УДК 517.946

Г.Б.Баканов *, Т.Б.Дильман

Кызылординский государственный университет имени Коркыт ата, Республика Казахстан, г. Кызылорда
* E-mail: Gbakan58@mail.ru

Единственность решения задачи интегральной геометрии для некоторого семейства кривых

В данной статье рассматривается следующий класс задач интегральной геометрии: о вос становлении функции, заданной интегралами по некоторому семейству кривых. Эти задачи связаны с многочисленными приложениями. В целях изучения внутреннего строения земных недр на поверхности Земли производится серия взрывов. Для каждого взрыва на системе при боров измеряются режимы колебаний земной поверхности. Цель исследования по показа ниям приборов определить внутри Земли распределение физических параметров, связанных с законами распространения сейсмических волн. Наиболее четкий функционал в показаниях приборов время прихода сейсмической волны, именно он служит основой в практике ин терпретации. Известно, что линеаризованная задача интерпретации данных сейсморазведки есть задача интегральной геометрии. К интегральной геометрии сводятся задачи, связанные с просвечиванием, в частности, задачи интерпретации рентгеновских снимков. Потемнение рентгеновской пленки функционально связано с интегралом поглощения вдоль рентгенов ского луча от источника до точки на пленке. Таким образом, задача определения простран ственного распределения коэффициента поглощения есть задача интегральной геометрими требуется определить функцию, если заданы интегралы от этой функции по семейству лу чей. В работе исследуется задача интегральной геометрии для семейства плоских кривых типа параболы. Доказывается теорема единственности решения рассматриваемой задачи ин тегральной геометрии.

Ключевые слова: интегральная геометрия, семейство кривых, устойчивость, единствен ность, решение, интеграл, область, функция, уравнение, задача.

Bakanov G.B., Dilman T.B.

Uniqueness theorem of solution the integral geometry problem for the family curves

In this article the following class of integral geometry problems is considered: about the function reconstruction, shaped by the integrals on some set of curves. These problems are correlated with several applications. In order to study the internal earth structure, the multiple explosions are held on Earth surface. Then, the fluctuation regimes of earth surface are measured on equipment for each explosion. The goal of research is to determine the distribution of physical parameters inside the Earth according to equipment measurements, correlated with laws on dissemination of seismic waves. The most clear functional of such equipment is the arrival time of seismic wave, which exactly serves as a base for interpretation practice. It is known that lineriazed problem of seismic exploration data interpretation is actually the integral geometry problem. An integral geometry also includes the problems related to the radiography, particularly the interpretation problem of X ray examination. For instance, a X ray film darkening functionally correlated with the absorption integral along the X ray from the source to point on the film. Thus, determination problem of spatial distribution for the absorption coefficient is also actually an integral geometry problem. In this case, it is required to determine the function if the integrals of this function on set of rays were set. The integral geometry problem is studied in this work. The solution uniqueness theorem is proved for the considered integral geometry problem.

Key words: integral geometry, family curves, stability, uniqueness, solution, integral, domain, function, equation, problem.

Г.Б.Баканов, Т.Б.Дильман.

Қисықтар үйірі үшін интегралдық геометрия есебі шешімінің жалғыздығы

Бұл мақалада интегралдық геометрия есептерінің келесі класы қарастырылады: белгілі бір қисықтар үйірі бойынша алынған интегралдар арқылы интеграл астындағы функция ізделі неді. Бұл есептер қолданыстағы көптеген есептермен тығыз байланысты. Сейсмобарлаудың нәтижелерін интерпретациялау есебінде жердің ішкі құрылымын зерттеу үшін Жер бетін де жарылыстар жасалынады. Әрбір жарылыс үшін құралдар жүйесінде Жер бетінде пайда болған тербелістер өлшенеді. Зерттеу мақсаты құралдар көрсеткіштері бойынша сейсмика лык толкындардың таралу заңдылыктарымен байланысты физикалык параметрлердің тара луын аныктау. Құрал көрсеткіштерінің негізгі функционалы ретінде сейсмикалық толкын ның келу уакыты алынады. Сейсмобарлаудың нәтижелерін интерпретациялаудың сызыктан дырылған есебі интегралдың геометрия есебі екені белгілі. Қарастырылып отырған интеграл дың геометрия есептеріне рентгендік түсірілімдерді интерпретациялау есептері келтіріледі. Рентгендік пленканың қоюлануы қайнар көзінен пленкадағы нүктеге дейінгі рентгендік сәу ле бойынша алынған жұтылу интегралымен функционалды байланысты болады. Сонымен кеңістіктегі жұтылу коэффициентін анықтау есебі келесі интегралдың геометрия есебіне кел тіріледі: сәулелер үйірі бойынша алынған интегралдар арқылы интеграл астындағы функци яны табу керек. Бұл жұмыста парабола типтес жазық қисықтар үшін интегралдық геометрия есебі зерттеледі. Қарастырылған интегралдың геометрия есебі шешімінің жалғыздықы тура лы теорема дәлелденеді.

