем решения оптимизационной задачи. Создание общей теории краевых задач с параметрами для обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка со сложными граничными условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений являются актуальной проблемой.
Ключевые слова: принцип погружения, оптимизационная задача, минимизирующие последовательности, интегральное уравнение, задача Штурма-Лиувилля.

S.A. Aisagaliev

To solution of a boundary value problem with parameter for ordinary differential equations

A method for solving of a boundary value problem with parameter at presence of phase and integral constraints is supposed. Necessary and sufficient conditions for the existence of solution of the boundary value problem with parameter for ordinary differential equations are obtained. A method for constructing solution of the boundary value problem with parameter and constraints is developed by constructing minimizing sequences. The basis of the proposed method for solving the boundary value problem is the principle of immersion. The immersion principle is established by building the general solution of a class of Fredholm integral equations of the first kind. Solution of the Sturm Liouville problem for the parameter value on the interval is presented as example. The principal difference between the proposed method lies in the fact that the solubility and the construction of the solution of the boundary value problem with a parameter and constraints are solved together, by constructing minimizing sequences focused on the use of computer technology. Solvability and construction of the solution of the boundary value problem are determined by solving the optimization problem. The creation of the general theory of boundary value problems with parameters for ordinary differential equations of any order with complicated boundary conditions in the presence of phase and integral constraints are an important issue.
Keywords : principle of immersion, an optimization problem, minimizing sequences, integral equation, Sturm Liouville problem.

С.Ә. Айсағалиев

Жай дифференциалдық теңдеулер үшін параметрлі шекаралық есепті шешу туралы

Фазалық және интегралдық шектеулері бар параметрлі шекаралық есепті шешу әдістері ұсы нылады. Жай дифференциалдық теңдеулер үшін параметрлі шекаралық есептің шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Минимумдаушы тізбектер құру жолымен параметрлі және шектеулері бар шекаралық есептің шешімін құру әдісі қарасты рылған. Берілген шекаралық есепті шешу әдісінің негізі батыру қағидасы болып табыла ды. Батыру қағидасы бірінші текті Фредгольмнің интегралдық теңдеулерінің бір классы ның жалпы шешімін құру арқылы жүзеге асырылады. Мысал ретінде берілген аралықтағы параметр мәндері үшін Штурм Лиувилль есебінің шешімі көрсетілген. Ұсынылған әдістің түбегейлі өзгешелігі параметрлі және шектеулері бар шеттік есептің шешімділігі мен шеші мін тұрғызу компьютерлік техниканы пайдалануға бағытталған минимумдаушы тізбектер тұрғызу арқылы бірге жүзеге асырылады. Шеттік есептің шешімділігі мен шешімін тұрғы зу тиімділік есебін шешу арқылы анықталады. Фазалық және интегралдық шектеулері мен күрделі шекаралық шарттары бар кез келген ретті қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін параметрлі шеттік есептердің жалпы теориясын құру өзекті мәселе болып табылады.
Түйін сөздер: батыру қағидасы, тиімділік есеп, минимумдаушы тізбек, интегралдық тең деулер, Штурм Лиувилль есебі.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую краевую задачу с параметром

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x,\lambda,t) + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0)) = x_0, x(t_1) = x_1) \in S \subset R^{2n}, \tag{2}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t) : G(t) = \{x \in R^n / \omega(t) \le F(x,\lambda,t) \le \varphi(t), \quad t \in I\}, \tag{3}$$

а также интегральных ограничений

$$g_j(u(x_0,x_1,\lambda) \le c_j, \quad j = \overline{1,m_1}; \quad g_j(x_0,x_1,\lambda) = c_j, \quad j = \overline{m_1+1,m_2}, \tag{4}$$

$$g_j(x_0,x_1,\lambda) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t),x_0,x_1,\lambda,t)dt, \quad j = \overline{1,m_2}. \tag{5}$$

с параметром

$$\lambda \in \Lambda \subset R^s, \quad \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_s). \tag{6}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ матрицы с кусочно-непрерывными элементами соответственно порядков $n \times n$, $n \times m$, вектор функция $f(x,\lambda,t) = (f_1(x,\lambda,t),\ldots,f_r(x,\lambda,t))$ непрерывна по совокупности переменных $(x,\lambda,t) \in R^n \times R^s \times I$, удовлетворяет условию Липшица по переменной x, т.е.

$$|f(x,\lambda,t) - f(y,\lambda,t)| \le l(t)|x-y|, \quad \forall (x,\lambda,t),(y,\lambda,t) \in R^n \times R^s \times I \tag{7}$$

и условию

$$|f(x,\lambda,t)| \le c_0(|x| + |\lambda|^2) + c_1(t), \ \ \forall(x,\lambda,t), \tag{8}$$

где $l(t) \ge 0$, $l(t) \in L_1(I,R^1)$, $c_0 = const > 0$, $c_1(t) \ge 0$, $c_1(t) \in L_1(I,R^1)$. Заметим, что при выполнении условий (7), (8) дифференциальное уравнение (1) при фиксированных $x_0 = x(t_0) \in R^n$, $\lambda \in R^s$ имеет единственное решение для значений $t \in I$. Вектор функция $F(x,\lambda,t) = (F_1(x,\lambda,t),\ldots,F_S(x,\lambda,t))$ непрерывна по совокупности переменных $(x,\lambda,t) \in R^n \times I$. Функция $f_0(x(t),x_0,x_1,\lambda,t) = f_{01}(x,x_0,x_1,\lambda,t),\ldots\ldots,f_{0m_2}(x,x_0,x_1,\lambda,t)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию

$$|f_0(x,x_0,x_1,\lambda,t)| \le c_2(|x| + |x_0| + |x_1| + |\lambda|^2) + c_3(t),$$

$$\forall(x,x_0,x_1,\lambda,t) \in R^n \times R^n \times R^n \times R^s \times I,$$

$$c_2 = const \ge 0, \ \ c_3(t) \ge 0, \ \ c_3(t) \in L_1(I,R^1).$$

$\omega(t), \varphi(t), t \in I$ заданные r мерные непрерывные функции. S заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество из R^{2n}, Λ заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество из R^s, моменты времени t_0, t_1 фиксированы, $t_1 > t_0$. Заметим, что если $A(t) \equiv 0$, $m = n$, $B(t) = I_n$, где I_n единичная матрица порядка $n \times n$, то уравнение (1) запишется в виде

$$\dot{x} = f(x,\lambda,t) + \mu(t), \ \ t \in I. \tag{9}$$

Поэтому полученные ниже результаты остаются верными для уравнения вида (9) при условиях (2) (6). В частности, множество S определяется соотношением

$$S = \{(x_0,x_1) \in R^{2n}/H_j(x_0,x_1) \le 0, \ j = \overline{1,p}; \ <a_j,x_0> + <b_j,x_1> - e_j = 0, \ j = \overline{p+1,s_1}\},$$

где $H_j(x_0,x_1)$, $j=\overline{1,p}$ выпуклые функции относительно переменных (x_0,x_1), $x_0=x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, $a_j \in R^n$, $b_j \in R^n$, $e_j \in R^1$, $j = \overline{p+1,s}$ заданные векторы и числа $<\cdot,\cdot>$ скалярное произведение. В частности, множество

$$\Lambda = \{\lambda \in R^s/h_j(\lambda) \le 0, \ \ j = \overline{1,p_1}; \ \ <\overline{a}_j,\lambda> - \overline{e}_j = 0, \ \ j = \overline{p_1+1,s_1}\},$$

где $h_j(\lambda)$, $j = \overline{1,p_1}$ выпуклые функции относительно λ, $\overline{a}_j \in R^s$, $\overline{e}_j \in R^1$, $j = \overline{p_1+1,s_1}$ заданные векторы и числа. Ставятся следующие задачи: **Задача 1.** Найти необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (1) (6). **Задача 2.** Построить решение краевой задачи (1) (6). Как следует из постановки задачи, необходимо доказать существование пары $(x_0,x_1) \in S$ и параметра $\lambda \in \Lambda$ таких, что решение системы (1) исходящее из точки x_0 в момент времени t_0, проходит через точку x_1 в момент времени t_1, при этом вдоль решения системы (1), где $x(t) = x(t;x_0,t_0,\lambda)$, $t \in I$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, для каждого момента времени выполняется фазовое ограничение (3), и интегралы (5) удовлетворяют условиям (4). В частности, из краевой задачи (1) (6) при отсутствии фазовых и интегральных ограничений следует задача Штурма-Лиувилля. Применение метода Фурье к решению задач математической физики приводит к решению следующей задачи [1]: найти такие значения параметра λ, при которых в конечном промежутке $[t_0,t_1]$ существует отличное от нуля решение однородного уравнения

$$L[y] + \lambda r(t)y(t) \equiv 0, \tag{10}$$

удовлетворяющее на концах условиям:

$$\alpha_1 y(t_0) + \alpha_2 \dot{y}(t_0) = 0, \quad \beta_1 y(t_1) + \beta_2 \dot{y}(t_1) = 0, \tag{11}$$

где $L[y] = \dfrac{d}{dt}[p(t)\dot{y}(t)] - q(t)y(t), \;\; p(t) > 0, \;\; t \in [t_0, t_1]$.

