УДК 517.52

А.Б. Муканов

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан, Астана
E-mail: mukanov.askhat@gmail.com

Об одном примере к теореме Боаса

В этой работе изучается связь между суммируемостью заданной числовой последователь ности, стремящейся к нулю, и интегрируемостью соответствующего ей тригонометрического ряда. Точнее, в статье рассматривается вопрос об обобщении теоремы Боаса о коэффициен тах Фурье монотонных функций. Согласно указанной теореме норма монотонной функции в пространстве Лоренца $L_{p,q}[0,1]$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ эквивалентна норме последовательно сти коэффициентов Фурье функции в дискретном пространстве Лоренца $l_{p',q}$, где $p' = \frac{p}{p-1}$. Для заданного $0 < \alpha \le 1$ введен класс α монотонных функций, содержащий класс абсо лютно непрерывных, невозрастающих функций. α монотонная функция определяется как функция, обладающая абсолютно непрерывным, невозрастающим правосторонним дробным интегралом Римана Лиувилля порядка $1-\alpha$. Вопрос о возможности обобщения теоремы Боаса на класс α монотонных функций представляет для нас большой интерес. В работе построен пример α монотонной функции, который показывает, что теорема Боаса неверна для α монотонных функций в случае $p < \frac{1}{\alpha}$. Из этого вытекает, что теорему Боаса для α монотонных функций стоит исследовать в случае $p \ge \frac{1}{\alpha}$.
Ключевые слова: коэффициенты Фурье, монотонные функции α монотонные функции, пространства Лоренца, дробный интеграл.

A.B. Mukanov
On example to the Boas theorem

In this work we study the relation between summability properties of a sequence tending to zero and integrability properties of the corresponding trigonometric series. More precisely, in this paper is considered the problem of generalizing of Boas' theorem on the Fourier coefficients of monotone functions. According to that theorem the norm of monotone function in the Lorentz space $L_{p,q}[0,1]$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ is equivalent to the norm of the Fourier coefficients of the function in the discrete Lorentz space $l_{p',q}$. We define the class of α monotone functions $(0 < \alpha \le 1)$ that contains the class of non increasing absolutely continuous functions. The α monotone function is defined as function which has non increasing absolutely continuous right side fractional Riemann Liouville integral of order $1-\alpha$. A problem of generalizing of Boas' theorem to the class of α monotone function is very interesting for us. We give an example of α monotone function which show impossibility of Boas' theorem in the case $p < \frac{1}{\alpha}$. It follows that Boas' theorem for the α monotone functions should be investigated in the case $p \ge \frac{1}{\alpha}$.
Key words: Fourier coefficients, monotone functions α monotone functions, Lorentz spaces, fractional integral.

А.Б. Муканов
Боас теоремасына мысал туралы

Бұл жұмыста нөлге ұмтылатын берілген санды тізбектің қосылануы қасиеттерімен оған сәй кес тригонометриялық қатардың интегралдану қасиеттерімен арасындағы байланыс зерт теледі. Нақты айтқанда бұл жұмыста монотонды функциялардың Фурье коэффициенттері туралы Боас теоремасының жалпылану есебі қарастырылады. Айтылған теорема бойынша монотонды функцияның Лорентц кеңістігінде $L_{p,q}[0,1]$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ нормасы функ цияның Фурье коэффициеттерінің дискреттік кеңістігіндегі $l_{p',q}$ нормасына эквивалентті.

Абсолютті үзіліссіз өспейтін функцияларды қамтитын α монотонды ($0 < \alpha \leq 1$) функция лардың классы енгізілген. α монотонды функция Риман Лиувилль оң жақты бөлшекті ин тегралы абсолютті үзіліссіз өспейтін функциясы ретінде анықталады. Боас теоремасын α монотонды функциялар үшін жалпылануы есебі біз үшін қызықты болып табылады. Осы жұмыста Боас теоремасы α монотонды функциялар үшін $p < \frac{1}{\alpha}$ жағдайында орындалмай тының көрсететін α монотонды функцияның мысалы құрастырылған. Сондықтан Боас тео ремасы α монотонды функциялар үшін $p \geq \frac{1}{\alpha}$ жағдайында зерттелу керек.
Түйін сөздер: Фурье коэффициенттері, монотонды функциялар, α монотонды функциялар, Лоренц кеңістіктері, бөлшекті интеграл.

