

УДК 004.421

А.Т. Нуртай

Назарбаев Университет, Республика Казахстан, г. Астана

E-mail: anel.nurtay@nu.edu.kz

**Алгоритм поиска освещенных участков многогранных пересекающихся поверхностей в плоскопараллельном световом потоке**

В данной статье представлен метод поиска освещенных/обдуваемых участков выпуклых пересекającychся многогранников. Ограничение на выпуклость следует из ограничений в алгоритмах Б.Шазеля [3] и С.Хертела [4] поиска линий пересечений многогранников, использованных при подготовке данных для представленного алгоритма. Разработанный алгоритм определяет освещенность областей объектов, основываясь на взаимном расположении проекций контурных циклов и линий пересечений. При этом не ставится ограничения на выпуклость объектов в этапе определения освещенных участков по известным линиям пересечений. Это является большим плюсом, так как при дальнейших исследованиях позволяет снять ограничение на выпуклость многогранников, изменив лишь этап поиска линий пересечений. Разработанный алгоритм прост в понимании и гибок в реализации. Имеет логически обоснованное разделение на этапы, в том числе и пригодные для параллелизации вычислений. Для задач реального времени возможность параллельных вычислений является одним из ключевых характеристик алгоритма.

**Ключевые слова:** алгоритм, поток, параллельных вычислений.

А.Т. Nurtay

**An algorithm for sun illuminated surface areas of intersecting convex polyhedra**

This paper presents a method for finding lighted / windy areas of intersecting convex polyhedra. The constraints in B. Chazelle [3] and S.Hertel [4] algorithms for search intersection lines of polyhedra used in the preparation of data for the presented algorithm imply the restriction on the convexity. The developed algorithm determines the sun lighting of the subject based on the mutual arrangement of the projections of contour cycles and intersections lines. There is no restriction on the convexity in the stage of defining lighted areas with the known lines of intersections. This is a great advantage, since further research allows to remove the restriction on a convexity by changing only the step of searching the intersection lines of surfaces. The developed algorithm is easy to understand and flexible to implement. It has logically justified division into stages, including suitable parts for concurrency management. The possibility of parallel computing is one of the key characteristics of the algorithm for real time tasks.

**Key words:** algorithm, areas, parallel computing.

Ә.Т. Нұртай .

**Қиылысатын көпжақты дене беттерінің өзара параллель күн сәулелері түскен аймақтарын анықтау алгоритмі**

Бұл мақалада дөңес, қиылысатын көпжақты денелердің параллель күн сәулесі түскен не параллель ауа ағынымен үрленген бөліктерін табатын алгоритм көрсетілген. Дөңестікке байланысты шектеу Б.Шазель [3] мен С.Хертелдің [4] көпжақты дене беттерінің қиылысу сызықтарын табу барысында қойылған болатын. Құрастырылған алгоритм жарықтандырылған аймақты денелердің сұлба тізбектері мен қиылысу сызығының проекцияларының өзара орналасуына қарай анықтайды. Қиылысу сызықтарын табатын әдісті өзгертсек, дөңестікке қойылған шектеу жойылады, себебі мақалада ұсынылған алгоритмде ондай шектеу жоқ. Бұл алгоритм түсінгенге оңай болғанымен қоймай, оның программалық жүзеге асырылуы да жеңіл. Логикалық негізделген этаптарға бөлініп, параллель есептеуге де икемделген. Мезет сайын есептің жауабын керек ететін мәселелер үшін амалдың параллелденуі алгоритмнің басты сипаттамаларының бірі болып табылады.