Вводя обозначения $y(t) = x_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, уравнение (10) можно представить в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x_1, \lambda, t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{12}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{q(t)}{p(t)} & -\dfrac{\dot{p}(t)}{p(t)} \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{r(t)}{p(t)} \end{pmatrix}, \quad f(x_1, \lambda, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_1 \end{pmatrix}.$$

Граничное условие (11) запишется в виде

$$\alpha_1 x_{10} + \alpha_2 x_{20} = 0, \quad \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} = 0, \tag{13}$$

где $x(t_0) = (x_{10}, x_{20})$, $x(t_1) = (x_{11}, x_{21})$. Параметр $\lambda \in R^1$. Уравнение (12), краевое условие (13), $\lambda \in R^1$ являются частными случаями (1), (2), (6) соответственно. Как известно [2], решение задачи Штурма-Лиувилля сводится к решению однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

$$y(t) = -\lambda \int\limits_{t_0}^{t_1} G(t, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi, \tag{14}$$

где $G(t, \xi)$ функция Грина. Заметим, что построение функции Грина $G(t, \xi)$ и решение интегрального уравнения (14) довольно сложны. Поэтому представляет интерес разработка новых методов исследования решения краевых задач (1) (6). В работах [3-5] делаются попытки распространить методы исследования краевых задач, созданных для линейных систем второго порядка на системы высоких порядков и на нелинейные системы со сложными граничными условиями. В работе [3] для двухточечной однородной краевой задачи для системы, состоящей из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, предлагаются достаточные условия ее разрешимости и получены априорные оценки решений. В статье [4] рассматриваются задачи на собственные значения и собственные функции для квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка. Исследуются требования, налагаемые на нелинейность, при которых задача имеет кратные собственные значения. Исследованию нелинейных задач на собственные значения для оператора Штурма-Лиувилля посвящена работа [5]. Для задачи на обоих концах интервала краевые условия зависят от спектрального параметра, устанавливается существование системы собственных функций образующей базис в пространстве $L_p(0, 1)$, $p > 1$. Во многих случаях на практике исследуемый процесс описывается уравнением вида (1) в области фазового пространства системы определяемой фазовым ограничением вида (3). Вне указанной области процесс описывается совершенно другими уравнениями либо исследуемый процесс не существует. В частности, такие явления имеют место в исследованиях динамики ядерных и химических реакторов (вне области (3) реактор не существует). Интегральные ограничения вида (4) характеризуют суммарные нагрузки, испытываемые элементами и узлами системы (например, суммарная перегрузка космонавтов), которые не должны превосходить заданных величин, а равенства вида (4) соответствуют суммарным ограничениям, налагаемых на систему (например, расход топлива равен заданной величине). Основой предлагаемого метода решения краевой задачи с параметром является принцип погружения. Суть принципа погружения состоит в том, что исходная краевая задача с ограничениями заменяется на равносильную задачу оптимального управления со свободным правым концом траектории. Такой подход стал возможным благодаря нахождению общего решения одного класса интегральных уравнения Фредгольма первого рода. Далее, выяснение существования решения исходной задачи и построение ее решения осуществляется путем решения задачи оптимального управления специального вида. При таком подходе необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (1) (6) могут быть получены из условия достижения нижней грани функционала на заданном множестве, а решение исходной краевой задачи определяется по предельным точкам минимизирующих последовательностей. В этом заключается принципиальное отличие предлагаемого метода от известных методов исследования. Данная работа является продолжением научных исследований изложенных в [6-12].

2. Принцип погружения

Рассмотрим интегральные ограничения (4), (5). Путем введения дополнительных переменных $d = (d_1, \dots, l_{m_1}) \in R^{m_1}$, $d \geq 0$, соотношения (4), (5) можно представить в виде

$$g_j(x_0, x_1, \lambda) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t), x_0, x_1, \lambda, t)dt = c_j - d_j, \;\; j = \overline{1, m_1},$$

где $d \in \Gamma = \{d \in R^{m_1}/d \geq 0\}$. Пусть вектор $\overline{c} = (\overline{c}_1, \dots, \overline{c}_{m_2})$, где $\overline{c}_j = c_j - d_j$, $j = \overline{1, m_1}$, $\overline{c}_j = c_j$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$.

Введем вектор функцию $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_{m_2}(t))$, $t \in I$ где

$$\eta(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(x(\tau), u(\tau), x_0, x_1, \tau)d\tau, \;\; t \in I.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{\eta}(t) = f_0(x(t), x_0, x_1, \lambda, \tau)d\tau, \;\; t \in I = [t_0, t_1].$$

Тогда

$$\dot{\eta} = f_0(x(t), x_0, x_1, \lambda, t), \;\; t \in I,$$

$$\eta(t_0) = 0, \;\; \eta(t_1) = \overline{c}, \;\; d \in \Gamma.$$

Теперь исходная краевая задача (1) (6) запишется в виде

$$\dot{\xi} = A_1(t)\xi + B_1(t)f(P\xi, \lambda, t) + B_2 f_0(P\xi, x_0, x_1, \lambda, t) + B_3\mu(t), \;\; t \in I, \tag{15}$$

$$\xi(t_0) = \xi_0 = (x_0, O_{m_2}), \ \ \xi(t_1) = \xi_1 = (x_1, \bar{c}), \tag{16}$$

$$(x_0, x_1) \in S, \ \ d \in \Gamma, \ \ P\xi(t) \in G(t), \ \ t \in I, \ \ \lambda \in \Lambda, \tag{17}$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \ \ A_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O_{n,m_2} \\ O_{m_2,n} & O_{m_2,m_2} \end{pmatrix}, \ \ B_1(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ O_{m_2,m} \end{pmatrix},$$

$$B_2(t) = \begin{pmatrix} I_n \\ O_{m_2,n} \end{pmatrix}, \ \ B_3(t) = \begin{pmatrix} O_{n,m_2} \\ I_{m_2} \end{pmatrix}, \ \ P = (I_n, O_{n,m_2}), \ \ P\xi = x,$$

где $O_{j,k}$ матрица порядка $j \times k$ с нулевыми элементами, $O_q \in R^q$ вектор $q \times 1$ с нулевыми элементами, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+m_2})$.

Основой предлагаемого метода решения задач 1, 2 являются следующие теоремы о свойствах решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода вида

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)u(t)dt = a, \tag{18}$$

где $K(t_0, t) = \|K_{ij}(t_0, t)\|$, $i = \overline{1, n_1}$, $j = \overline{1, s_1}$ известная матрица порядка $n_1 \times s$ с кусочно-непрерывными элементами по t при фиксированном t_0, $u(\cdot) \in L_2(I, R^{s_1})$ искомая функция, $I = [t_0, t_1]$, $a \in R^{n_1}$ заданный n_1 мерный вектор.

Теорема 1 *Интегральное уравнение (18) при любом фиксированном $a \in R^{n_1}$ имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)K^*(t_0, t)dt, \tag{19}$$

порядка $n_1 \times n_1$ является положительно определенной, где $(*)$ знак транспонирования.