Түйін сөздер: интегралдық геометрия, қисықтар үйірі, орнықтылық, жалғыздық, шешім, интеграл, облыс, функция, теңдеу, есеп.

Рассмотрим следующую задачу интегральной геометрии. В области $0 \le z \le H$ трехмерного пространства *x, y, z* задано семейство плоских кривых $L(x,y,z,\alpha)$ типа параболы с вершинами в точках *(x, y, z)* и опирающихся двумя концами на плоскость *z = 0*. Плоскости, содержащие кривые из $L(x,y,z,\alpha)$, предполагаются перпендикулярными плоскости *z = 0*. Пусть (ξ_k,η_k,ζ) текущие координаты кривой из семей-ства *L(x, y, z,α)*:

$$\xi_k = x + (-1)^k\sqrt{z-\zeta}[1+\varphi(x,y,\sqrt{z-\zeta},\alpha)]\cos\alpha,$$

$$\eta_k = y + (-1)^k\sqrt{z-\zeta}[1+\varphi(x,y,\sqrt{z-\zeta},\alpha)]\sin\alpha,$$

$$0 \le \zeta \le z.$$

В задаче интегральной геометрии [1] по заданной функции *f (x, y, z,α)* из уравнения

$$f(x,y,z,\alpha) = \int_0^{r(x,y,x,0,\alpha)} \sum_{k=1}^{2} u(\xi_k,\eta_k,\zeta)d\zeta$$

нужно определить функцию $u(x,y,z)$.
Здесь $r = r(x,y,z,\zeta,\alpha) = \sqrt{z-\zeta}[1+\varphi(x,y,\sqrt{z-\zeta},\alpha)]$ означает длину проекции кривой из заданного семейства на плоскости *z = 0*.

Аналогичная постановка задачи интегральной геометрии, когда кривые инвариантны к сдвигу по переменным x и y, исследована в работе [2]. В данной работе рассматриваемые кривые инвариантны к сдвигу лишь по переменной z. Доказывается теорема единственности решения.

Теорема 1 *Пусть функция $\varphi(x, y, \tau, \alpha)$ трижды непрерывно дифференцируема по всем переменным и удовлетворяет условиям*

$$\varphi(x, y, -\tau, \alpha) = \varphi(x, y, \tau, \alpha), \varphi(x, y, 0, \alpha) = 0,$$

$$\|\tau_1\varphi(x, y, \tau_1, \alpha) - \tau_2\varphi(x, y, \tau_2, \alpha)\|_C \leq q\,\|\tau_1 - \tau_2\|_C\,, q<1.$$

Тогда решение рассматриваемой задачи интегральной геометрии единственно в достаточной малой области в классе финитных функций $u(x, y, z)$с носителем $\Omega = \{(x, y)\} \subset R^2$, принадлежащих $L_2(\Omega)$ по x, y, а по переменной z удовлетворяющей условию $|u(x, y, z)| \leq Me^{az}$, если $z \geq 0$; $u(x, y, z) \equiv 0$, если $z < 0$, постоянные $M > 0$, $a > 0$.

Доказательство.