**Түйін сөздер:** алгоритм, ағым, параллельді есептеулер.

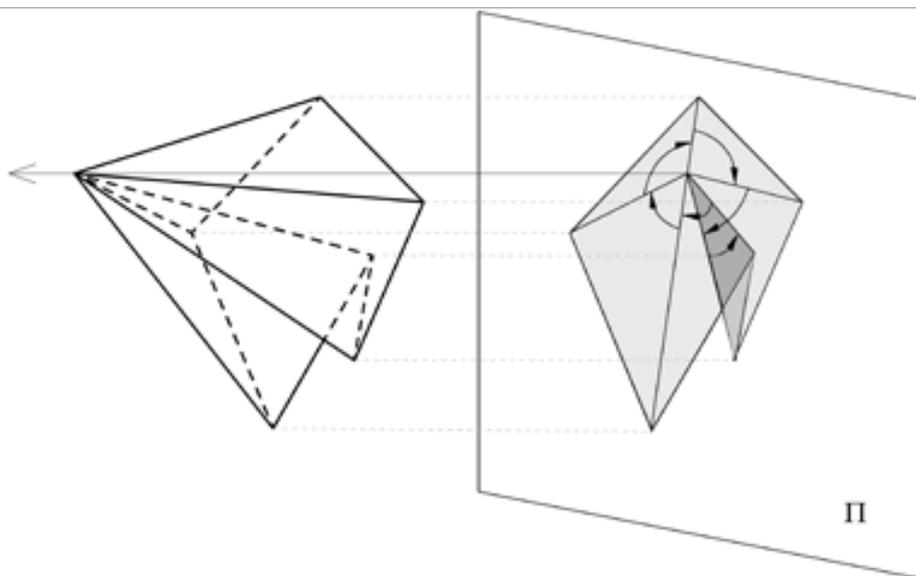
## История и прикладная значимость

Задача поиска освещенных областей трехмерных объектов успешно решается при помощи различных методов компьютерной графики, например метод карты глубины, и сводится к задаче удаления невидимых поверхностей, которая является классической задачей компьютерной графики, и еще в 70-х годах были предложены алгоритмы для ее решения. Методы удаления невидимых граней делятся на растровые и векторные, а также на методы, замещающие в картинной плоскости, и на методы, работающие в объемном пространстве. Упомянутый метод карты глубины принадлежит к растровым методам. Он решает задачу на картинной плоскости, вследствие чего фактически теряется информация о форме объектов, сохраняется лишь порядок расположения объектов относительно друг друга и плоскости проектирования. В практике встречается ряд прикладных задач, которые близки по формулировке к вышеописанной. Ключевым различием является необходимость получения данных в объемном пространстве при помощи эффективного векторного метода. Например, на космический аппарат, совершающий полет по околоземной орбите, среди прочих действуют сила аэродинамического сопротивления. Сила аэродинамического сопротивления играет одну из ключевых ролей при моделировании вращательного движения, так как необходимо вычислить силы и моменты относительно центра масс космического аппарата. Отдельно необходимо отметить силу светового давления, действующую, например, на геостационарный искусственный спутник. В этом случае говорим об освещенности солнечных батарей, снабжающие энергией сами станции. Известно, что для обоих случаев необходимо использовать интегралы по участкам поверхностей, обдуваемых потоком частиц, либо освещаемых Солнцем. В этих целях и производится поиск освещенных/обдуваемых участков поверхностей в трехмерном пространстве. Векторный метод для решения задач в объемном пространстве был предложен в работе В.В.Сазонова [1]. Задача была поставлена для непересекающихся объектов. В данной работе ограничение на непересекаемость объектов снимается, и предлагается новая идея для вычисления освещенных/обдуваемых областей. Для поиска пересечения выпуклых объектов рассматриваются наиболее быстрые известные методы. Один из них является простым для понимания и реализации, второй - более сложным как в понимании, так и в реализации. Объединяет эти два метода условие на выпуклость рассматриваемых объектов. Предложенная идея поиска освещенных/обдуваемых участков поверхностей основывается на анализе взаимно-однозначной привязки образа и проекции на плоскость перпендикулярной направлению света для случая поиска светового давления или направлению движения космического аппарата для случая вычисления сил аэродинамического сопротивления. В результате получен метод, применимый для поиска освещенных/обдуваемых областей пересечения невыпуклых многогранников при условии известной линии пересечения.

## Описание алгоритма и постановка задачи

Рассматриваются объекты, ограниченные многогранными поверхностями с треугольными гранями. Поверхности объектов считаются замкнутыми и двухсторонними. Каждой грани поверхности объекта соответствуют два вектора нормали: внешний и внутренний. Выбирая внешний вектор нормали, мы задаем ориентацию поверхности и её ребер (ребро грани ориентировано так, что при движении вдоль ребра рассматриваемая грань располагается слева, если наблюдать из конца вектора нормали). Сценой будем