Теорема 2 *Пусть матрица $C(t_0, t_1)$ определяемая по формуле (19) положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (18) имеет вид*

$$u(t) = K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)a + v(t) - K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)v(t)dt, \ \ t \in I, \tag{20}$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^{s_1})$ произвольная функция, $\in R^{n_1}$ любой вектор.

Доказательство теорем 1, 2 приведены в работах [6, 7]. Приложение теоремы 1, 2 для решения задачи управляемости и оптимального управления изложены в [8-10], а решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений приведены в [11, 12].

Наряду с дифференциальным уравнением (15) с краевыми условиями (16), рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)w_1(t) + B_2w_2(t) + \mu_1(t), \ \ t \in I, \tag{21}$$

$$y(t_0) = \xi_0 = (x_0, O_{m_2}), \quad y(t_1) = \xi_1 = (x_1, \overline{c}), \tag{22}$$

$$w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad w_2(\cdot) \in L_2(I, R^m), \tag{23}$$

$$(x_0, x_1) \in S, \quad d \in \Gamma, \tag{24}$$

где $\mu_1(t) = B_3\mu(t)$, $t \in I$.

Пусть матрица $\overline{B}(t) = (B_1(t), B_2)$ порядка $(n + m_2) \times (m_2 + m)$, а вектор функция $w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in L_2(I, R^{m+m_2})$. Легко убедиться в том, что управление $w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2})$, которое переводит траекторию системы (21) из любого начального состояния ξ_0 в любое желаемое конечное состояние ξ_1, является решением интегрального уравнения

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\overline{B}(t)w(t)dt = a, \tag{25}$$

где $\Phi(t_0, t) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\zeta} = A_1(t)\zeta$, вектор

$$a = a(\xi_0, \xi_1) = \Phi(t_0, t_1)[\xi_1 - \Phi(t_1, t_0)\xi_0] - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu_1(t)dt.$$

Как следует из (18), (25) интегральное уравнение (25) совпадает с (18), если матрица $K(t_0, t) = \Phi(t_0, t)\overline{B}(t)$. Введем следующие обозначения:

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\overline{B}(t)\overline{B}^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt$$

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)\overline{B}(\tau)\overline{B}^*(\tau)\Phi^*(t_0, \tau)dt$$

$$W(t, t_1) = W(t_0, t_1) - W(t_0, t), \quad E(t) = \overline{B}^*\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1),$$

$$\mu_2(t) = -E(t)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu_1(t)dt, \quad E_1(t) = \Phi(t, t_0)W(t, t_1)W^{-1}(t_0, t_1),$$

$$E_2(t) = \Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1),$$

$$\mu_3(t) = \Phi(t_0, t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)\mu_1(\tau)d\tau - E(t)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)\mu_1(t)dt.$$

Вычислим функции $\lambda_1(t, \xi_0, \xi_1)$, $\lambda_2(t, \xi_0, \xi_1)$, $N_1(t)$, $N_2(t)$ по формулам:

$$\lambda_1(t, \xi_0, \xi_1) = E(t)a = T_1(t)\xi_0 + T_2(t)\xi_1 + \mu_2(t),$$

$$\lambda_2(t, \xi_0, \xi_1) = E_1(t)\xi_0 + E_2(t)\xi_1 + \mu_3(t),$$

$$N_1(t) = -E(t)\Phi(t_0, t_1), \quad N_2(t) = -E_2(t), \quad t \in I.$$

Теорема 3 *Пусть матрица $W(t_0,t_1) > 0$. Управление $w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2})$ переводит траекторию системы (21) из любой начальной точки $\xi_0 \in R^{n+m_2}$ в конечное состояние $\xi_1 \in R^{n+m_2}$ тогда и только тогда, когда*

$$w(t) \in W = \{w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2})/w(t) = v(t) + \lambda_1(t,\xi_0,\xi_1)+ \\ +N_1(t)z(t_1,v), \ \ t \in I, \ \ \forall v(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2})\}, \tag{26}$$

где функция $z(t) = z(t,v)$, $t \in I$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot z = A_1 z + \overline{B}(t)v(t), \ \ z(t_0) = 0, \ \ t \in I, \ \ v(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2}. \tag{27}$$

Решение дифференциального уравнения (21), соответствующее управлению $w(t)\in W$, определяется по формуле

$$y(t) = z(t) + \lambda_2(t,\xi_0,\xi_1) + N_2(t)z(t_1,v), \ \ t \in I, \tag{28}$$

Доказательство. Как следует из теоремы 1, для существования решения интегрального уравнения (25) необходимо и достаточно, чтобы матрица $W(t_0,t_1){=}C(t_0,t_1){>}0$, где $K(t_0,t) = \Phi(t_0,t)\overline{B}(t)$. Теперь соотношение (20) запишется в виде (26). Решение системы (21), соответствующее управлению (26), определяется по формуле (28), где $z(t) = z(t,v)$, $t \in I$ решение дифференциального уравнения (27). Теорема доказана.

Лемма 1 *Пусть матрица $W(t_0,t_1) > 0$. Тогда краевая задача (1) (6) (либо (15) (17)) равносильна следующей задаче*

$$w(t) = (w_1,w_2) \in W, \ w_1(t) = f(Py(t),\lambda,t), \ w_2(t) = f_0(Py(t),x_0,x_1,\lambda,t), \tag{29}$$

$$\dot z = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2 v_2(t), \ z(t_0) = 0, \ t \in I, \tag{30}$$

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t)), \ \ v_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \ v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{31}$$

$$(x_0,x_1) \in S, \ \lambda \in \Lambda, \ d \in \Gamma, \ Py(t) \in G(t), \ t \in I, \tag{32}$$

где $v(\cdot) = (v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \in L_2(I, R^{m+m_2})$ произвольная функция, $y(t)$, $t \in I$ определяется по формуле (28).

Доказательство. При выполнении соотношений (29) (32), функция $y(t) = \xi(t)_0$, $t \in I$, $Py(t) = P\xi(t) \in G(t)$, $t \in I$, $w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in W$. Лемма доказана.

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу: минимизировать функционал:

$$J_1(v_1,v_2,p,d,x_0,x_1,\lambda) = \int_{t_0}^{t_1} [|w_1(t) - f(Py(t),\lambda,t)|^2 + \\ +|w_2(t) - f_0(Py(t),x_0,x_1,\lambda,t)|^2 + |p(t) - F(Py(t),\lambda,t)|^2]dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} F_0(t,v_1(t),v_2(t),p(t),d,x_0,x_1,\lambda,z(t),z(t_1))dt \to \infty \tag{33}$$

при условиях

$$\dot z = A(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2 v_2(t), \ z(t_0) = 0, \ t \in I, \tag{34}$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^m),\ v_2(\cdot) \in L_2(I, R_2^m),\ (x_0, x_1) \in S,\ \lambda \in \Lambda,\ d \in \Gamma, \tag{35}$$

$$p(t) \in V(t) = \{\omega(t) \le p(t) \le \varphi(t),\ \ t \in I\}, \tag{36}$$

где

$$w_1(t) = v_1(t) + \lambda_{11}(t, \xi_0, \xi_1) + N_{11}(t)z(t_1, v),\ \ t \in I, \tag{37}$$

$$w_2(t) = v_2(t) + \lambda_{12}(t, \xi_0, \xi_1) + N_{12}(t)z(t_1, v),\ \ t \in I, \tag{38}$$

$$N_1(t) = (N_{11}(t), N_{12}(t)),\ \ \lambda_1(t, \xi_0, \xi_1) = (\lambda_{11}(t, \xi_0, \xi_1), \lambda_{12}(t, \xi_0, \xi_1)).$$

Обозначим через

$$X = L_2(I, R^{m+m_2}) \times V(t) \times \Gamma \times S \times \Lambda \subset H = L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^{m_2}) \times$$

$$\times L_2(I, R^r) \times R^{m_1} \times R^n \times R^n \times R^s,\ \ J_* = \inf_{\theta \in X} J(\theta),$$

$$\theta = (v_1, v_2, p, d, x_0, x_1, \lambda) \in X,\ \ X_* = \{\theta_* \in X / J(\theta_*) = 0\}.$$