Введение

В этой работе мы изучаем связь между суммируемостью заданной последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и интегрируемостью соответствующего тригонометрического ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \pi k x, \quad x \in [0,1].$$

Одним из первых результатов, описывающих подобные связи является известная теорема Харди и Литтлвуда ([1], [2, XII,§6], [3, §6]).

Теорема A *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $a = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *невозрастающая, неотрицательная последовательность, т.ч.* $a_k \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Тогда*

$$\|f\|_{L_p(0,1)} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{p-2} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Всюду в работе через C будем обозначать положительную константу, различную в различных ситуациях. Кроме того, выражение $T \sim S$ означает, что существует такая C, что выполнены неравенства $\frac{1}{C} S \leq T \leq CS$. Существует большое количество обобщений теоремы А. В частности, Й. Загер [4] заменил условие монотонности последовательности на квазимонотонность. В работах [5] Е.Д. Нурсултанов, [6] и [7] М.И. Дьяченко и С.Ю. Тихонов обобщали этот результат ослабив условие монотонности. Также М.И. Дьяченко в работе [8] доказал похожий результат для кусочно-монотонных функций многих переменных. Двойственным результатом к теореме А является следующая теорема Харди и Литтлвуда ([2, XII,§6], [3, §6])

Теорема B *Пусть* $1 < p < \infty$, $f(x)$ *неотрицательная, невозрастающая интегрируемая функция на* $[0,1]$. *Тогда верно следующее соотношение*

$$\|a\|_{l_p} \sim \left(\int_0^1 x^{p-2} (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Похожие проблемы рассматривались и в терминах пространств Лоренца. Приведем определения указанных пространств. Пусть μ мера Лебега на $[0,1]$, f μ-измеримая функция на $[0,1]$, тогда через f^* мы обозначим невозрастающую перестановку функции f, т.е.,

$$f^*(t) = \inf\{\sigma : \mu\{x \in [0,1] : |f(x)| > \sigma\} \leq t\}.$$

Определение 1 *Пусть* $0 < p \le \infty$ *и* $0 < q \le \infty$*. Тогда пространством Лоренца* $L_{p,q}$ *называется множество всех* μ*-измеримых функций, для которых конечен следующий функционал*

$$\|f\|_{L_{p,q}} := \begin{cases} \left(\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{для } 0 < p < \infty \text{ и } 0 < q < \infty, \\ \sup_t t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & \text{для } 0 < p \le \infty \text{ и } q = \infty. \end{cases}$$

Через $l_{p,q}$ будем обозначать аналогично определенные пространства последовательностей. Аналоги теоремы A для пространств Лоренца были доказаны Й. Загером [4], М.И. Дьяченко и Е.Д. Нурсултановым [9] (см. также [10]) и Б. Бутоном [11]. В работе [9] авторы рассматривали тригонометрические ряды с α-монотонными коэффициентами. Данные ряды ввел М.И. Дьяченко в работе [12] (см. также [13]). Соответствующий аналог теоремы B для пространств Лоренца был сформулирован в книге Р.П. Боаса [3, с. 36] и был доказан в [14]. **Теорема C** *Пусть* $1 < p < \infty$ $1 \le q \le \infty$ *и* $f(x)$ *неотрицательная, невозрастающая, интегрируемая функция на* $[0,1]$*. Тогда*

$$\|a\|_{l_{p,q}} \sim \|f\|_{L_{p',q}},$$

где $p' = \frac{p}{p-1}$. Похожий результат был доказан в работе [15] для обобщенно монотонных функций из обобщенных пространств Лоренца. Нам потребуется следующее определение

Определение 2 *Пусть* $f(x) \in L_1(0,1)$*,* $0 < \alpha < 1$*. Тогда выражение*

$$I^\alpha f(x) = (I^\alpha_{1-} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\, dt \quad \text{для } x < 1.$$

называется дробным интегралом Римана-Лиувилля (см. [16]) функции f *порядка* α*.*

Замечание 1 *Если* $\alpha = 0$*, тогда под дробным интегралом* I^0 *будем понимать:* $I^0 f(x) := f(x)$*.*

Определение 3 *Пусть* $0 < \alpha \le 1$*. Будем говорить, что неотрицательная функция* f α*-монотонна (или принадлежит классу* M_α*), если* $I^{1-\alpha} f(x)$ *является невозрастающей, абсолютно непрерывной функцией на* $[0,1]$*.*

Интересным представляется вопрос: сохранится ли утверждение теоремы C если заменить в ней условие монотонности на условие α-монотонности? В данной работе мы покажем, что, вообще говоря, это не так. Имеет место следующая