называть совокупность объектов, расположенных произвольным образом. Задача состоит в построении освещенных участков поверхностей объектов с учетом их возможного затенения при освещении сцены бесконечно удаленным точечным источником света. Будем называть грань лицевой, если её нормаль образует острый угол с направлением на источник света, и нелицевой в противном случае. Ребро будем называть лицевым, если оно принадлежит двум лицевым граням, нелицевым, если оно принадлежит двум нелицевым граням, и граничным, если оно является общим ребром лицевой и нелицевой граней. Считаем, что каждое ребро принадлежит ровно двум граням. Говоря в дальнейшем о проектировании, будем подразумевать ортогональное проектирование на плоскость, ортогональную направлению светового потока. Желательно заранее определить "отдаленность плоскости от наблюдателя" то есть договориться о том, что все фигуры сцены находятся с одной стороны этой плоскости и, например, о том, что проектирование осуществляется по тому же вектору, что и вектор направления светового потока. Грани называются смежными, если они имеют общее ребро. Будем считать, что две лицевые грани связаны, если можно переместиться с одной грани на другую, двигаясь только по лицевым граням поверхности. Под лицевой поверхностью будем понимать множество лицевых граней, каждая из которых связана со всеми другими гранями этого множества. Будем называть вершину поверхности точкой сборки (Рисунок. 1), если при обходе всех инцидентных данной вершине ребер от ребра к ребру вдоль поверхности по часовой стрелке сумма проекций на, ортогональную направлению светового потока, плоскость, всех плоских углов было больше  $2\pi$ .



**Рисунок 1** – Точка сборки 1

Индексом затенения точки называется количество лицевых граней, которые закрывают данную точку от источника света. Ясно, что точка поверхности освещена тогда и только тогда, когда её индекс затенения равен нулю. Нелицевые грани не освещены, и поэтому из рассмотрения их следует исключить. Индекс затенения является аналогией индекса количественной невидимости, используемого в алгоритме Аппеля удале-

ния невидимых линий [2]. Граница лицевой поверхности состоит из граничных ребер, образующих цикл, который будем называть контурным циклом. Ориентация каждого контурного цикла определяется ориентацией поверхности. Необходимо вычислить индекс затенения для лицевых поверхностей объектов. Найти области в которых индекс затенения равен нулю. Объединить участки с одинаковым индексом затенения.

### Способ решение задачи

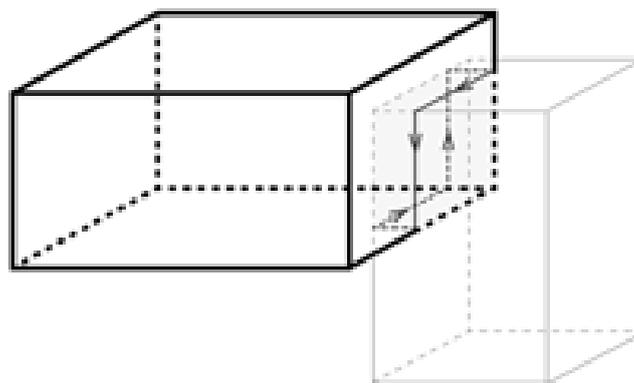
Индекс затенения является кусочно-постоянной функцией, заданной на лицевых поверхностях объектов. Рассмотрим точку  $P$  проекции граничного ребра одной лицевой поверхности на другую. Очевидно, в  $\epsilon$ -окрестности точки  $P$  индекс затенения принимает различные значения, и эта точка является точкой разрыва 1-го рода функции индекса затенения. Будем считать, что в самой точке  $P$  эта функция принимает значение, равное максимальному значению индекса затенения из  $\epsilon$ -окрестности этой точки. Предложенный в работе Сазонова В.В. [1], алгоритм состоит в разбиении поверхности объекта на области, в каждой из которых индекс затенения постоянен, и в выделении тех областей, в которых он равен нулю. Для разбиения, непересекающихся друг с другом, поверхностей на области постоянства индекса затенения необходимо: 1) найти граничные ребра всех поверхностей объектов сцены; 2) найти ортогональные проекции всех граничных ребер на лицевые поверхности объектов сцены; 3) разбить лицевые поверхности на области постоянства индекса затенения; 4) определить индексы затенения внутренних точек областей постоянства. Для применения данного способа для случая сцен с пересекающимися объектами, необходимо модернизировать алгоритм. Вводятся два, промежуточно-параллельных к вышеуказанным этапам, процесса: 1) поиск пересечения ломаной, по которой пересекаются многогранники; 2) анализ взаимного расположения этой ломаной и контурных циклов.