Теорема 4 *Пусть матрица* $W(t_0, t_1) > 0$, $X_* \ne \emptyset$, $\emptyset$ *пустое множество. Для того, чтобы краевая задача (1) (6) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение* $J(\theta_*) = 0 = J_*$, *где* $\theta_* = (v_1^*, v_2^*, p_*, d_*, x_0^*, x_2^*, \lambda_*) \in X$ *оптимальное управление для задачи (33) (36).*

Если $J_* = J(\theta_*) = 0$, *то функция*

$$x_*(t) = P[z(t, v_1^*, v_2^*) + \lambda_2(t, \xi_0^*, \xi_1^*) + N_2(t)z(t_1, v_1^*, v_2^*)],\ \ t \in I$$

решение краевой задачи (1) (6). Если $J_* > 0$, *то краевая задача (1) (6) не имеет решение.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть краевая задача (1) (6) имеет решение. Тогда, как следует из леммы 1, значение $w_1^*(t) = f(Py_*(t), \lambda_*, t)$, $w_2^*(t) = f_0(Py_*(t), x_0^*, x_1^*, \lambda_*, t)$, где $w_*(t) = (w_1^*(t), w_2^*(t)) \in W$, $y_*(t)$, $t \in I$ определяется по формуле (28), $\xi_0^* = (x_0^*, O_{m_2})$, $\xi_1^* = (x_1^*, \overline{c}_*)$, $\overline{c}_* = (c_j - d_j^*)$, $j = \overline{1, m_1}$; c_j, $j = \overline{m_1 + 1}, m_2$. Включение $Py_*(t) \in G(t)$, $t \in I$ равносильно тому, что $p_*(t) = F(Py_*(t), \lambda_*, t)$, $t \in I$, где $\omega(t) \le p_*(t) = F(Py_*(t), \lambda_*, t) \le \varphi(t)$, $t \in I$. Следовательно, значение $J(\theta_*) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $J(\theta_*) = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $w_1^*(t) = f(Py_*(t), \lambda_*, t)$, $w_2^*(t) = f_0(Py_*(t), x_0^*, x_1^*, \lambda_*, t)$, $p_*(t) = F(Py_*(t), \lambda_*, t)$, $(x_0^*, x_1^*) \in S$, $v_1^*(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, $v_2^*(\cdot) \in L_2(I, R_2^m)$. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Переход от краевой задачи (1) (6) к задаче (33) (36) называется принципом погружения.

3. Оптимизационная задача

Рассмотрим решение оптимизационной задачи (33) (36). Заметим, что функция

$$F_0(t, v_1, v_2, p, d, x_0, x_1, \lambda) = |w_1(t) - f(Py(t), \lambda, t)|^2 + |w_2(t) - f_0(Py(t), x_0, x_1, \lambda, t)|^2 +$$

$$+ |p(t) - F(Py(t), \lambda, t)|^2 = F_0(t, q),\ \ q = (\theta, z, \overline{z}),$$

где w_1, w_2 определяются формулами (37), (38) соответственно, функция

$$y = z + \lambda_2(t, x_0, x_1, d) + N_2(t)\overline{z},\ \ Py = x.$$

Теорема 5 *Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$, функция $F_0(t, q)$ определена и непрерывна дифференцируема по $q = (\theta, z, \overline{z})$, и выполнены следующие условия:*

$$|F_{0z}(t, \theta + \Delta\theta, z + \Delta z, \overline{z} + \Delta\overline{z}) - F_{0z}(t, \theta, z, \overline{z})| \le L(|\Delta z| + |\Delta\overline{z}| + |\Delta\theta|),$$

$$|F_{0\overline{z}}(t, \theta + \Delta\theta, z + \Delta z, \overline{z} + \Delta\overline{z}) - F_{0\overline{z}}(t, \theta, z, \overline{z})| \le L(|\Delta z| + |\Delta\overline{z}| + |\Delta\theta|),$$

$$|F_{0\theta}(t, \theta + \Delta\theta, z + \Delta z, \overline{z} + \Delta\overline{z}) - F_{0\theta}(t, \theta, z, \overline{z})| \le L(|\Delta z| + |\Delta\overline{z}| + |\Delta\theta|),$$

$$\forall\theta \in R^{m+m_2+r+m_1+2n+s}, \ \ \forall z \in R^{n+m_2}, \ \ \forall\overline{z} \in R^{n+m_2}.$$

Тогда функционал (33) при условиях (34) (36) непрерывен и дифференцируем по Фреше в любой точке $\theta \in X$, причем

$$J'(\theta) = (J'_{v_1}(\theta), J'_{v_2}(\theta), J'_p(\theta), J'_d(\theta), J'_{x_0}(\theta), J'_{x_1}(\theta), J'_\lambda(\theta)) \in H,$$

где

$$\begin{array}{l} J'_{v_1}(\theta) = F_{0v_1}(t, q) - B_1^*(t)\psi(t), \ \ J'_{v_2}(\theta) = F_{0v_2}(t, q) - B_2^*\psi(t), \ \ J'_p(\theta) = F_{0p}(t, q), \\ J'_d(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0d}(t, q)dt, \ \ J'_{x_0}(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0x_0}(t, q)dt, \ \ J'_{x_1}(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0x_1}(t, q)dt, \\ J'_\lambda(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0\lambda}(t, q)dt, \ \ q = (\theta, z(t), z(t_1)), \end{array} \qquad (39)$$

функция $z(t)$, $t \in I$ решение дифференциального уравнения (34) при $v_1(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, $v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2})$, а функция $\psi(t)$, $t \in I$ решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = F_{0z}(t, q(t)) - A_1^*(t)\psi, \ \ \psi(t_1) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0z(t_1)}(t, q(t))dt. \qquad (40)$$

Кроме того, градиент $J'(\theta)$, $\theta \in X$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\| \le K\|\theta_1 - \theta_2\|, \ \ \forall\, \theta_1, \ \theta_2 \in X, \qquad (41)$$

где $K > 0$ постоянная Липшица.

Доказательство. Пусть θ, $\theta + \Delta\theta \in X$, где $\Delta\theta = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta p, \Delta d, \Delta x_0, \Delta x_1, \Delta\lambda)$. Можно показать, что

$$\Delta\dot{z} = A_1(t)\Delta z + B_1(t)\Delta v_1 + B_2\Delta v_2, \ \ \Delta z(t_0) = 0,$$

приращение функционала

$$\Delta J = J(\theta + \Delta\theta) - J(\theta) =< J'_{v_1}(\theta), \Delta v_1 >_{L_2} + < J'_{v_2}(\theta), \Delta v_2 >_{L_2} + < J'_p(\theta), \Delta p >_{L_2} +$$

$$+ < J'_d(\theta), \Delta d >_{R_{m_1}} + < J'_{x_0}(\theta), \Delta x_0 >_{R_n} + < J'_{x_1}(\theta), \Delta x_1 >_{R_n} + < J'_\lambda(\theta), \Delta\lambda >_{R_s} +$$

$$+R, \ \ R = \sum_{i=1}^{7} R_i,$$

где $|R| \le c_* \|\Delta\theta\|_X^2$, $|R|/\|\Delta\theta\|_X \to 0$ при $\|\Delta\theta\|_X \to 0$, $c_* = const > 0$.

Отсюда следует соотношения (39), где $\psi(t)$, $t \in I$ решение уравнения (40).

Пусть $\theta_1 = (v_1 + \Delta v_1, v_2 + \Delta v_2, p + \Delta p, d + \Delta d, x_0 + \Delta x_0, x_1 + \Delta x_1, \lambda + \Delta\lambda) \in X$, $\theta_2 = (v_1, v_2, p, d, x_0, x_1, \lambda)$. Поскольку

$$|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)| \le c_0|\Delta q(t)| + c_1|\Delta\psi(t)| + c_2\|\Delta\theta\|,$$

$$\Delta\dot{\psi} = [F_{0z}(t, q + \Delta q) - F_{0z}(t, q)] - A_1^*(t)\Delta\psi,$$

$$\Delta\psi(t_1) = -\int [F_{0z(t_1)}(t, q + \Delta q) - F_{0z(t_1)}(t, q)]dt,$$

то верны оценки $\|\Delta q\| \le c_3\|\Delta\theta\|$, $|\Delta\psi(t)| \le c_4\|\Delta\theta\|$. Тогда

$$\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\|^2 = \int_{t_0}^{t_1} |J'(\theta_1) - J'(\theta_2)|^2 dt \le K\|\Delta\theta\|^2.$$

Теорема доказана.