Теорема 1 *Пусть* $\alpha \in (0,1)$ *и* $1 < p < \frac{1}{\alpha}$*. Тогда существует функция* $f \in M_\alpha$ *такая, что*

$$\left(\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p'}} \overline{f}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

и $a = \{a_n\}_{n=0}^\infty \notin l_{p,q}$*, где*

$$a_n(f) = \int_0^1 f(x) \cos \pi n x \, dx.$$

Вспомогательные утверждения

Лемма 1 *Пусть* $\beta \in (0,1)$, $y \in (0,1)$ *и*

$$a_n = \int_0^y \frac{\cos \pi n x}{x^\beta}\, dx, \quad b_n = \int_0^y \frac{\sin \pi n x}{x^\beta}\, dx$$

для $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$a_n \sim \frac{C_1(\beta)}{n^{1-\beta}},\ b_n \sim \frac{C_2(\beta)}{n^{1-\beta}} \quad as \quad n \to +\infty,$$

где $C_1(\beta), C_2(\beta) \neq 0$.

Доказательство. Мы докажем утверждение леммы для последовательности a_n. Доказательство для последовательности b_n аналогично. Заменяя nx на t получим

$$a_n = n^{\beta-1} \int_0^{ny} \frac{\cos \pi t}{t^\beta}\, dt.$$

Применим известную формулу

$$\int_0^\infty \frac{\cos \pi t}{t^\beta}\, dt = \frac{\pi^\beta}{2\Gamma(\beta)\cos\frac{\pi\beta}{2}},$$

и положим $C_1(\beta) := \frac{\pi^\beta}{2\Gamma(\beta)\cos\frac{\pi\beta}{2}}$.

Лемма 2 *Пусть* $\alpha \in (0,1)$ *и функция* $g(t) \in L(0,1)$ *такая, что* $supp\ g \subseteq \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. *Пусть также* $f(x) = \int_x^1 \frac{g(t)}{(t-x)^\alpha}\, dt$ *и* $a_n(f) = \int_0^1 f(x)\cos \pi n x dx$. *Тогда*

$$a_n(f) = a_n(g)\gamma_n + b_n(g)\delta_n + \xi_n + \zeta_n,$$

где $\gamma_n \sim \frac{C_1(\alpha)}{n^{1-\alpha}}$, $\delta_n \sim \frac{C_2(\alpha)}{n^{1-\alpha}}$ *as* $n \to \infty$, *and* $|\xi_n + \zeta_n| \leq \frac{C(g,\alpha)}{n}$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \int_0^1 \cos \pi n x \int_x^1 \frac{g(t)}{(t-x)^\alpha}\, dt\, dx \\
&= \int_0^1 g(t) \int_0^t \frac{\cos \pi n x}{(t-x)^\alpha}\, dx\, dt = \int_0^1 g(t) \int_0^t \frac{\cos \pi n (t-y)}{y^\alpha}\, dy\, dt \\
&= \int_0^1 g(t)\cos \pi n t \int_0^t \frac{\cos \pi n y}{y^\alpha}\, dy\, dt + \int_0^1 g(t)\sin \pi n t \int_0^t \frac{\sin \pi n y}{y^\alpha}\, dy\, dt \\
&= \int_0^1 g(t)\cos \pi n t \int_0^1 \frac{\cos \pi n y}{y^\alpha}\, dy\, dt - \int_0^1 g(t)\cos \pi n t \int_t^1 \frac{\cos \pi n y}{y^\alpha}\, dy\, dt \\
&+ \int_0^1 g(t)\sin \pi n t \int_0^1 \frac{\sin \pi n y}{y^\alpha}\, dy\, dt - \int_0^1 g(t)\sin \pi n t \int_t^1 \frac{\sin \pi n y}{y^\alpha}\, dy\, dt \\
&= a_n(g)\gamma_n + \xi_n + b_n(g)\delta_n + \zeta_n.
\end{aligned}$$

Из леммы 1 получим $\gamma_n \sim \frac{C_1(\alpha)}{n^{1-\alpha}}$, $\delta_n \sim \frac{C_2(\alpha)}{n^{1-\alpha}}$ при $n \to \infty$. Теперь так как $supp\ g \subseteq \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, то

$$|\xi_n| = \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 g(t) \cos \pi n t \int_t^1 \frac{\cos \pi n y}{y^\alpha}\, dy\, dt \right| \le \int_{\frac{1}{2}}^1 |g(t)| \left| \int_t^1 \frac{\cos \pi n y}{y^\alpha}\, dy \right| dt$$
$$\le \frac{C(\alpha)}{n} \int_{\frac{1}{2}}^1 |g(t)|\, dt = \frac{C(g,\alpha)}{n}.$$