### Контурные циклы

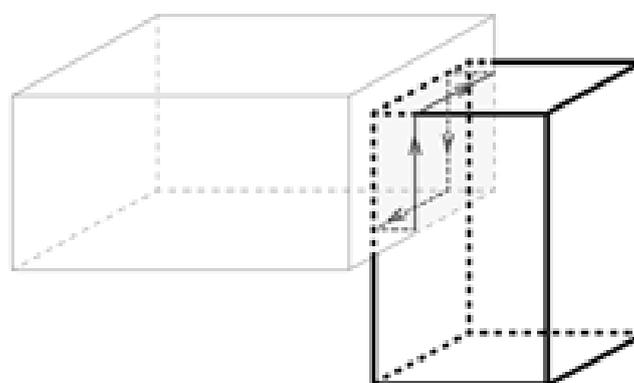
Рассмотрим многогранную поверхность объекта, входящего в состав сцены. Она содержит одну или несколько лицевых поверхностей. Граница лицевой поверхности состоит из граничных ребер, образующих цикл, который будем называть контурным циклом. Ориентация каждого контурного цикла определяется ориентацией лицевой поверхности. Количество контурных циклов, ограничивающих лицевую поверхность, зависит от формы поверхности рассматриваемого объекта и его положения в пространстве. У сферы лицевая поверхность всегда будет ограничена одним контурным циклом, а у тора существует положение, при котором лицевая поверхность ограничена двумя контурными циклами. Как уже отмечалось выше, индекс затенения является кусочно-постоянной функцией, заданной на лицевых поверхностях объектов. Точками разрыва этой функции являются точки проекций граничных ребер на рассматриваемую лицевую поверхность, поэтому для нахождения участков постоянства индекса затенения необходимо найти все граничные ребра и контурные циклы поверхностей сцены.

### Линия пересечения

Ориентированную и замкнутую ломаную, состоящую из общих для пары пересекающихся многогранников отрезков назовем линией пересечения. Для дальнейшего пояснения алгоритма необходимо ввести ряд договоренностей, не являющихся строгими опре-



а)



б)

**Рисунок 2 а и б** – Ориентация линии пересечения в зависимости от исследуемого (пересекающего) объекта

делениями, и используемых лишь для краткости дальнейших пояснений и наглядности. Во-первых, объекты исследуются попарно. То есть в случае пересечения одновременно более чем двух многогранников, необходимо пересмотреть их пересечение последовательно: сначала любых двух, затем этот объединенный многогранник с третьим, и так далее. Таким образом, далее можем говорить лишь о паре пересекающихся многогранников, какой бы сложной ни была сцена. Во-вторых, каждый многогранник исследуется со своим набором данных. Это означает, что одна и та же линия пересечения может иметь разное направление в процессе анализа сцены, в зависимости от того, освещенность которого из пары исследуемых многогранников мы вычисляем (Рисунок.2 а и б).

Все, найденные в процессе поиска линии пересечения, отрезки должны быть включены в направленный цикл. Подробнее о классификации подобных структур написано в работах [3], [4]. Мы же будем считать, что отрезок принадлежит тому многограннику, который на момент анализа является пересекаемым, то есть не принадлежит многограннику, чей контурный цикл анализируется именно на тот момент. В-третьих, в

трехмерном представлении линии пересечения ориентированы так, что ограничивают область поверхности пересекающего многогранника, которая остается внутри пересекаемого, сохраняя ориентацию поверхности пересекающего многогранника (Рисунок.2 а и б). В-четвертых, проекции линий пересечения имеют ту же ориентацию, что и их прообраз в трехмерном пространстве, с учетом, как уже отмечалось выше, принадлежности прообраза к пересекаемому многограннику. В-пятых, линии пересечения, полностью принадлежащие нелицевым граням, не учитываются в анализе индекса затенения контурного цикла, так как никак не влияют на изменение индекса затенения. В-шестых, случаи налегания или касания фигур не рассматриваются в следующем разделе. Все подобные случаи выявляются при поиске линий пересечения многогранников, и обрабатываются в соответствии с взаимным расположением многогранников - объединяются или из сцены исключается содержащиеся в других многогранниках внутренние многогранники. Алгоритм анализа пересекающихся по линии пересечения многогранников представлен ниже.