Исходное уравнение преобразуем к виду

$$f(x, y, z, \alpha) = \int_0^z \frac{R(x, y, \sqrt{z-\zeta}, \alpha)}{2\sqrt{z-\zeta}} \sum_{k=1}^{2} u(\xi_k, \eta_k, \zeta)d\zeta,$$

где

$$R(x, y, \sqrt{z-\zeta}, \alpha) = 1 + \varphi(x, y, \sqrt{z-\zeta}, \alpha) + \sqrt{z-\zeta}\varphi'_{(3)}(x, y, \sqrt{z-\zeta}, \alpha).$$

Далее, к функции $f(x, y, z, \alpha)$ применяем преобразование Лапласа по переменной z:

$$F(x, y, p, \alpha) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pz} f(x, y, z, \alpha)dz =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-p\tau^2} R(x, y, \tau, \alpha)d\tau \int_0^{+\infty} e^{-pz} \sum_{k=1}^{2} u(\xi_k, \eta_k, \zeta)d\zeta,$$

где

$$R(x, y, \tau, \alpha) = 1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha) + \varphi'_\tau(x, y, \tau, \alpha)\tau,$$

$$\xi_k = x + (-1)^k \tau[1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha)] \cos\alpha,$$

$$\eta_k = y + (-1)^k \tau[1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha)] \sin\alpha, \kappa{=}1, 2.$$

Следовательно,

$$F(x, y, p, \alpha) == \int_0^{+\infty} e^{-p\tau^2} R(x, y, \tau, \alpha)d\tau \sum_{k=1}^{2} U(\xi_k, \eta_k, p)d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\tau^2} R(x,y,\tau,\alpha) U(x+\tau(1+\varphi(x,y,\tau,\alpha))\cos\alpha, y+\tau(1+\varphi(x,y,\tau,\alpha))\sin\alpha, p) d\tau,$$

где U преобразование Лапласа от функции u по переменной z. В силу четности функции $\varphi(x,y,\tau,\alpha)$по переменной τ функция $\varphi_\tau'(x,y,\tau,\alpha)$ является нечетной, а $R(x,y,\tau,\alpha)$ - нечетной.

Интегрируя $F(x,y,p,\alpha)$ по переменной α от $\alpha=0$ до $\alpha=2\pi$, получаем двойной интеграл по всей плоскости τ,α:

$$\int_0^{2\pi} F(x,y,p,\alpha)d\alpha = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\tau^2} R(x,y,\tau,\alpha) U(x+$$
$$+\tau(1+\varphi(x,y,\tau,\alpha))\cos\alpha, y+\tau(1+\varphi(x,y,\tau,\alpha))\sin\alpha, p)d\tau. \quad (1)$$

Сделаем следующую замену переменных:

$$x+\tau(1+\varphi(x,y,\tau,\alpha))\cos\alpha = \xi, y+\tau(1+\varphi(x,y,\tau,\alpha))\sin\alpha = \eta. \quad (2)$$

Отсюда найдем τ,α рассматривая x, y как параметры. Далее, вычислим якобиан

$$J(\xi,\eta) = \begin{vmatrix} \tau_\xi' & \tau_\eta' \\ \alpha_\xi & \alpha_\eta \end{vmatrix}.$$

Нетрудно из системы (2) найти

$$\alpha = arctg\frac{\eta-y}{\xi-x}. \quad (3)$$

Лемма 1 *При условиях теоремы 1, τ из системы* (2) *определяется в виде*

$$\tau = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2} + \omega(x,y,\xi,\eta). \quad (4)$$

Пользуясь формулами (3), (4) вычислим якобиан

$$J(\xi,\eta) = \frac{1+G(x,y,\xi,\eta)}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}},$$

где функция

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{(\xi-x)\omega_\xi' + (\eta-y)\omega_\eta'}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}$$

дважды непрерывно дифференцируема по переменным x, y.

Таким образом, после замены переменных, вместо уравнения (1) имеем

$$\int_0^{2\pi} F(x,y,p,\alpha)d\alpha =$$

$$= \int_{R^2} \frac{e^{-p[\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}+\omega(x,y,\xi,\eta)]^2}\overline{R}(x,y,\xi,\eta)[1+G(x,y,\xi,\eta)]U(\xi,\eta,p)d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}},$$

где

$$\overline{R}(x,y,\xi,\eta) = R(x,y,\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}+\omega(x,y,\xi,\eta), arctg\frac{\eta-y}{\xi-x}].$$

В силу финитности функции $U(\xi,\eta,p)$ по первым двум аргументам в ограниченной области $\Omega \subset R^2$:

$$\int_0^{2\pi} F(x,y,p,\alpha)d\alpha = \iint_\Omega \frac{U(\xi,\eta,p)}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}d\xi d\eta + \iint_\Omega \frac{K(x,y,\xi,\eta,p)U(\xi,\eta,p)}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}d\xi d\eta,$$