Аналогично неравенство верно и для последовательности ζ_n. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1

Обозначим через $g(x)$ 1-периодическую функцию

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^{1-\delta}} & \text{для} \quad x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \end{cases}$$

где $\delta \in \left(0, \frac{1}{p} - \alpha\right)$ подберем позднее. Положим $f(x) = \int_x^1 \frac{g(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\, dt$ где $x \in [0,1]$. Тогда используя неотрицательность $g(t)$ и следующее равенство

$$\int_u^1 \frac{f(x)}{(x-u)^\alpha}\, dx = \int_u^1 g(t) \int_u^t \frac{dx}{(x-u)^\alpha (t-x)^{1-\alpha}}\, dt$$
$$= \int_u^1 g(t) \int_0^1 \frac{dv}{v^\alpha (1-v)^{1-\alpha}}\, dt = C(\alpha) \int_u^1 g(t)\, dt,$$

мы заключим, что $I^{1-\alpha} f(x)$ неотрицательная функция. Также из [16, с. 43, Т. 2.3.] мы получим, что $I^{1-\alpha} f(x)$ абсолютно непрерывная функция. Значит, $f(x) \in M_\alpha$. Из леммы 2 следует, что $a_n(f) = a_n(g)\gamma_n + b_n(g)\delta_n + \xi_n + \zeta_n$, где $\gamma_n \sim \frac{C_1(\alpha)}{n^\alpha}$, $\delta_n \sim \frac{C_2(\alpha)}{n^\alpha}$ при $n \to \infty$, и $|\xi_n + \zeta_n| \le \frac{C(g,\alpha)}{n}$.

Теперь применяя лемму 1, имеем

$$a_n(g) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos \pi n t \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^{1-\delta}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi n \left(u + \frac{1}{2}\right) \frac{du}{u^{1-\delta}}$$
$$= \cos \frac{\pi n}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \pi n u}{u^{1-\delta}}\, du - \sin \frac{\pi n}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi n u}{u^{1-\delta}}\, du \sim \frac{C(\alpha)}{n^\delta}$$

при $n \to \infty$.

Следовательно, если $\alpha + \delta < 1$, тогда $|a_n(f)| \ge \frac{C}{n^{\alpha+\delta}}$ для достаточно больших n. Теперь мы выберем $\delta \in (0,1)$ так чтобы $p < \frac{1}{\alpha+\delta}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^\infty \left(n^{\frac{1}{p}} |a_n(f)|\right)^q \frac{1}{n} \ge C(p,q,\alpha) \sum_{n=n_0}^\infty n^{q\left(\frac{1}{p} - \alpha - \delta\right) - 1} \ge C(p,q,\alpha) \sum_{n=n_0}^\infty n^{-1} = \infty,$$

т.е., $\{a_n(f)\} \notin l_{pq}$.

С другой стороны $f(x)$ ограниченная функция. Действительно, пусть $0 \le x \le \frac{1}{4}$ тогда

$$0 \le f(x) = \int_x^1 \frac{g(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,dt \le \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{g(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,dt \le 4^{1-\alpha} \int_{\frac{1}{2}}^1 g(t)\,dt = C(\alpha, g).$$

Значит неравенство

$$f^*(t) \le C(g, \alpha),$$

выполняется для всех $t \in [0,1]$. Следовательно,

$$\left(\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p'}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \le C(g,\alpha)\left(\int_0^1 t^{\frac{q}{p'}-1} dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Доказательство теоремы 1 завершено.

Заключение

Из теоремы 1 следует, что теорема C если и будет верна для α-монотонных функций, то только при $p \ge \frac{1}{\alpha}$.

Литература

[1] *Hardy G.H. and Littlewood J.E.* Notes on the theory of series (XIII): Some new properties of Fourier constants // J. Lond. Math. Soc. - 1931. - **S1-6**, 1. - P. 3-9.

[2] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, Т. 1,2 - Москва:Мир, 1965.

[3] *Boas R.P. Jr.* Integrability theorems for trigonometric transforms - New-York: Springer, 1967.

[4] *Sagher Y.* An application of interpolation theory to Fourier series // Stud. Math. - 1972. - 41. - P. 169-181.

[5] *Nursultanov E.D.* Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy-Littlewood type inequalities // East J. Approx. - 1998. - V. 4, 2. - P. 243-275.