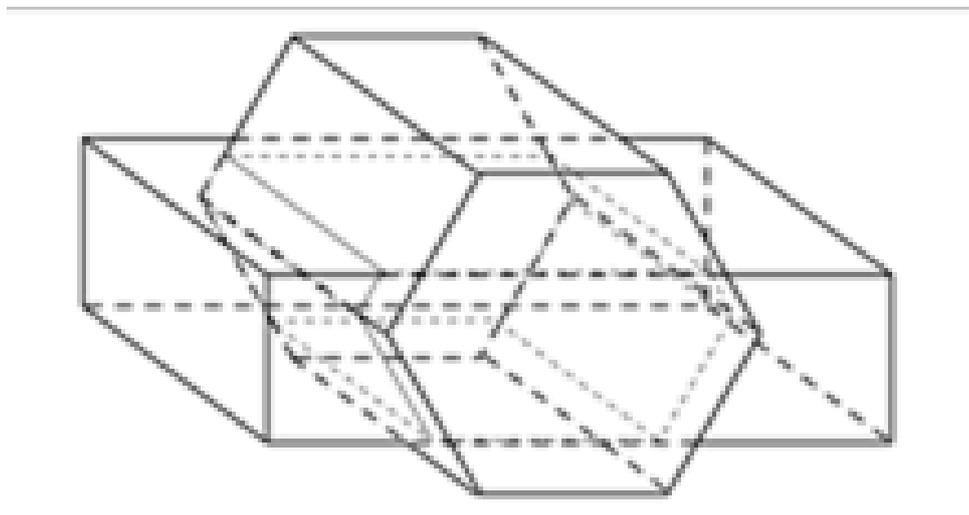


Рисунок 3 – Параллелепипед и шестиугольная призма

### Задача поиска освещенных участков

Опишем поэтапно поиск освещенных областей пересекающихся многогранников. Возьмем пересекающихся шестиугольную призму и параллелепипед как на рисунке 3.

Их линия пересечения выделена на рисунке 4. Этап 1. Проектируемые контурные циклы каждой пары многогранников и линии пересечения на общую плоскость. Проектирование объектов на плоскость - сюръективное отображение. Это нужно учитывать при отображении участков проекций, с найденными индексами затенения, контурных циклов на соответствующие участки многогранников. Для этого предлагается хранить проектированный образ циклов в отдельных структурах, с однозначной привязкой к прообразу. Этап 2. Находим точки пересечения проекций контурных циклов друг с другом и каждого из них с проекциями линий пересечений. Это можно сделать при помощи алгоритма Бентли-Оттмана [5]. Заметим, что, при движении вдоль проекции контурного цикла, индекс затенения его прообраза может изменяться лишь в точках пересечения об-