где

$$K(x,y,\xi,\eta,p) = e^{-p[\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}+\omega(x,y,\xi,\eta)]^2}\overline{R}(x,y,\xi,\eta)[1+G(x,y,\xi,\eta)]-1$$

достаточно гладкая функция. К обеим частям последнего уоравнения применяем оператор усреднения по кругу $S(\lambda,\mu;h)$ радиуса h с центром в точке (λ,μ) :

$$W(\lambda,\mu;h) = \iint_{S(\lambda,\mu;h)} \frac{\int_0^{2\pi} F(x,y,p,\alpha)}{\sqrt{(\lambda-x)^2+(\mu-y)^2}}dxdy = \iint_\Omega F(\lambda,\mu,\xi,\eta,p)U(\xi,\eta,p)d\xi d\eta, \quad (5)$$

где

$$F(\lambda,\mu,\xi,\eta,p) = \iint_{S(\lambda,\mu;h)} \frac{dxdy}{\sqrt{(\lambda-x)^2+(\mu-y)^2}\sqrt{(\xi-x)^2+\sqrt{(\eta-y)^2}}}+$$

$$+\iint_{S(\lambda,\mu;h)} \frac{K(x,y,\xi,\eta,p)}{\sqrt{(\lambda-x)^2+(\mu-y)^2}\sqrt{(\xi-x)^2+\sqrt{(\eta-y)^2}}}dxdy.$$

С помощью полярных координат r,α с центром в точке (λ,μ) изучим первое слагаемое функции $F(\lambda,\mu,\xi,\eta,p)$:

$$\iint_{S(\lambda,\mu;h)} \frac{dxdy}{\sqrt{(\lambda-x)^2+(\mu-y)^2}\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-\mu)^2}} = \left| \begin{array}{c} x=\lambda+r\cos\alpha, \\ y=\mu+r\sin\alpha \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^h \frac{dr}{\sqrt{[r-(\xi-\lambda)\cos\alpha-(\eta-\mu)\sin\alpha]^2+(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2-[(\xi-\lambda)\cos\alpha+(\eta-\mu)\sin\alpha]^2}} =$$
$$= \int_0^{2\pi} \ln|\, h-(\xi-\lambda)\cos\alpha-(\eta-\mu)\sin\alpha +$$
$$+\sqrt{h^2-2h[(\xi-\lambda)\cos\alpha+(\eta-\mu)\sin\alpha]+(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2}\,|d\alpha-$$

$$-\int_0^{2\pi} \ln\left|-\frac{(\xi-\lambda)\cos\alpha+(\eta-\mu)\sin\alpha}{\sqrt{(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2}}+1\right|d\alpha - 2\pi\ln\sqrt{(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2}.$$

Поэтому уравнение (5) запишем в виде

$$W(\lambda,\mu,p) = -2\pi \iint_\Omega \sqrt{(\xi-\lambda)^2+(\eta-\mu)^2}U(\xi,\eta,p)d\xi d\eta + \iint_\Omega F_1(\lambda,\mu,\xi,\eta,p)U(\xi,\eta,p)d\xi d\eta, \tag{6}$$

где $F_1(\lambda,\mu,\xi,\eta,p)$ - известная функция.

К уравнению (6) применяем оператор Лапласа по переменным λ,μ:

$$\Delta_{\lambda\mu}W(\lambda,\mu,p) = -4\pi^2U(\lambda,\mu,p) + \iint_\Omega \Delta_{\lambda\mu}F_1(\lambda,\mu,\xi,\eta,p)U(\xi,\eta,p)d\xi d\eta. \tag{7}$$

Исследуем ядро уравнения (7). Если ввести полярные координаты ρ,β с центром в точке (ξ,η), то

$$F_1(\xi+\rho\cos\beta,\eta+\rho\sin\beta,\xi,\eta,p) = F_2(\rho,\beta,\xi,\eta,p),$$

следовательно, ядро уравнения (7) имеет вид

$$\Delta_{\lambda\mu}F_1(\lambda,\mu,\xi,\eta,p) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_2}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta^2}. \tag{8}$$