[6] *Tikhonov S.Yu.* Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. - 2007. - V. 326, 1. - P. 721-735.

[7] *Dyachenko M., S.Tikhonov* Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // Stud. Math. - 2009. - V. 193, 3. - P. 285-306.

[8] *Дьяченко М.И.* Кусочно монотонные функции многих переменных и теорема Харди-Литтлвуда // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1991. - Т. 55, 6. - С. 1156-1170.

[9] *Дьяченко М.И., Нурсултанов Е.Д.* Теорема Харди-Литтлвуда для тригонометрических рядов с α-монотонными коэффициентами // Матем. сб. - 2009. - Т. 200, 11. - С. 45-60.

[10] *Nursultanov E., Tikhonov S.* Net spaces and boundedness of integral operators // J. Geom. Anal. - 2011. - V. 21, 4. - P. 950-981.

[11] *Booton B.* General monotone sequences and trigonometric series // Math. Nachr. - 2014. - V. 287, Is. 5-6. - P. 518-529.

[12] *Дьяченко М.И.* Тригонометрические ряды с обобщенно-монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Матем.- 1986. - 7. - С. 39-50.

[13] *Дьяченко М.И.* Теорема Харди-Литтлвуда для тригонометрических рядов с обобщенно-монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. - 2008. - 5. - С. 38-47.

[14] *Sagher Y.* Some remarks on interpolation of operators and Fourier coefficients // Stud. Math. - 1972. - 44. - P. 239-252.

[15] *Копежанова А.Н., Нурсултанов Е.Д., Перссон Л.-Е.* О неравенствах для преобразования Фурье функций из пространств Лоренца // Метм. заметки. - 2011. - Т. 90, 5. - С. 785-788.

[16] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения - Минск: Наука и техника, 1987. - 688 с.

References

[1] *Hardy G.H. and Littlewood J.E.* Notes on the theory of series (XIII): Some new properties of Fourier constants // J. Lond. Math. Soc. - 1931. - **S1-6**, 1. - P. 3-9.

[2] *Zygmund A.* Trignometrisheskie ryady, T. 1,2 - Moskwa:Mir, 1965.

[3] *Boas R.P. Jr.* Integrability theorems for trigonometric transforms - New-York: Springer, 1967. -

[4] *Sagher Y.* An application of interpolation theory to Fourier series // Stud. Math. - 1972. - 41. - P. 169-181.

[5] *Nursultanov E.D.* Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy-Littlewood type inequalities // East J. Approx. - 1998. - V. 4, 2. - P. 243-275.

[6] *Tikhonov S.Yu.* Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. - 2007. - V. 326, 1. - P. 721-735.

[7] *Dyachenko M., Tikhonov S.* Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // Stud. Math. - 2009. - V. 193, 3. - P. 285-306.

[8] *Dyachenko M.I.* Kusoshno monotonnye funccii mnogikh peremennyh i teorema Hardy-Littlewooda // Izv. AN SSSR. Ser. matem. - 1991. - T. 55, 6. - C. 1156-1170.

[9] *Dyachenko M.I., Nursultanov E.D.* Teorema Hardy-Littlewooda dlya trigonometricheskih ryadov s α-monotonnymi koefficientami // Matem. sb. - 2009. - T. 200, 11. - C. 45-60.

[10] *Nursultanov E., Tikhonov S.* Net spaces and boundedness of integral operators // J. Geom. Anal. - 2011. - V. 21, 4. - P. 950-981.

[11] *Booton B.* General monotone sequences and trigonometric series // Math. Nachr. - 2014. - V. 287, Is. 5-6. - P. 518-529.

[12] *Dyachenko M.I.* Trigonometricheskie ryady s obobshenno-monotonnymi koefficientami // Izv. vuzov. Matem.- 1986. - 7. - P. 39-50.

[13] *Dyachenko M.I.* Teorema Hardy-Littlewooda dlya trigonometricheskih ryadov s obobshenno-monotonnymi koefficientami // Izv. vuzov. Matem. - 2008. - 5. - P. 38-47.

[14] *Sagher Y.* Some remarks on interpolation of operators and Fourier coefficients // Stud. Math. - 1972. -o 44. - P. 239-252.

[15] *Kopezhanova A.N., Nursultanov E.D., Persson L.-E.* O neravenstvah dlya preobrazovanii Fourier funccii iz prostranstv Lorentza // Matem. zametki. - 2011. - T. 90, 5. - P. 785-788.

[16] *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilojeniya - Minsk: Nauka i technika, 1987. - 688 p.