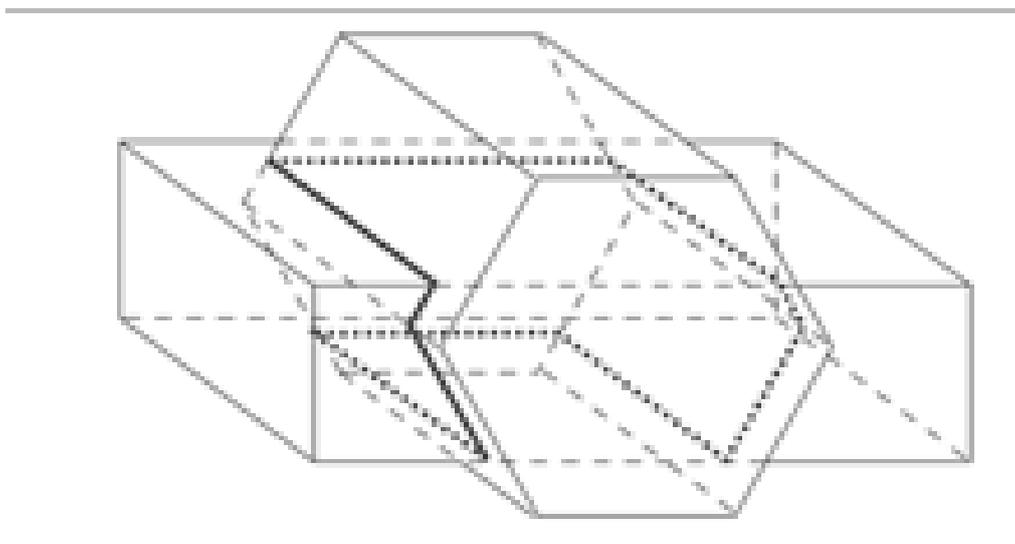
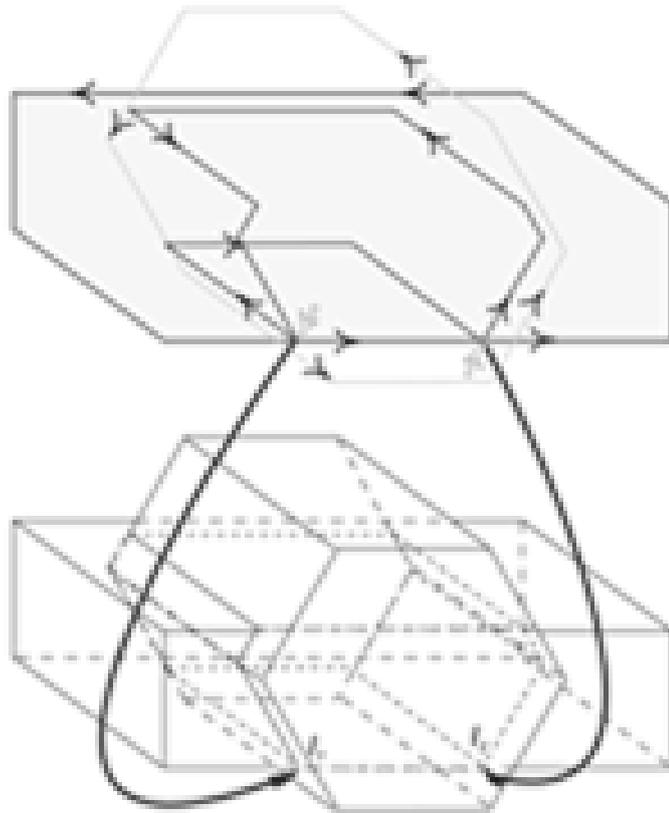


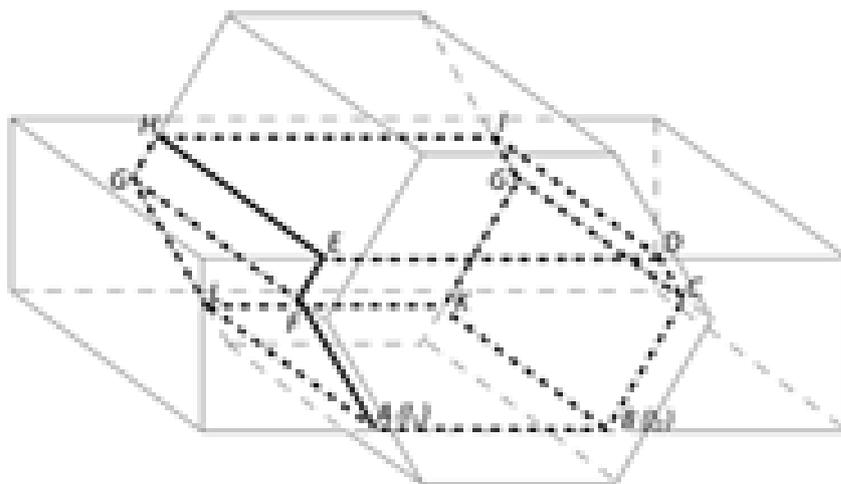
Рисунок 4 – Линия пересечения

раза с проекциями других ломаных и точках сборки. Рассмотрим, каким образом может изменяться индекс затенения в этих точках. Этап 3.1. Случай пересечения проекции контурного цикла с линией пересечения. Берутся вершины на поверхности пересекаемого многогранника, которые являются прообразом точек пересечения проекций контурных циклов и линий пересечений (Рисунок.5). Запишем векторы направления контурного цикла в вершине  $I_1$  в последовательность вершин  $V$ . Вершина  $I_2$  не изменяет индекса затенения, так как принадлежит нелицевой грани. Все точки пересечения проекций контурного цикла и линии пересечения, прообразы которых принадлежат нелицевым граням, исключаются из анализа. Ищем инцидентные вершине  $I_1$  ребра, удовлетворяющие условиям: 1) ребра принадлежат пересекаемому многограннику; 2) проекции ребер лежат в области проекции пересекающего многогранника. Находятся все грани, смежные по этим ребрам.