Используя соотношения (39) (41), строим последовательность $\{\theta_n\} = \{v_{1n}, v_{2n}, p_n, d_n, x_{0n}, x_{1n}, \lambda_n\} \subset X$ по следующим правилам:

$$\begin{array}{l} v_{1n+1} = v_{1n} - \alpha_n J'_{v_1}(\theta_n), \;\; v_{2n+1} = v_{2n} - \alpha_n J'_{v_2}(\theta_n), \\ p_{n+1} = P_V[p_n - \alpha_n J'_p(\theta_n)], \;\; d_{n+1} = P_\Gamma[d_n - \alpha_n J'_d(\theta_n)], \\ x_{0n+1} = P_S[x_{0n} - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n)], \;\; x_{1n+1} = P_S[x_{1n} - \alpha_n J'_{x_1}(\theta_n)], \\ \lambda_{n+1} = P_\Lambda[d_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n)], \;\; n = 0, 1, 2, \dots, \end{array} \tag{42}$$

где $0 < \alpha_n = \dfrac{2}{K + 2\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $K > 0$ постоянная Липшица из (41). Введем следующие обозначения

$$M_0 = \{\theta \in X / J(\theta) \le J(\theta_0)\}, \;\; X_{**} = \{\theta_{**} \in X / J(\theta_{**}) = \inf_{\theta \in X} J(\theta)\},$$

где $\theta_0 = (v_{10}, v_{20}, p_0, d_0, x_{10}, x_{20}, \lambda_0) \in X$ начальная точка итерационного процесса (42).

Теорема 6 *Пусть выполнены условия теоремы 5, функционал $J(\theta)$, $\theta \in X$ ограничены снизу, последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ определяется по формуле (42). Тогда*

$$1) \;\; J(\theta_n - J(\theta_{n+1}) \ge \varepsilon\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2, \;\; n = 0, 1, 2, \dots; \tag{43}$$

$$2) \;\; \lim_{n\to\infty} \|\theta_n - \theta_{n+1}\| = 0. \tag{44}$$

Доказательство. Так как θ_{n+1} является проекцией точки $\theta_n - \alpha_n J'(\theta_n)$, то $< \theta_{n+1} - \theta_n + \alpha_n J'(\theta_n), \theta_n - \theta_{n+1} >_H \ge 0$, $\forall\theta$, $\theta \in X$. Отсюда, с учетом того, что $J(\theta) \in C^{1,1}(X)$, получим

$$J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \ge \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{K}{2}\right)\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2 \ge \varepsilon\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2.$$

Следовательно, числовая последовательность $\{J(\theta_n)\}$ строго убывает, и верно неравенство (43). Равенство (44) следует из ограниченности снизу функционала $J(\theta)$, $\theta \in X$. Заметим, что $J(\theta) > 0$, $\forall\theta$, $\theta \in X$. Теорема доказана.

Теорема 7 *Пусть выполнены условия теоремы 5, множество* M_0 *ограничено и выполнено неравенство*

$$
\begin{aligned}
&< F_{0q}(t,q_1) - F_{0q}(t,q_2), q_1 - q_2 >_{R^N} \geq 0, \ \ \forall q_1, \ q_2 \in R^N, \\
&N = m + m_2 + 2n + s + m_1 + r + 2(n + m_2).
\end{aligned} \tag{45}
$$

Тогда:

1) множество M_0 *слабо бикомпактно,* $X_{**} \neq \emptyset$, $\emptyset$ *пустое множество;*

2) последовательность $\{\theta_n\}$ *является минимизирующей, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} J(\theta_n) = J_* = \inf_{\theta\in X} J(\theta);$$

3) последовательность $\{\theta_n\} \subset M_0$ *слабо сходится к точке* $\theta_{**} \in X_{**}$;

4) справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(\theta_n) - J_* \leq \frac{c_1}{n}, \ \ c_1 = const > 0, \ \ n = 1, 2, \ldots;$$

5) краевая задача (1) (6) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} J(\theta_n) = J_* = \inf_{\theta\in X} J(\theta) = J(\theta_{**}) = 0;$$

6) если $J(\theta_{**}) = 0$, *где* $\theta_{**} = \theta_* = (v_1^*, v_2^*, p_*, d_*, x_0^*, x_1^*, \lambda_*) \in X_*$, *то решение краевой задачи (1) (6) является функция*

$$x_*(t) = Py_*(t), \ \ y_*(t) = z(t, v_1^*, v_2^*) + \lambda_2(t, \xi_0^*, \xi_1^*) + N_2(t) z(t_1; v_1^*, v_2^*), \ \ t \in I.$$

7) если $J(\theta_{**}) > 0$, *то краевая задача (1) (6) нет имеет решения.*

Доказательство. Из условия (5) следует, что функционал $J(\theta) \in C^{1,1}(X)$ является выпуклым. Первое утверждение теоремы следует из того, что M_0 ограниченное выпуклое замкнутое множество из рефлексивного банахово пространства H, а также из слабой полунепрерывности снизу функционала $J(\theta)$ на слабо бикомпактном множестве M_0. Второе утверждение следует из оценки $J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \geq \varepsilon \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Отсюда имеем $J(\theta_{n+1}) < J(\theta_n)$, $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$, $\{\theta_n\} \subset M_0$. Тогда из выпуклости функционала $J(\theta)$, $\theta \in M_0$ следует, что $\{\theta_n\}$ минимизирующая. Третье утверждение следует из слабой бикомпактности множества M_0, $\{\theta_n\} \subset M_0$. оценка скорости сходимости следует из неравенства $J(\theta_n) - J(\theta_{**}) \leq c_1 \|\theta_n - \theta_{n+1}\|$. Утверждения 5), 6) следуют из теоремы 4. Теорема доказана.

Заметим, что если $f(x, \lambda, t)$, $f_{0j}(x, x_0, x_1, \lambda, t)$, $j = \overline{1, m_2}$, $F(x, \lambda)$ линейные функции относительно переменных (x, x_0, x_1, λ), то функционал $J(\theta)$ является выпуклым.

4. Решение задачи Штурма-Лиувилля на отрезке

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля (10), (11). Обозначим $a_{21} = \dfrac{q(t)}{p(t)}$, $a_{22} = -\dfrac{\dot{p}(t)}{p(t)}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $b_{22}(t) = \dfrac{r(t)}{p(t)}$. Теперь уравнение (10) и краевое условие (11) запишутся в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + b_{22}(t)\lambda x_1, \ \ \alpha x_0 = 0, \ \ \beta x_1 = 0, \ \ t \in I = [t_0, t_1].$$

Тогда в векторной форме задача (10), (11) имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\lambda x_1, \ \ t \in I = [t_0, t_1], \ \ \alpha x_0 = 0, \ \ \beta x_1 = 0, \tag{46}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, \ \ B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{22}(t) \end{pmatrix}, \ \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ \ x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}, \ \ x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}.$$

Будем искать решения уравнения (46), когда $\lambda \in \Lambda = \{\lambda \in R^1 / \gamma \le \lambda \le \delta\}$, где γ, δ заданные числа. Полагаем, что моменты времени t_0, t_1, $t_1 > t_0$ фиксированные числа.