Заметим, что

$$F_1(\lambda,\mu,\xi,\eta,p) = \Phi(\rho) + \Psi(\rho,\beta,\xi,\eta,\rho)$$

где

$$\Phi(\rho) = \int_0^{2\pi} \ln\left|h+\rho\cos\theta+\sqrt{h^2+2h\rho\cos\theta+\rho^2}\right|d\theta - \int_0^{2\pi}\ln|\cos\theta+1|\,d\theta,$$

$$\Psi(\rho,\beta,\xi,\eta,\rho) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho\cos\theta+\sqrt{h^2-\rho^2\sin^2\theta}} \frac{K(\xi+r\cos(\theta+\beta),\eta+r\sin(\theta+\beta),\xi,\eta,p)}{\sqrt{\rho^2+r^2-2r\rho\cos\theta}}dr. \tag{9}$$

При $\rho \le diam\Omega \le h$ функция $\Phi(\rho)$ является достаточно гладкой функцией, так как $\int_0^{2\pi}\ln|\cos\theta+1|\,d\theta$ - схо-дящийся несобственный интеграл второго рода. Следовательно, задача оценки ядра уравнения (7) сводится к задаче исследования гладкости функции $\Psi(\rho,\beta,\xi,\eta,\rho)$ по переменным ρ,β.

При достаточно малых ρ можно всегда выбрать $\delta>0$ так, чтобы было

$$\rho(1+\delta) < \rho\cos\theta + \sqrt{h^2-\rho^2\sin^2\theta}, 0\le\theta\le 2\pi.$$

Внутренний интеграл в формуле (9) разбиваем на 2 интеграла: один по отрезку $[0,\rho(1+\delta)]$, другой по отрезку $[\rho(1+\delta),\rho\cos\theta+\sqrt{h^2-\rho^2\sin^2\theta}]$, тогда

$$\Psi(\rho,\beta,\xi,\eta,\rho) = \Psi_1(\rho,\beta,\xi,\eta,\rho) + \Psi_2(\rho,\beta,\xi,\eta,\rho).$$

В первом слагаемом введем новую переменную, тогда

$$\Psi_1(\rho,\beta,\xi,\eta,\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{K[\xi+\rho\cdot t\cos(\theta+\beta),\eta+\rho\cdot t\sin(\theta+\beta),\xi,\eta,p]}{\sqrt{1+t^2-2t\cos\theta}}dt$$

- достаточно гладкая функция. Для оценки функции $\Psi_2(\rho,\beta,\xi,\eta,\rho)$ и ее производных порядка $n \le 2$ запишем ее в виде

$$\Psi_2(\rho,\beta,\xi,\eta,\rho) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\rho(1+\delta)}^{\rho\cos\theta+\sqrt{h^2-\rho^2\sin^2\theta}} \frac{K(\xi+r\cos(\theta+\beta),\eta+r\sin(\theta+\beta),\xi,\eta,p)}{r}\Phi_1(\frac{\rho}{r},\theta)dr,$$

где для функции

$$\Phi_1(\frac{\rho}{r},\theta) = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\rho}{r})^2+1-2(\frac{\rho}{r})\cos\theta}}$$

справедливо неравенство [1, стр. 205]

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\Phi_1(\frac{\rho}{r},\theta)\right| \le \frac{C}{r^k}, r \ge \rho(1+\delta), \qquad C = const. \tag{10}$$

При вычислении производных $\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}D^l_{\xi\eta\beta}$, $l+k \le 2$ от функции $\Psi_2(\rho,\beta,\xi,\eta,\rho)$можно внести символ дифференцирования $D^l_{\xi\eta\beta}$ под знак внутреннего интеграла. В силу достаточной гладкости функции

$$K(\xi+r\cos(\theta+\beta),\eta+r\sin(\theta+\beta),\xi,\eta,p)$$

и функция $\frac{K(\xi+r\cos(\theta+\beta),\eta+r\sin(\theta+\beta),\xi,\eta,p)}{r}$ будет достаточно гладкой в $\Psi_2(\rho,\beta,\xi,\eta,\rho)$. Вычисление производной $\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}$ от внутреннего интеграла функции $\Psi_2(\rho,\beta,\xi,\eta,\rho)$приводит к появ-лению ряда слагаемых за счет вычисления производных по верхнему и нижнему пределам и интеграла за счет дифференцирования подынтегральной функции. Первые из этих слагаемых ограничены, так как функ-ция $\Phi_1(\frac{\rho}{r},\theta)$ на нижнем пределе ограничена и не зависит от ρ, а на верхнем пределе совпадает с аналитической функцией $\frac{\rho\cos\theta+\sqrt{h^2-\rho^2\sin^2\theta}}{h}$. Интеграл, возникающий при дифференцировании подынте-грального выражения в силу неравенства (10) оценивается интегралом