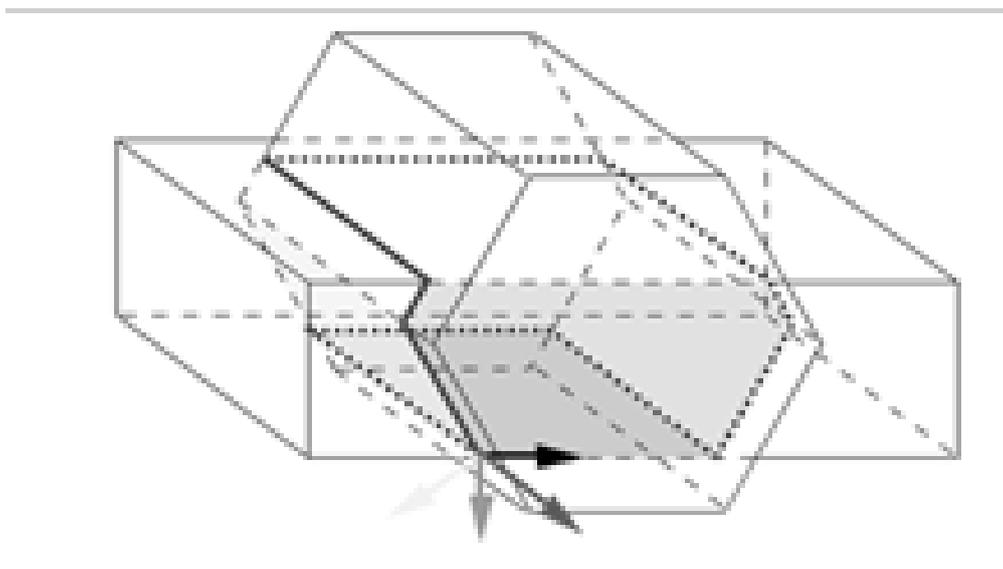
В рисунке 6 для вершины  $I_1$  таковыми гранями являются: ABCDEF, ALKB, AFGL. Запишем внешние векторы нормалей этих граней во множество  $N$ . Если вершин типа  $I_1$  несколько, то необходимо делать привязку граней к соответствующим вершинам. Этап 3.2. Вычисляются углы между векторами из множеств  $V$  и  $N$ , являющимися инцидентными одной и той же вершине, и сравниваются с  $90^\circ$ . Если угол между векторами из множества  $V$  и множества  $N$  больше  $90^\circ$ , то индекс затенения последующего отрезка контурного цикла увеличивается на единицу (Рисунок 7). Иначе, уменьшается на единицу. Это соответствует "вхождению" одного из многогранников в область другого и "выход" из общей области, соответственно. Случай, когда векторы перпендикулярны и никакой другой информации для заданной вершины нет, соответствует касанию или налеганию многогранников. Замечание. Составим плоскости из всевозможных пар векторов из множества  $N$ . Для каждой такой плоскости есть два полупространства. Если все, не участвовавшие в построении плоскости, векторы находятся в одном полупространстве, то, в силу прохождения через эту точку линии пересечения, индекс затенения может измениться лишь в сторону убывания. Если хотя бы один вектор располагается



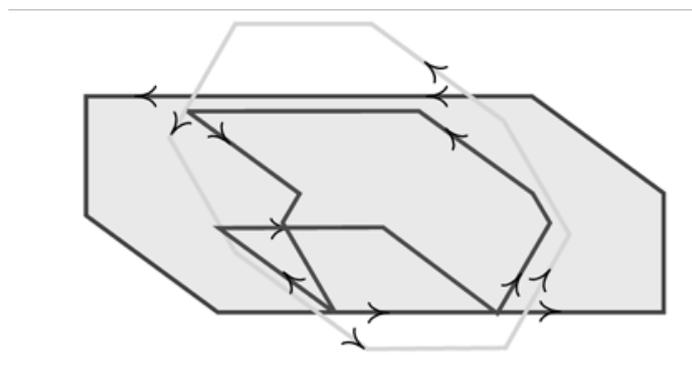
**Рисунок 5** – Желтые стрелки указывают на точки пересечения проекций исследуемого контурного цикла параллелепипеда и линии пересечения. Указатели синего цвета, переносят из двухмерного пространства проекций в трехмерное пространство, и показывают на местоположение соответствующих точек ( $I_1$  и  $I_2$ ) на поверхности пересекаемой шестиугольной призмы.