Для данного примера $\mu(t) \equiv 0$, $f(x, \lambda, t) \equiv \lambda x_1$, $f_0 \equiv 0$, $F \equiv 0$, $t \in I$. Тогда $\xi(t) = x(t)$, $t \in I$, $A_1(t) = A(t)$, $B_1(t) = B(t)$, $B_2 = 0$, $B_3 = 0$. Следовательно, линейная управляемая система (21) запишется в виде

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)w_1(t), \ \ y(t_0) = x_0, \ \ y(t_1) = x_1, \ \ w_1(\cdot) \in L_2(I, R^1). \tag{47}$$

Решение дифференциального уравнения (47) имеет вид

$$y(t) = \Phi(t, t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)w_1(\tau)d\tau, \ \ t \in I.$$

Так как $y(t_1) = x_1$, $y(t_0) = x_0$, то интегральное уравнение (25) для данного примера запишется так

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, t)B(t)w_1(t)dt = a = \Phi(t_0, t_1)[x_1 - \Phi(t_1, t_0)x_0], \tag{48}$$

где $\Phi(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения $\dot{\zeta} = A(t)\zeta$. Так как $\dot{\theta} = A(t)\theta$, $t \in I$, $\theta(t_0) = I_2$, где I_2 единичная матрица порядка 2×2, то элементы матрицы $\theta(t)$, $t \in I$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \dot{\theta}_{11}(t) = \theta_{21}(t), \ \ \theta_{11}(t_0) = 1; \ \ \dot{\theta}_{12}(t) = \theta_{22}(t), \ \ \theta_{12}(t_0) = 0; \ \ \dot{\theta}_{21}(t) = a_{21}(t)\theta_{11}(t) + \\ + a_{22}(t)\theta_{21}(t), \ \ \theta_{21}(t_0) = 0; \ \ \dot{\theta}_{22}(t) = a_{21}(t)\theta_{12}(t) + \\ + a_{22}(t)\theta_{22}(t), \ \ \theta_{22}(t_0) = 1. \end{gathered} \tag{49}$$

Из решения дифференциальных уравнений (49) могут быть найдены элементы матрицы $\theta(t) = \|\theta_{ij}(t)\|$, $i, j = 1, 2$. Обратная матрица

$$\theta^{-1}(\tau) = \frac{1}{\Delta(\tau)} \begin{pmatrix} \theta_{22}(\tau) & -\theta_{12}(\tau) \\ -\theta_{21}(\tau) & \theta_{11}(\tau) \end{pmatrix}, \ \ \Delta(\tau) = \theta_{11}(\tau)\theta_{22}(\tau) - \theta_{12}(\tau)\theta_{21}(\tau).$$

Заметим, что $\Phi(t_0, t) = \theta(t_0)\theta^{-1}(t) = \theta^{-1}(t)$. Поскольку

$$\Phi(t_0, t)B(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \begin{pmatrix} -\theta_{12}(t)b_{22}(t) \\ \theta_{11}(t)b_{22}(t) \end{pmatrix},$$

то матрица

$$W(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt=\begin{pmatrix}W_{11}(t_0,t_1) & W_{12}(t_0,t_1)\\ W_{12}(t_0,t_1) & W_{22}(t_0,t_1)\end{pmatrix},$$

где

$$W_{11}(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{1}{\Delta^2 t}\theta_{12}^2(t)b_{22}^2(t)dt,\ \ W_{12}(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{1}{\Delta^2 t}\theta_{11}(t)\theta_{12}(t)b_{22}^2(t)dt,$$

$$W_{22}(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{1}{\Delta^2 t}\theta_{11}^2(t)b_{22}^2(t)dt,\ \ W_{12}(t_0,t_1)=W_{21}(t_0,t_1).$$

Обратная матрица

$$W^{-1}(t_0,t_1)=\frac{1}{\Delta_1(t_0,t_1)}\begin{pmatrix}W_{22}(t_0,t_1) & -W_{12}(t_0,t_1)\\ -W_{12}(t_0,t_1) & W_{11}(t_0,t_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{W}_{11}(t_0,t_1) & \overline{W}_{12}(t_0,t_1)\\ \overline{W}_{12}(t_0,t_1) & \overline{W}_{22}(t_0,t_1)\end{pmatrix},$$

где $\Delta_1(t_0,t_1)=W_{11}(t_0,t_1)W_{22}(t_0,t_1)-W_{12}^2(t_0,t_1)$. Матрицы

$$W(t,t_1)=\begin{pmatrix}W_{11}(t,t_1) & W_{12}(t,t_1)\\ W_{12}(t,t_1) & W_{22}(t,t_1)\end{pmatrix},\ \ W(t_0,t)=\begin{pmatrix}W_{11}(t_0,t) & W_{12}(t_0,t)\\ W_{12}(t_0,t) & W_{22}(t_0,t)\end{pmatrix},$$

где $\overline{W}_{11}(t_0,t_1)=\dfrac{1}{\Delta_1(t_0,t_1)}W_{22}(t_0,t_1)$, $\overline{W}_{12}(t_0,t_1)=-\dfrac{1}{\Delta_1(t_0,t_1)}W_{12}(t_0,t_1)$, $\overline{W}_{22}(t_0,t_1)=\dfrac{1}{\Delta_1(t_0,t_1)}W_{11}(t_0,t_1)$. Можно показать, что $W(t_0,t_1)=W^*(t_0,t_1)>0$.

Так как векторы a, $E(t)$ равны

$$a=\Phi(t_0,t_1)x_1-x_0=\theta^{-1}(t_1)x_1-x_0=\begin{pmatrix}-x_{10}+\dfrac{1}{\Delta(t_1)}\theta_{22}(t_1)x_{11}-\dfrac{1}{\Delta(t_1)}\theta_{12}(t_1)x_{12}\\ -x_{20}+\dfrac{1}{\Delta(t_1)}\theta_{21}(t_1)x_{11}-\dfrac{1}{\Delta(t_1)}\theta_{11}(t_1)x_{12}\end{pmatrix},$$

$$E(t)=B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)=\frac{1}{\Delta(t)}(-\overline{W}_{11}(t_0,t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t)+\overline{W}_{12}(t_0,t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t);$$

$$-\overline{W}_{12}(t_0,t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t)+\overline{W}_{22}(t_0,t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)),$$

то

$$\lambda_1(t,x_0,x_1)=E(t)a=T_{11}(t)x_{10}+T_{12}x_{20}+T_{21}(t)x_{11}+T_{22}(t)x_{12}, \tag{50}$$

где

$$T_{11}(t)=\frac{1}{\Delta(t)}[\overline{W}_{11}(t_0,t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t)-\overline{W}_{12}(t_0,t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)],$$

$$T_{12}(t)=\frac{1}{\Delta(t)}[\overline{W}_{12}(t_0,t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t)-\overline{W}_{22}(t_0,t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)],$$

$$T_{21}(t)=\frac{\theta_{22}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\overline{W}_{11}(t_0,t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t)+\overline{W}_{12}(t_0,t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)]+$$
$$+\frac{\theta_{21}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\overline{W}_{12}(t_0,t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t)+\overline{W}_{22}(t_0,t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)]$$
$$T_{22}(t)=-\frac{\theta_{12}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\overline{W}_{11}(t_0,t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t)+\overline{W}_{12}(t_0,t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)]-$$
$$-\frac{\theta_{11}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\overline{W}_{12}(t_0,t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t)+\overline{W}_{22}(t_0,t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)]$$

Матрица $N_1(t)$ порядка 2×1 равна

$$N_1(t)=-E(t)\Phi(t_0,t_1)=-E(t)\theta^{-1}(t_1)=$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{\theta_{22}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\overline{W}_{11}(t_0,t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t)+\overline{W}_{12}(t_0,t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)]+\\ -\frac{\theta_{12}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\overline{W}_{11}(t_0,t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t)+\overline{W}_{12}(t_0,t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)]-\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}+\frac{\theta_{21}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\overline{W}_{12}(t_0,t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t)+\overline{W}_{22}(t_0,t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)]\\ -\frac{\theta_{11}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\overline{W}_{12}(t_0,t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t)+\overline{W}_{22}(t_0,t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)]\end{pmatrix}= \tag{51}$$
$$=\begin{pmatrix}N_{11}(t)\\ N_{12}(t)\end{pmatrix},\quad t\in I.$$