$$\int_{\rho(1+\delta)}^{\rho\cos\theta+\sqrt{h^2-\rho^2\sin^2\theta}} \frac{dr}{r^k} = \left\{ \begin{array}{c} \ln\frac{\cos\theta+\sqrt{(\frac{h}{\rho})^2-\sin^2\theta}}{1+\delta}, k=1, \\ \frac{-1}{\rho\cos\theta+\sqrt{h^2-\rho^2\sin^2\theta}} + \frac{1}{\rho(1+\delta)}, k=2 \end{array} \right\}.$$

Отсюда вытекает следующая оценка

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}D^l_{\xi\eta\beta}F_2(\rho,\beta,\xi,\eta,p)\right| \le C\left\{ \begin{array}{c} \ln\rho, k=1, \\ \frac{1}{\rho}, k=2 \end{array} \right\}, k+l \le 2,$$

которая справедлива в окрестности точки $\rho = 0$. Вне этой окрестности функция $F_2(\rho,\beta,\xi,\eta,p)$ непрерывна и ограничена вместе с производными до порядка 2.

По известной лемме Адамара [3]

$$F_2(\rho,\beta,\xi,\eta,p) = F_2(0,\beta,\xi,\eta,p) + \rho G(\rho,\beta,\xi,\eta,p),$$

где гладкость функции $G(\rho,\beta,\xi,\eta,p)$ на единицу меньше гладкости самой функции $F_2(\rho,\beta,\xi,\eta,p)$. За-метим, что справедливо $\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta^2} = \rho\frac{\partial^2 G}{\partial\beta^2}$, отсюда

$$\left|\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta^2}\right| \le C\rho, \qquad C = const. \tag{11}$$

Используя неравенства (10), (11) на основе формулы (8) оценим ядро интегрального уравнения второго рода (7) в окрестности $\rho = 0$:

$$|\Delta_{\lambda\mu} F_1(\lambda,\mu,\xi,\eta,p)| \le C_0\frac{\ln\rho}{\rho}, \qquad C_0 = const.$$

Таким образом, мы показали, что интегральное уравнение (7) является уравнением типа Фредгольма с особенностью вида $\frac{\ln\rho}{\rho}$. Учитывая, что $\rho^k\ln\rho\to 0$ при $\rho\to 0$ и $k>0$, а также подбирая $0<k<1$ получаем

$$|\ln\rho| \le \frac{C}{\rho^k}.$$

Следовательно, интегральное уравнение (7) является уравнением со слабой особенностью в окрестности точки (λ,μ), а вне окрестности (7) имеет ограниченное ядро, то есть является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Как известно, такое уравнение при фиксированных $p, Rep > a$ (a показатель степени роста функции $u(x,y,z)$ по переменной z) имеет единственное решение $U(x,y,p)$, придадлежа-щее пространству L_2 по переменным x,y, если только диаметр области Ω достаточно мал [4]. В силу условий теоремы, по образу Лапласа $U(x,y,p)$ однозначно восстанавливается оригинал $u(x,y,z)$.

Литература

[1] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.

[2] Алексеев А.А. Об одной задаче интегральной геометрии в трехмерном пространстве // Единствен-ность и устойчивость и методы решения некорректных задач математической физики и анализа. Новоси-бирск: ВЦ СО АН СССР, 1984, с. 3-15.

[3] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.:1984. 296 с.

[4] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.:Физматгиз, 1959. 232 с.

References

[1] Lavrentev M.M., Romanov V.G., Shishatskij S.P. Nekorrektnye zadachi matematicheskoj fiziki i analiza. M.: Nauka, 1980. 286 s.

[2] Alekseev A.A. Ob odnoy zadache integralnoy geometrii v trehmernom prostranstve // Edinstvennost i ustoychivost i metodyi resheniya nekorrektnyih zadach matematicheskoy fiziki i analiza. Novosi-birsk: VTs SO AN SSSR, 1984, s. 3-15.

[3] Petrovskiy I.G. Lektsii po teorii obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy. M.:1984. 296 s.

[4] Mihlin S.G. Lektsii po lineynyim integralnyim uravneniyam. M.:Fizmatgiz, 1959. 232 s.