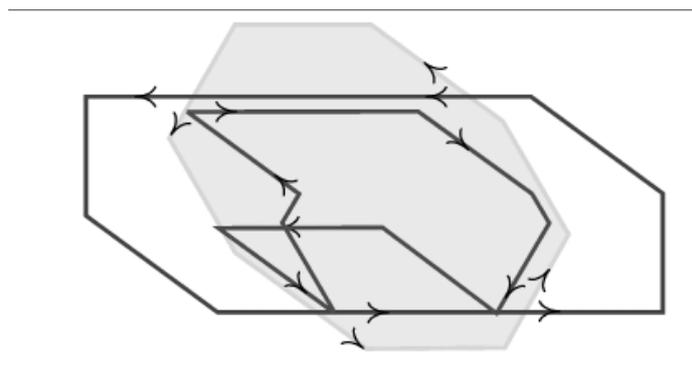
**Рисунок 6** – Общая область двух многогранников



**Рисунок 7** – Грани и их векторы нормалей, отмеченные одинаковым цветом. Черная стрелка принадлежит множеству  $V$ , цветные стрелки – множеству  $N$ .



а) Ориентация линии пересечения при проходе по контурному циклу параллелепипеда



б) Ориентация линии пересечения при проходе по контурному циклу шестиугольной призмы

**Рисунок 8** – Ориентация линии пересечения при проходе по контурному циклу

в другой полуплоскости, то можно говорить об увеличении индекса затенения. Этап 4. Случай пересечения проекций двух контурных циклов. Напомним, что мы храним проекции в однозначном соответствии с их прообразами. То есть в любой момент времени можно найти точку на поверхности многогранника, соответствующей точке на проекции контурных циклов или линий пересечений. Как изменяется индекс затенения в точках пересечения проекций двух контурных циклов? Ответ на этот вопрос дается обычным вычислением расстояний от точек, соответствующих точке пересечения контурных циклов, на многогранниках до плоскости проектирования. Если точка, соответствующая исследуемому контуру находится дальше от плоскости проектирования, чем точка пересекаемого контура, тогда индекс затенения остается неизменным. Если точка, соответствующая исследуемому контуру находится ближе к плоскости проектирования, чем точка пересекаемого контура, тогда осуществляется следующая проверка. Ключевой момент. Пусть  $v_1$  - вектор обхода проекции исследуемого контурного цикла.  $v_2$  - вектор направления проекции пересекаемого контурного цикла. Пусть  $n$  - вектор направления светового потока. Рассмотрим тройку  $(v_1, v_2, n)$ . Если тройка  $(v_1, v_2, n)$  - правая, тогда индекс затенения для исследуемого контурного цикла увеличивается на единицу (Рисунок 8 а и б), если тройка - левая, то уменьшается на единицу.

### Литература

- [1] Сазонов Вас.В. Применение вычислительной геометрии в задачах моделирования вращательного движения космических аппаратов // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.
- [2] JAppel A. The Notion of Quantitative Invisibility and Machine Rendering of Solids // Proc. of ACM National Conference. - Thompson Book, 1967. - pp. 387.
- [3] Chazelle B. An optimal algorithm for intersecting three-dimensional convex polyhedral // Society for Industrial and Applied Mathematics. - SIAM J.Comput.- Vol.21. - No. 4.- pp. 671-696
- [4] Bentley J. L. andOttmann T. A. Algorithms for reporting and counting geometric intersections // IEEE Transactions on Computers, 1979. -C-28 (9): 643-647, doi:10.1109/TC.1979.1675432

### References

- [1] Sazonov Vas.B. Primenenie vychislitelnoi geometri v zadachax modelirovaniya vrashatel'nogo kosmicheskix apparatov //Dissertaciy na soiscanie uchenoi stepeni candidat
- [2] JAppel A. The Notion of Quantitative Invisibility and Machine Rendering of Solids // Proc. of ACM National Conference. - Thompson Book, 1967. - pp. 387.
- [3] Chazelle B. An optimal algorithm for intersecting three-dimensional convex polyhedral // Society for Industrial and Applied Mathematics. - SIAM J.Comput.- Vol.21. - No. 4.- pp. 671-696
- [4] Bentley J. L. andOttmann T. A. Algorithms for reporting and counting geometric intersections // IEEE Transactions on Computers, 1979. -C-28 (9): 643-647, doi:10.1109/TC.1979.1675432