Тогда функция (см. (50), (51))

$$\begin{gathered}w_1(t)=v_1(t)+\lambda_1(t,x_0,x_1)+N_1(t)z(t_1,v_1)=v_1(t)+T_{11}(t)x_{10}+T_{12}(t)x_{20}+\\ +T_{21}(t)x_{11}+T_{22}(t)x_{12}+N_{11}(t)z_1(t_1,v_1)+N_{12}(t)z_2(t_1,v_1),\quad t\in I,\end{gathered} \tag{52}$$

где функция $z(t)=z(t,v_1)$, $t\in I$ решение дифференциального уравнения

$$\dot z=A(t)z+B(t)v_1(t),\quad z(t_0)=0,\quad t\in I,\quad v_1(\cdot)\in L_2(I,R^1). \tag{53}$$

Аналогичным путем вычисляются матрицы $E_1(t)$, $E_2(t)$, $N_2(t)$:

$$E_1(t)=\Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)=\theta(t)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)=$$
$$=\begin{pmatrix}e_{11}(t)&e_{12}(t)\\ e_{21}(t)&e_{22}(t)\end{pmatrix},\quad E_2(t)=\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)=$$
$$=\theta(t)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\theta^{-1}(t_1)=\begin{pmatrix}c_{11}(t)&c_{12}(t)\\ c_{21}(t)&c_{22}(t)\end{pmatrix},\quad N_2(t)=-\begin{pmatrix}c_{11}(t)&c_{12}(t)\\ c_{21}(t)&c_{22}(t)\end{pmatrix}.$$

Тогда функция

$$y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}z_1(t,v_1)+e_{11}(t)x_{10}+e_{12}x_{20}+c_{11}(t)x_{11}+c_{12}(t)x_{12}-\\ z_2(t,v_1)+e_{21}(t)x_{10}+e_{22}x_{20}+c_{21}(t)x_{11}+c_{22}(t)x_{12}-\end{pmatrix} \tag{54}$$
$$\begin{pmatrix}-c_{11}(t)z_1(t_1,v_1)-c_{12}(t)z_2(t_1,v_1)\\ -c_{21}(t)z_1(t_1,v_1)-c_{22}(t)z_2(t_1,v_1)\end{pmatrix}.$$

Теперь оптимизационная задача (33) для данного примера запишется в виде: минимизировать функционал

$$J(v_1, x_{10}, x_{20}, x_{11}, x_{12}, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} |w_1(t) - \lambda y_1(t)|^2 dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} |v_1(t) + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1, v_1) - \lambda[z_1(t, v_1) + e_1(t)x_0 + \tag{55}$$

$$+c_1(t)x_1 + N_{21}(t)z(t_1, v_1)]|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} F_0(t, q)dt \to \inf$$

при условиях

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)v_1(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \tag{56}$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^1), \quad x_0 \in S_0, \quad x_1 \in S_1, \quad \lambda \in \Lambda, \tag{57}$$

где $T_1(t) = (T_{11}(t), T_{12}(t)), T_2(t) = (T_{21}(t), T_{22}(t)), e_1(t) = (e_{11}(t), e_{12}(t)), c_1(t) = (c_{11}(t), c_{12}(t))$, $N_{31}(t) = (-c_{11}(t), -c_{12}(t))$, $S_0 = \{x_0 \in R^2/\alpha x_0 = 0\}$, $S_1 = \{x_1 \in R^2/\beta x_1 = 0\}$, $S_0 \times S_1 = S \subset R^4$, $q = (v_1, x_0, x_1, \lambda, z(t), z(t_1))$.

Функции $w_1(t)$, $y_1(t)$, $t \in I$ определяются формулами (52), (54), функция $z(t)$, $t \in I$ решение дифференциального уравнения (53). Заметим, что $\theta(v_1, x_0, x_1, \lambda) \in X = L_2(I, R^1) \times S_0 \times S_1 \times \Lambda \subset H = L_2(I, R^1) \times R^2 \times R^2 \times R^1$,

Функция

$$F_0(q, t) = |v_1(t) + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1, v_1) - \lambda[z_1(t, v_1) + e_1(t)x_0 +$$

$$+c_1(t)x_1 + N_{21}(t)z(t_1, v_1)]|^2, \quad N_{21}(t) = (-c_{11}(t), -c_{12}(t)).$$

Частные производные

$$F_0(t, q) = 2\overline{w}_1(t), \quad \overline{w}_1(t) = v_1(t) + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1, v_1) -$$

$$-\lambda[z_1(t, v_1) + e_1(t)x_0 + c_1(t)x_1 + N_{21}(t)z(t_1, v_1)],$$

$$F_{0x_0}(t, q) = [2T_1^*(t) - 2\lambda e_1^*(t)]\overline{w}_1(t),$$

$$F_{0x_1}(t, q) = [2T_2^*(t) - 2\lambda c_1^*(t)]\overline{w}_1(t),$$

$$F_{0z_1} = -2\lambda \overline{w}_1(t), \quad F_{0z_2}(t, q) = 0, \quad F_{0z_1}(t, q) = [2N_1^* - 2\lambda N_{21}^*(t)]\overline{w}_1(t),$$

$$F_{0z}(t, q) = \begin{pmatrix} -2\lambda \overline{w}_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_{0\lambda}(t, q) = -2[z_1(t) + e_1(t)x_0 + c_1(t)x_1 + N_{21}(t)z(t_0, v_1)]\overline{w}_1(t).$$

Согласно формуле (39), производная Фреше функционала (55) при условиях (56), (57) определяется по формуле

$$J'(\theta) = (J'_{v_1}(\theta), J'_{x_0}(\theta), J'_{x_1}(\theta), J'_\lambda(\theta)) \in H,$$

где

$$J'_{v_1}(\theta) = F_{0v_1}(t,q) - B^*(t)\psi(t), \quad J'_{x_0}(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0x_0}(t,q)dt,$$

$$J'_{x_1}(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0x_1}(t,q)dt, J'_{\lambda}(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0\lambda}(t,q)dt.$$

функция $z(t,v_1)$, $t \in I$ решение дифференциального уравнения (56), а функция $\psi(t)$, $t \in I$ решение сопряженной системы

$$\dot\psi = F_{0z}(t,q) - A^*(t)\psi, \quad \psi(t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0z(t_1)}(t,q)dt. \tag{58}$$

Для данного примера уравнение (56) имеет вид

$$\dot z_1 = z_2, \quad \dot z_2 = a_{21}(t)z_1 + a_{22}(t)z_2 + b_{22}(t)v_1(t), \quad z_1(t_0) = 0, \quad z_2(t_0) = 0.$$

Уравнение (58) запишется в виде

$$\dot\psi_1 = -2\lambda\overline{w}_1(t) - a_{21}(t)\psi_2, \quad \dot\psi_2 = -\psi_1 - a_{22}(t)\psi_2, \quad \psi(t_1) = \begin{pmatrix}\psi_1(t_1)\\ \psi_2(t_1)\end{pmatrix} = -\int\limits_{t_0}^{t_1} F_{0z(t_1)}(t,q)dt.$$

Как следует из формулы (42), для данного примера последовательность $\{\theta_n\} = \{v_{1n}, x_{0n}, x_{1n}, \lambda_n\} \subset X$, где

$$\begin{array}{l} v_{1n+1} = v_n - \alpha_n J'_{v_1}(\theta_n), \quad x_{0n+1} = P_{S_0}[x_{0n} - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n)], \\ x_{1n+1} = P_{S_1}[x_{1n} - \alpha_n J'_{x_1}(\theta_n)], \\ \lambda_{n+1} = P_\Lambda[\lambda_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n)], \quad n = 0,1,2,\dots, \quad \alpha_0 > 0 \end{array} \tag{59}$$

Следует отметить, что:

$$x_{0n+1} = P_{S_0}[x_{0n} - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n)] = [x_{0n} - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n)] - \frac{\alpha^*\alpha}{|\alpha|^2}[x_{0n} - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n)],$$

$$x_{1n+1} = P_{S_1}[x_{1n} - \alpha_n J'_{x_1}(\theta_n)] = [x_{1n} - \alpha_n J'_{x_1}(\theta_n)] - \frac{\beta^*\beta}{|\beta|^2}[x_{1n} - \alpha_n J'_{x_1}(\theta_n)],$$

$$\lambda_{n+1} = P_\Lambda[\lambda_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n)] = \begin{cases} \gamma, \text{ если } \lambda_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n) < \gamma \\ \lambda_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n), \text{ если } \gamma \le \lambda_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n) \le \delta, \\ \delta, \text{ если } \lambda_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n) > \delta. \end{cases}$$

Вдоль последовательности $(\theta_n) \subset X$, определяемая по формуле (59) числовая последовательность $\{J(\theta_n)\}$ строго убывает, $J(\theta) \ge 0$, $\forall\theta$, $\theta \in X$. Если $v_{1n} \to$ слv_{1*}, $x_{0n} \to x_0^*$, $x_{1n} \to x_1^*$, $\lambda_n \to \lambda_*$ при $n \to \infty$ и значение $J(\theta_*) = 0$, где $\theta_* = (v_{1*}, x_0^*, x_1^*, \lambda_*)$, то решением задачи Штурма-Лиувилля является функция $x_*(t) = y_*(t) = z(t, v_{1*}) + E_1(t)x_0^* + E_2(t)x_1^* + N_2(t)z(t, v_1^*)$, $t \in I$ соответствующее значению $\lambda_* \in \Lambda$.

5. Заключение

Разработан метод решения краевой задачи с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии фазовых и интегральных ограничений. Основой предлагаемого является принцип погружения. Суть принципа погружения состоит в том, что исходная краевая задача с параметром при наличии фазовых и интегральных ограничений заменяется на равносильную начальную задачу оптимального управления. Такой подход стал возможным благодаря нахождению общего решения одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Существование решения краевой задачи с параметром и ограничениями сведено к построению минимизирующей последовательности и определению значения нижней грани функционала.

В качестве примера приведено решение задачи Штурма-Лиувилля. В общем случае оптимизационная задача (33) (36) может иметь бесконечное множество решений $\{\theta_*\} \subset X$, для которых $J(\{\theta_*\}) = 0$. В зависимости от выбора начального приближения минимизирующие последовательности сходятся к какому-либо элементу множества $\{\theta_*\}$. Пусть $\theta_* = (v_{1*}, x_0^*, x_1^*, \lambda_*)$, где $J(\theta_*) = 0$ некоторое решение. Здесь $x_0^* = x(t_0)$, $x_1^* = x(t_1)$, $(x_0^*, x_1^*) \in S_0 \times S_1 = S$, $\lambda_* \in \Lambda$,где x_0^* начальное состояние системы. В постановке задачи приведены требования (7), (8), налагаемые на правую часть дифференциального уравнения (1) при выполнении которых начальная задача Коши имеет единственное решение. Следовательно, дифференциальное уравнение (1) с начальным состоянием $x_0^* = x(t_0)$ при $\lambda = \lambda_* \in \Lambda$ имеет единственное решение для значений $t \in [t_0, t_1]$. Более того, $x_1^* = x(t_1)$ и выполнены все ограничения (2) (6). Независимо от того, какое решение выделяется итерационной процедурой, в случае, $J(\theta_*) = 0$, находим соответствующее решение краевой задачи (1) (6).

Принципиальное отличие предлагаемого метода состоит в том, что разрешимость и построение решения краевой задачи с параметром и ограничениями решаются воедино, путем построения минимизирующих последовательностей, ориентированных на применении компьютерной техники. Разрешимость и построение решения краевой задачи определяются путем решения оптимизационной задачи (33) (36), где $\lim\limits_{n\to\infty} J(\theta_n) = \inf\limits_{\theta\in X} J(\theta) = 0$ дает условия разрешимости, а через предельные точки последовательности $\{\theta_m\}$ равные θ_* определяются решение краевой задачи.

Литература

[1] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. II (6-е изд.), М.: Наука, 1981, 550 с.

[2] *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Светников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985, 231 с.

[3] *Клоков Ю.А.* О некоторых краевых задачах для систем двух уравнений второго порядка. // Дифференциальные уравнения, 2012, т. 48, № 10, с. 1368-1373.

[4] *Колмогоров Д.П., Шейка Б.А.* Задача о кратных собственных и положительных собственных функциях для однородного квазилинейного уравнения второго порядка. // Дифференциальные уравнения, т. 48, № 9, с. 1475-1486.

[5] *Макин А.С., Томпсон Г.В.* О разложениях по собственным функциям нелинейного оператора Штурма-Лиувилля с краевыми уловиями зависящими от спектрального параметра. // Дифференциальные уравнения, т. 27, № 8, с. 1096-1104.

[6] *Айсагалиев С.А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнния. 1991, т.27, №9. с. 1475 1486.

[7] *Айсагалиев С.А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. 2005. т.5, №14(18).

[8] *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П.* Упраляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением. Сибирский математический журнал, январь февраль, 2011, т.53, №1, с.20 37.

[9] *Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А.* Об оптимальном управлении линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2012. т.48, №6, с.826-838.

[10] *Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А.* оптимальное управление динамических систем. Palmarium Academic Publishing (Verlag, Германия). 2012. 288с.

[11] *Айсагалиев С.А., Калимолдаев М.Н., Жунусова Ж.Х.* Принцип погружения для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический журнал. 2012. Т.12. №2(44). С. 5-22.

[12] *С.А. Айсагалиев, М.Н. Калимолдаев, Е.М. Поздеева* К краевой задаче обыкновенных дифференциальных уравнений. ISSN 1563-0285. Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2012, №2(76), с. 5-24.

References

[1] *Smirnov V.I.* Kurs vyisshey matematiki. T. 4. Ch. II (6-e izd.), M.: Nauka, 1981, 550 s.

[2] *Tihonov A.N., Vasileva A.B., Svetnikov A.G.* Differentsialnyie uravneniya. M.: Nauka, 1985, 231 s.

[3] *Klokov Yu.A.* O nekotoryih kraevyih zadachah dlya sistem dvuh uravneniy vtorogo poryadka. // Differentsialnyie uravneniya, 2012, t. 48, No 10, s. 1368-1373.

[4] *Kolmogorov D.P., Sheyka B.A.* Zadacha o kratnyih sobstvennyih i polozhitelnyih sobstvennyih funktsiyah dlya odnorodnogo kvazilineynogo uravneniya vtorogo poryadka. // Differentsialnyie uravneniya, t. 48, No 9, s. 1475-1486.

[5] *Makin A.S., Tompson G.V.* O razlozheniyah po sobstvennyim funktsiyam nelineynogo operatora Shturma-Liuvillya s kraevyimi uloviyami zavisyaschimi ot spektralnogo parametra. // Differentsialnyie uravneniya, t. 27, No 8, s. 1096-1104.

[6] *Aisagaliev S.A.* Upravlyaemost nekotoroy sistemyi differentsialnyih uravneniy // Differentsialnyie uravnniya. 1991, t. 27, No 9. s. 1475 1486.

[7] *Aisagaliev S.A.* Obschee reshenie odnogo klassa integralnyih uravneniy // Matematicheskiy zhurnal. 2005. t. 5, No 14(18).

[8] *Aisagaliev S.A., Belogurov A.P.* Upralyaemost i byistrodeystvie protsessa, opisyivaemogo parabolicheskim uravneniem s ogranichennyim upravleniem. Sibirskiy matematicheskiy zhurnal, yanvar fevral, 2011, t. 53, No 1, s. 20 37.

[9] *Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A.* Ob optimalnom upravlenii lineynyimi sistemami s lineynyim kriteriem kachestva i ogranicheniyami // Differentsialnyie uravneniya. 2012. t. 48, No 6, s. 826-838.

[10] *Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A.* optimalnoe upravlenie dinamicheskih sistem. Palmarium Academic Publishing (Verlag, Germaniya). 2012. 288 s.

[11] *Aisagaliev S.A., Kalimoldaev M.N., Zhunusova Zh.H.* Printsip pogruzheniya dlya kraevyih zadach obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy // Matematicheskiy zhurnal. 2012. T. 12. No 2(44). s. 5-22.

[12] *S.A. Aisagaliev, M.N. Kalimoldaev, E.M. Pozdeeva* K kraevoy zadache obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy. ISSN 1563-0285. Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf. 2012, No 2(76), s. 5-24.